HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCLXXIX.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année,

Tirés des Registres de cette Académie.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXXII.

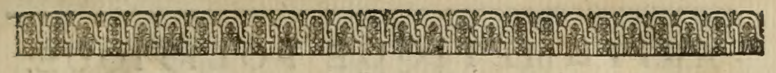


TABLE
POUR L'HISTOIRE.

PHYSIQUE GÉNÉRALE.

ANATOMIE.

MINÉRALOGIE.

CHIMIE.

ARITHMÉTIQUE POLITIQUE.

ANALYSE.

ASTRONOMIE.

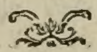


TABLE
POUR LES MÉMOIRES.

ERRATA pour les Mémoires de l'année 1776.

Page 48, art. 9, ligne 24, le 30 Octobre on ressentit à Paris, &c. *lisez* le 30 Décembre.

Page 131, ligne 24, l'ile aux Centres; *lisez* l'ile aux Cèdres.

FAUTE à corriger dans ce Volume.

Histoire. Page 21, ligne 27, dissolution; *lisez* distillation.



HISTOIRE



HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES SCIENCES.
Année M. DCCLXXIX.

PHYSIQUE GÉNÉRALE.

SUR UN
MOYEN DE CONNOÎTRE LA FINESSE DES LAINES.

ON doit compter pour un des premiers bienfaits des Sciences, l'avantage qu'elles ont de porter dans les Arts & dans le Commerce la précision qui les caractérisent, de changer en méthodes les routines des Arts, & de transformer en caractères précis & V. les Mém. page 1.

faciles à saisir, les indications vagues, d'après lesquelles le Négociant reconnoît les objets de son commerce & leurs différens degrés de bonté. Quelque sûr que puisse paroître le jugement de l'intérêt & l'habitude, il n'est jamais que le supplément imparfait des véritables connoissances: à la vérité cette utilité des Sciences n'est sensible qu'après que leurs différentes parties ont acquis une certaine étendue, & que leurs méthodes se sont perfectionnées: les premières méthodes sont rarement assez faciles pour devenir d'un usage commun, & il n'est pas moins rare qu'une méthode-pratique n'exige point le concours de connoissances dans différens genres.

M. Daubenton s'est occupé depuis long temps des moyens de perfectionner les Laines de France, & d'en augmenter les récoltes, & il a embrassé cet objet dans toute son étendue, la nourriture, le logement, le régime, les maladies des moutons, la manière de recueillir leurs laines, les effets des mélanges avec les races étrangères.

Pour apprécier l'influence des différentes méthodes de nourrir, de traiter les moutons, & celle des mélanges des races sur les laines, il falloit avoir un moyen précis de juger du degré de leur finesse: elles sont classées dans le Commerce, mais ces classes, d'ailleurs trop peu nombreuses, ne sont point distinguées par des caractères certains: des laines très-différentes sont souvent placées dans la même classe par différens Manufacturiers, & quelquefois par le même, suivant son intérêt ou son caprice.

M. Daubenton a cherché un moyen plus sûr, & il l'a trouvé en faisant un examen suivi des différentes laines qu'il a pu observer; il a remarqué d'abord, que dans tous les flocons de laines il se trouve des fils de la plus grande finesse, & qu'ainsi, ce n'est point d'après les fils les plus fins d'une laine, mais d'après l'épaisseur des plus gros qu'il faut en déterminer la finesse.

Ensuite il a fait construire un micromètre qui mesure la cent quarantième partie d'une ligne, c'est-là le terme de la finesse des fils les plus gros d'un flocon de laine de la première

qualité; ce terme une fois connu, M. Daubenton se borne à diviser les laines en cinq classes; les superfines, dont le diamètre s'étend depuis $\frac{1}{140}$.e de ligne jusqu'à $\frac{1}{70}$.e, les fines depuis $\frac{1}{70}$.e jusqu'à $\frac{3}{140}$.e & ainsi de suite: la différence de diamètre d'une classe à l'autre étant ainsi de $\frac{1}{140}$.e de ligne, elle est assez sensible pour que dans chaque classe on puisse distinguer des laines de première & deuxième qualité.

L'usage de cet instrument a été très-utile à M. Daubenton, il lui a servi à s'assurer, avec exactitude, de l'effet que les différens moyens qu'il a employés peuvent produire sur les laines; par exemple, il a trouvé que les métis des béliers à laine très-fine, & des brebis à laine de l'Auxois, peuvent, dès la première génération (grâce à la manière dont il les élève) acquérir une laine supérieure à celle du bélier, qui a été la tige de leur race.

Ce même instrument peut être utile dans de grandes Manufactures en laine, où il est important d'en connoître exactement la qualité, & où de légères erreurs entre des laines très-fines peuvent faire perdre à un ouvrage une partie de son prix. Mais on sent que ni les Bergers, ni les Fermiers, ni même la plupart des Propriétaires & des Manufacturiers, ne se fourniront point de micromètre: M. Daubenton a donc cherché pour eux une méthode plus simple; il propose d'attacher sur un fond noir des échantillons de laines de chaque classe, de les placer à des distances égales; on mettra entre deux l'échantillon de la laine qu'on veut leur comparer, & en observant avec une loupe, on connoîtra, d'une manière plus précise que le tâtonnement ordinaire, à quelle classe on doit rapporter la laine que l'on examine.

Cette méthode est susceptible d'une exactitude très-grande, parce qu'il s'agit seulement de comparer l'objet qu'on veut classer avec des échantillons déterminés, par une méthode très-précise, & dont les différences sont très-sensibles à la loupe. Non-seulement cette seconde méthode proposée par M. Daubenton, peut être utile aux Manufacturiers qui sont intéressés à bien connoître leurs laines, mais elle le sera

beaucoup en général à cette partie du Commerce, en mettant les hommes les plus ſimples en état de ſe défendre contre les ruſes de ceux qui ont plus de connoiſſances & plus d'adreſſe; c'eſt-là un des plus grands avantages des bonnes méthodes, ſi elles augmentent l'inégalité entre les hommes dans les objets de ſpéculation, elles la font preſque diſparoître dans tout ce qui tient à l'uſage commun, c'eſt-à-dire dans toutes les circonſtances où cette inégalité peut être un mal.





ANATOMIE.

SUR L'ORGANE DE LA VOIX.

M. VICQ-D'AZIR a inféré dans le volume précédent un Mémoire fur l'Ouïe, où d'après un examen comparé des parties qui conftituent cet organe dans les différentes claffes d'animaux pourvues de ce fens, il a diftingué celles qui font effentielles, des parties qui n'ont qu'une utilité fecondaire, & dont quelques-unes même, femblent plutôt nuire à la perfection de l'ouïe. En effet il paroît avoir le plus de fineffe & de jufteffe dans les efpèces d'oifeaux qui apprennent fi facilement à moduler des airs, & dans ces efpèces l'organe eft très-fimple. V. les Mém. p. 178.

Le Mémoire que M. Vicq-d'Azir donne ici fur l'Organe de la voix, a précifément le même objet, & l'Auteur fuit la même marche. Il décrit cet organe dans l'homme, dans un grand nombre de finges, dans les quadrupèdes des différens genres, dans les oifeaux, dans quelques reptiles, & il lui préfente une foule de variétés.

On voit dans plufieurs efpèces de finges, des poches membraneufes qui communiquent avec le larynx, & qui fe rempliffant & fe vidant d'air alternativement, fervent à former les cris de ces animaux. Le finge-hurleur, à qui la force de la voix a fait donner ce nom, a une poche offeufe; l'appareil fingulier de cet organe eft ici décrit pour la première fois. Les quadrupèdes digités approchent beaucoup plus de l'homme que la plupart des finges; car cet animal, qui au premier coup-

d'œil paroît si près de nous, s'en éloigne à mesure qu'un examen plus approfondi apprend à le mieux connoître. On distingue dans le larynx du chat deux membranes qui forment des vibrations lorsque l'on souffle dans la trachée-artère, & produisent alors un ronflement semblable à celui que les chats font entendre. Ainsi des membranes particulières au chat, deviennent l'organe de ce son aussi particulier à son espèce.

Dans le cochon, les ventricules de la glotte sont remplacées par plusieurs cavités recouvertes par un muscle. Dans l'âne & dans le mulet, le cartilage thyroïde a une cavité recouverte par une membrane. L'air qui est alternativement poussé dans ces cavités, & forcé d'en sortir, augmente la voix de ces animaux, & sert à la production des sons qui les caractérisent.

L'organe de la voix du phoque ressemble à celui des animaux à quatre pieds; à cet égard la chauve-souris, au contraire, semble se rapprocher des oiseaux; observation singulière, parce que le reste de sa conformation place cet animal dans la classe des quadrupèdes.

L'organe de la voix des oiseaux a une construction différente de celle du même organe dans les quadrupèdes: les oiseaux n'ont point d'épiglotte, mais leur glotte a la faculté de s'ouvrir & de se fermer. C'est la seule partie de l'organe qui soit à la partie supérieure du cou, le reste se trouve à la partie inférieure, au-dessus de la bifurcation des bronches; la pièce qui les divise, leurs membranes sont susceptibles de vibrations, & tiennent lieu des membranes auxquelles dans l'homme on a donné le nom de *cordes vocales.* Dans quelques espèces, la trachée-artère s'enfonce dans le sternum; dans d'autres elle s'étend en-dehors des deux côtés de cette partie. Cette disposition semble être analogue à celle des poches osseuses, des grandes cavités qu'on observe dans certains quadrupèdes, & elle est vraisemblablement destinée aussi à donner plus de force à la voix de ces oiseaux. Mais ceux dont le chant est varié, agréable, ont un organe très-simple, tout cet appareil n'existe point chez eux. Il sert à la

force de l'organe, mais non à ſa variété ou à ſon agrément. Il eſt utile aux eſpèces, qui par leur manière de vivre, ont beſoin de s'avertir de loin, & dont la langue ſe borne à un petit nombre de cris. En général, l'organe de la voix, comme celui de l'ouïe, eſt d'autant plus parfait qu'il eſt plus ſimple.

On retrouve les cordes vocales dans la grenouille & les animaux de ce genre, mais ils n'ont pas d'épiglotte.

La glotte dans les reptiles paroît être la ſeule partie de l'organe ſonore qu'ils aient conſervée, & leur voix ſe borne à un ſifflement ſourd;

M. Vicq-d'Azir conclut de cette longue ſuite d'obſervations:

1.° Que la glotte paroît inutile à la formation des ſons:

2.° Que ce ſont les membranes inférieures du larynx dans l'homme & dans les quadrupèdes, remplacées dans les oiſeaux par les membranes élaſtiques des bronches, qui ſont le véritable organe de la voix, puiſqu'elles ſont les ſeules parties ſuſceptibles de vibration:

3.° Enfin, que les poches oſſeuſes, les cavités, les ſinuoſités monſtrueuſes de la trachée-artère, obſervées dans un ſi grand nombre d'eſpèces, ne ſervent qu'à donner au ſon une intenſité plus grande encore, ſans influer ſur l'intonation.

Cependant il ne donne ces concluſions que comme de ſimples vues, & il ſe propoſe de les vérifier par une ſuite d'expériences ſur les organes de la voix de différentes eſpèces d'animaux.

En effet, il a ici un avantage qui manque à ſes recherches ſur l'ouïe, celui de pouvoir s'aſſurer, par l'expérience, de l'uſage de chaque partie, & il n'eſt jamais permis dans les Sciences phyſiques de s'en rapporter à l'analogie, que lorſqu'on ne peut conſtater les faits par des obſervations directes, comme on ne doit employer le calcul des probabilités, & chercher la vraiſemblance de ce qui peut être que dans les cas où il ne nous eſt pas donné de ſavoir ce qui eſt.

L'analogie eſt utile pour nous indiquer les faits qu'il faut chercher à vérifier, pour abréger les recherches, pour marquer la route qui doit nous conduire avec plus de vraiſemblance;

elle nous éclaire ſur le choix des méthodes ; mais ſi on la prend pour la méthode même, ſi on veut la regarder comme une preuve, lorſqu'elle ne doit ſervir qu'à indiquer les vérités qui reſtent à prouver, on riſque de s'égarer, de ſubſtituer des ſonges aux véritables loix de la Nature, & de créer un monde imaginaire, au lieu de perfectionner la connoiſſance de celui qui exiſte.

C'eſt ce que M. Vicq d'Azir a ſenti, & ce qui le rend ſi réſervé dans ſes concluſions, lors même que l'analogie la plus forte ſemble ne pas permettre le doute ; & cette réſerve eſt, dans les Sciences naturelles, le caractère le plus certain du véritable talent.

SUR UN

ÉTRANGLEMENT DES INTESTINS.

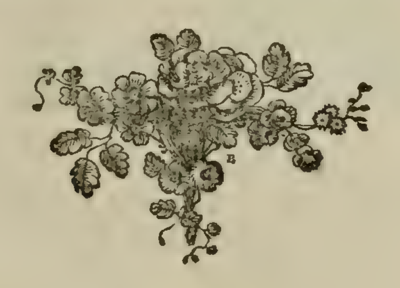
V. les Mém. p. 314.

PARMI cette foule de maux ſans nombre, à laquelle notre organiſation nous expoſe, il en eſt qui, inacceſſibles aux ſecours ou même aux obſervations de l'Art, nous condamnent à une mort lente, dont il n'eſt poſſible ni de retarder l'époque, ni de prévoir la cauſe. Telle eſt une maladie ſingulière, dont M. Bordenave rend compte dans ce Mémoire : le malade mourut après dix-huit jours de coliques continuelles & douloureuſes. L'ouverture du cadavre fit voir l'épiploon roulé, reſſerré ſur lui-même, adhérent au péritoine ; au-deſſus de l'os pubis l'ileon adhéroit à une poche qui s'étoit formée dans le péritoine ; il s'y étoit introduit, & il étoit étranglé à ſon entrée dans cette poche. M. Bordenave conjecture que quelque effort, auxquels les travaux habituels du malade l'expoſoient, ou quelque coup qu'il avoit reçu, avoit diſtendu le péritoine, & cauſé la formation de cette poche ; cette formation pouvoit être ancienne, & le malade éprouvoit depuis long-temps des douleurs lorſqu'il ſe couchoit ſur le côté gauche : une cauſe d'inflammation aura produit l'étranglement que la diſpoſition particulière des inteſtins favoriſoit,

&

& les accidens qui ont terminé la vie du malade en ont été les suites nécessaires.

De telles observations sont utiles, quoiqu'elles n'apprennent ni les moyens de remédier au mal, ni même ceux d'en reconnoître la nature : c'est en rassemblant ces faits isolés, que présente l'histoire des ouvertures de cadavres, que l'on peut seulement espérer de connoître un jour les symptômes extérieurs de ces vices accidentels de l'intérieur. Eh, qui peut répondre que l'on ne trouvera pas même, ou le moyen de réparer ces désordres, ou ceux de prévenir les suites funestes qu'ils peuvent produire ? Ceux qui cultivent les Sciences d'observations, ceux sur-tout qui veulent les juger, ne doivent jamais perdre de vue, que si nos connoissances sont encore peu étendues, un siècle & demi, seul espace des temps connu, où les Sciences ont été cultivées de suite & dans un grand espace, n'est aussi qu'un instant par rapport à la durée de notre espèce; qu'ainsi, tout ce que nous savons, n'est rien en comparaison de ce que l'esprit humain peut embrasser, & que les choses qui nous paroissent aujourd'hui possibles, ne sont qu'une foible partie de ce que le temps & le génie peuvent nous mettre en état de tenter un jour avec succès.





MINÉRALOGIE.

SUR LA TERRE JAUNE DU BERRI.

V. les Mém. p. 310.

LA Terre bolaire jaune du Berri se trouve principalement dans la paroisse de Saint-George ; les couches de cette terre, leur disposition, la nature de celles qui les recouvrent, ont été décrites par M. le Monnier. M. Sage l'a soumise à l'Analyse chimique ; & il a trouvé qu'elle contenoit par quintal dix livres d'eau acidule, quarante de chaux de fer, & cinquante de terre argileuse non colorée.

C'est de cette terre jaune que l'on tire le rouge connu dans le Commerce, sous le nom de *rouge de Prusse* ou d'*Angleterre*, & que l'on emploie principalement à mettre en couleur les carreaux des appartemens, à polir les verres, à peindre des papiers. Les Hollandois achetent cette terre en Berri trente-huit à quarante sous le quintal, & après qu'ils lui ont fait prendre la couleur rouge, ils la mettent dans le Commerce où elle vaut, suivant l'intensité du rouge qu'elle donne, de vingt-cinq à quarante-huit livres. On connoissoit depuis long-temps le profit que les Hollandois font sur cette terre, mais on ignoroit la préparation qu'ils lui faisoient subir ; M. Sage n'a pas eu de peine à la deviner, & l'expérience lui a confirmé qu'il suffisoit de la calciner. Il entre dans son Mémoire, dans le détail des moyens de faire cette opération d'une manière sûre & assez simple pour être employée dans un travail en grand par des Ouvriers ordinaires.

Il faut espérer que d'après la publication de ce Mémoire,

on établira quelques Manufactures de ce genre, qui diminueront le prix de cette terre, & qui éviteront la dépenſe abſolument en pure perte de ſon tranſport en Hollande & de ſon retour en France.

L'ignorance du commun des hommes a été depuis long-temps, pour ceux qui ne la partageoient qu'en partie, une mine plus féconde que celles du Pérou & de Golconde; elle eſt encore, elle ſera long-temps bien riche; mais ceux dont les vues & les ſentimens embraſſent toute l'eſpèce humaine, voient avec conſolation que pluſieurs branches de cette mine, qui, peut-être, n'étoient pas les moins abondantes, commencent à s'épuiſer.

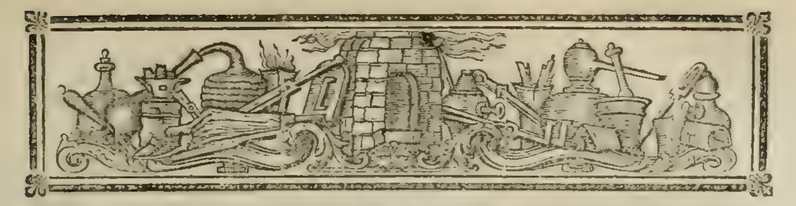


OBSERVATION D'HISTOIRE NATURELLE.

ON a observé dans plusieurs parties de la France, comme à Saint-Maur en Touraine, à Fleuri-la-rivière, & à Courtagnon en Champagne, à Chaumont dans le Vexin françois, à Stors près l'île Adam, de vastes amas de coquilles; ceux de Touraine sont les plus anciennement connus, on les nomme *falunières*, & les coquilles étant devenues très-friables, sont employées comme la marne, & à peu-près dans les mêmes vues. Il ne faut pas confondre ces amas de coquilles avec les moules, les empreintes de coquillages qu'on rencontre dans les pierres calcaires, & dont elles paroissent quelquefois composées presque en entier.

Dans les pierres calcaires les coquilles ont été détruites, & il ne reste d'autres vestiges de leur existence, qu'une terre qui s'est moulée dans leur intérieur, & qui en a conservé l'empreinte: ici au contraire, la coquille même est plus ou moins conservée, ce qui semble indiquer que ces dépôts sont moins anciens, ou qu'ils n'ont pas éprouvé la même action de la part des eaux. Il est important de multiplier les observations de ce genre; ce n'est que par une connoissance exacte & détaillée du Globe, qu'on peut parvenir à se former une idée des révolutions qu'il a éprouvées, des causes des changemens qu'on y observe, & des loix suivant lesquelles ces causes ont agi.

M. Morand a découvert, il y a quelques années, un de ces bancs au-dessus de Louvres en Parisis, à droite du grand chemin de Paris à Compiegne, près d'une Commanderie de Saint-Lazare, nommée *Guépel:* ce banc forme une butte qui a été coupée pour aplanir le grand chemin: les coquilles y sont très-abondantes, & des mêmes familles que celles qui forment la montagne de Courtagnon. Il n'est peut-être pas inutile de remarquer que ces deux endroits sont également placés dans le bassin de la Seine.



CHIMIE.

SUR LA PLATINE.

LE ſuccès avec lequel M. le comte de Sickingen eſt parvenu à rendre la Platine ductile, & à en former des lingots, a rappelé vers cette ſubſtance métallique les regards des Chimiſtes, qui ſembloient l'avoir négligée depuis quelque temps. V. les Mém. pages 337, 385 & 545.

M. Tillet, qui s'eſt occupé de l'art des Eſſais, avec plus de ſuite & de ſuccès qu'aucun des Chimiſtes dont il a été précédé ou ſuivi dans cette carrière, a voulu conſidérer cette ſubſtance ſous ce même point de vue. Comme la coupellation qui ſépare les autres métaux de l'or & de l'argent laiſſe la platine mêlée avec eux, il y avoit trois eſpèces d'alliages à examiner, celui d'or & de platine, celui d'argent & de platine, celui des trois métaux réunis.

On ſavoit ſéparer l'or de la platine, & ce ſont par conſéquent les deux autres alliages qui ſont devenus l'objet des travaux de M. Tillet.

Si on ſoumet à l'opération du départ un cornet d'une partie de platine, de 11 parties d'or, & de 36 grains d'argent, elle ſe fait préciſément comme s'il n'y avoit point de platine, c'eſt-à-dire que l'on trouve un cornet d'or pur, que la liqueur du matras eſt tranſparente, & qu'ainſi, l'acide nitreux tient en même temps en diſſolution l'argent & la platine: on obſerve ſeulement preſque toujours une petite ſurcharge dans le cornet d'or, ſurcharge qui cependant n'équivaut pas à beaucoup

près à la quantité de platine employée. M. Tillet a obſervé que cette ſurcharge étoit dûe non à ce qu'une partie de la platine combinée avec l'or, échappoit à l'action de l'acide, mais ſeulement à ce que quelques portions de platine, au lieu de s'unir avec l'or dans la fuſion, étoient demeurées intactes, & parce que l'acide nitreux n'a point d'action ſur la platine ſeule: une ſeconde opération débarraſſeroit complètement l'or de cette ſurcharge.

Si la platine eſt alliée avec de l'argent ſeulement, alors elle n'eſt plus diſſoluble dans l'acide nitreux, du moins la liqueur prend une couleur brune, opaque, & il ſe précipite, mais avec une grande lenteur, une poudre noire très-fine & très-légère; la diſſolution même après ce dépôt, eſt encore trouble, & contient une petite quantité de platine, plutôt ſuſpendue que diſſoute.

Lorſqu'en expoſant à l'action de l'acide nitreux, un cornet d'or, d'argent & de platine, on s'eſt procuré cette diſſolution dans un état de limpidité parfaite, ſi on emploie, pour en précipiter l'argent & la platine, une plaque de cuivre, comme dans les travaux en grand des Affinages, cette plaque de cuivre ſe couvre alors d'une criſtalliſation feuilletée & brillante: ces feuillets triangulaires ſont d'une extrême fineſſe & d'une grande légèreté; peu-à-peu il ſe dépoſe une poudre brune qui les ternit & qui les affaiſſe: en formant de tout ce précipité un lingot par la fuſion, & cherchant à le diſſoudre dans l'acide nitreux, il reſte un précipité beaucoup plus petit qu'il le devroit être, ſi l'on ſuppoſoit que toute la platine de la diſſolution qu'on a précipitée eût exiſté dans le lingot. En effet, M. Tillet, en diſſolvant dans de l'acide nitreux le précipité, tel qu'il l'avoit obtenu, chargé d'une poudre brune a eu un réſidu beaucoup plus fort: cette poudre brune, qui doit ſon origine à la platine, a donc diſparu par la fuſion, ce n'étoit donc point de la platine pure, mais une ſubſtance qui devoit ſon origine à ce métal. L'acide nitreux peut donc en quelque ſorte décompoſer, altérer ce métal, ſur lequel il n'a aucune action quand ces

deux ſubſtances ſont préſentées l'une à l'autre ſans mélange; tandis que le cuivre ſur lequel l'acide nitreux a une action ſi vive, peut reprendre, preſque tout entier, ſa forme métallique.

La criſtalliſation du précipité d'argent, lorſque l'acide nitreux contient en même-temps de la platine en diſſolution, eſt un phénomène bien remarquable, & il n'a pas lieu ſeulement dans ce cas; M. Tillet a obſervé encore que les boutons, les lingots d'argent, alliés d'un dixième de platine, ont, en ſe refroidiſſant, à leur ſurface, des eſpèces d'herboriſations formées par des criſtaux pyramidaux, qui ont beaucoup de rapport avec les criſtaux d'argent qu'il a obtenus par la méthode employée par M. Rouelle, pour avoir des criſtaux de ſoufre. Mais cette même criſtalliſation n'eſt ſenſible ni ſur les lingots ni ſur les boutons d'argent pur: comment ce mélange d'une petite quantité de platine produit-il cet effet? C'eſt une de ces queſtions ſur leſquelles il n'eſt point même permis encore de former des conjectures.

Il étoit poſſible que ces précipités d'une poudre noire & légère, ſéparés de la platine, & réunis avec ce qui pouvoit être reſté dans les ſcories, reſtituaſſent la quantité de platine qui étoit perdue, & qu'il ne reſtât plus rien de remarquable que l'exiſtence d'un précipité ſi léger, produit par un métal ſi peſant. M. Tillet a tenté cette expérience, & il n'a pu retirer des ſcories que cette même poudre noire, & point de platine.

Toute la platine diſſoute par l'acide nitreux n'eſt pas détruite; ſi on précipite l'argent par l'acide marin, qu'on ait par ce moyen une diſſolution de platine par l'eau régale, & qu'on retire cette platine du réſidu de cette diſſolution, en l'alliant avec du cuivre, le culot de cuivre, ſoumis à l'action de l'eau-forte, laiſſe de la platine dans l'état métallique; mais dans cette opération, l'eau-forte en diſſout encore une partie, qui ne ſe retrouve plus que ſous la forme de poudre noire.

Cette même opération préſente encore un phénomène bien ſingulier; ſi on ſoumet à l'action de l'acide nitreux une

petite lame de cuivre & de platine, où ces métaux soient dans la proportion de 1 à 28, il reste une petite lame de platine semblable à la lame de cuivre & de platine, mais seulement diminuée dans les deux dimensions, & cette petite lame ne prend aucune retraite par le recuit. On sait qu'au contraire, les cornets d'or, dans l'opération du départ, ne subsistent entiers qu'avec une proportion d'argent beaucoup moindre que ne l'est celle de cuivre dans ces expériences, ne diminuent pas de grandeur pendant cette opération, ce qui est vraisemblablement la raison pour laquelle ils ne peuvent subsister lorsque la proportion d'argent est trop foible; qu'enfin ils prennent au contraire de la consistance, & éprouvent une retraite considérable par le recuit. Ce phénomène étoit donc si éloigné de ceux que présentent toutes les opérations semblables, connues jusqu'ici, qu'il méritoit d'être constaté par des expériences très-précises, & c'est ce qu'a fait M. Tillet; il a trouvé qu'une lame de quatre-vingt-douze parties de longueur sur quarante-cinq de largeur, en avoit perdu cinquante-deux sur la longueur, & dix-huit sur la largeur, & il s'est assuré, par l'inspection de la petite lame, que ses bords avoient conservé les mêmes tranchans, les mêmes bavures que la lame de cuivre coupée avec des ciseaux; c'est donc à la retraite de la platine, lorsque le cuivre l'abandonne, & non à la destruction d'une partie de la lame, qu'il faut attribuer ce phénomène.

Il résulte de ces expériences de M. Tillet, faites sur de la platine déjà purifiée & rendue ductile, que ce métal, qui, par sa pesanteur spécifique, son inaltérabilité, à quelques égards, approche beaucoup de l'or, est bien éloigné cependant de pouvoir être regardé comme un métal parfait, puisque l'acide nitreux en sépare une poudre noire, qui n'a aucune propriété métallique, & qui paroît irréductible jusqu'ici. La platine, dont on a séparé cette poudre noire, en fournit encore, & à peu-près dans la même proportion, si on lui fait subir une seconde fois les mêmes épreuves: c'est donc une véritable décomposition du métal même. Les

expériences

expériences de M. le comte de Sickingen semblent confirmer le même phénomène; lorsque, pour avoir les précipités de platine que l'on cherche à réduire, on emploie de l'alkali fixe, la perte de la platine est plus forte; M. Tillet attribue cet excès de perte à l'action déjà connue de l'alkali fixe sur la platine.

Il a examiné enfin dans ce Mémoire, l'action de l'acide marin sur la platine & sur les précipités de platine: l'action de l'acide marin sur les précipités de platine est très-foible; sur-tout lorsqu'ils ont été recuits: mais l'acide marin, distillé sur la manganèse, agit avec force sur ces précipités, quoiqu'un peu moins, après le recuit: la dissolution qu'on obtient alors, est limpide, & ne laisse rien précipiter; cependant, le même acide n'attaque que d'une manière très-peu sensible les lames de platine ductile, il ne leur fait pas même perdre le brillant que leur donne le laminoir, tandis qu'il corrode la surface d'une lame d'or, & lui enlève le brillant métallique.

L'acide, pour acquérir cette propriété d'attaquer l'or & les précipités de platine, doit avoir été distillé sur la manganèse, & avoir eu d'avance un degré de pureté, tel qu'il passe dans la dissolution sans couleur, & ayant une odeur douce & agréable; dans cet état même, il doit toute son action à son mélange avec l'acide vitriolique qu'on est obligé d'employer à la fin de sa distillation sur la manganèse, pour avoir l'acide marin concentré: la réunion de toutes ces conditions est nécessaire. M. Tillet s'est assuré que celui qui dissout les précipités de platine, contient de l'acide vitriolique, & que celui qui, ne contenant pas d'acide vitriolique, n'agit ni sur ces précipités, ni sur l'or, acquiert cette propriété, lorsqu'il est mêlé avec de l'huile de vitriol concentrée, & enfin qu'il faut que la proportion des deux acides soit entre de certaines bornes, pour que cette action ait lieu.

L'acide marin, distillé sur la manganèse, paroît donc ici le vrai dissolvant des précipités de platine, & même de l'or, quoiqu'il ne puisse agir que lorsqu'il est mêlé avec l'acide vitriolique; comme l'acide marin ordinaire n'agit sur ces mêmes substances que lorsqu'il est mêlé avec l'acide nitreux,

Quelques Chimiſtes célèbres ont avancé que, dans ces expériences, un ſeul des acides étoit vraiment diſſolvant, que celui qu'on mêloit avec le premier, ne ſervoit qu'à donner à ce premier le degré de pureté & de force néceſſaire à ſon action; cependant, le ſel formé par la combinaiſon de l'eau régale & de l'or, contient les deux acides intimément unis tous deux avec l'or, & cette obſervation eſt une objection très-forte contre cette opinion qui n'eſt fondée juſqu'ici, que ſur une théorie très-bien combinée, mais qui ne peut être prouvée que par des expériences directes.

SUR LES

SELS DES CENDRES DE TAMARIS.

V. les Mém. p. 497.

ON a obſervé, il y a long-temps, que les cendres de Tamaris ne donnent point d'alkali fixe développé, & ſeulement des ſels vitrioliques; mais ce qu'on n'avoit pas encore remarqué, c'eſt que ce ſel vitriolique eſt preſque entièrement du ſel de Glauber, ſi la plante a crû ſur le bord de la mer, qu'en s'éloignant de ſes bords, la quantité de ſel de tartre vitriolé devient de plus en plus grande, que ſi enfin le tamaris a été pris dans un terrein éloigné de la mer, il ne préſente plus aucun veſtige de ſel de Glauber.

Cette obſervation de M. Cornette eſt analogue à celle qu'a faite M. Cadet, ſur les cendres du kali recueilli à Denainvilliers, qui, après quelques années, n'ont plus donné que de l'alkali végétal.

Nous croyons devoir annoncer ici, que ce réſultat eſt abſolument conforme à ce qu'a obſervé M. Deſlandes, Directeur de la manufacture des Glaces de Saint-Gobin, qui, depuis pluſieurs années, a ſuivi ces expériences avec beaucoup de ſoin, & les a faites très en grand.

Ce phénomène eſt ſans doute bien digne de remarque, & il ſeroit intéreſſant d'examiner, ſi c'eſt à l'air des bords de la mer, ou aux parties de ſel marin, répandues dans

les terres voiſines, que l'on doit l'exiſtence de l'alkali minéral dans les cendres des plantes: juſqu'ici il paroîtroit que l'air devroit en être l'origine; en effet, la terre des pays éloignés de la mer, ne paroît pas contenir d'alkali; les cendres des plantes venues dans l'eau, en contiennent, du moins n'a-t-on pas obſervé le contraire, & l'eau ne renferme point d'alkali: ce ſel ſe forme donc dans la végétation. Mais, ſi c'eſt à la différence de l'air, qu'eſt dûe celle des alkalis, quelle eſt l'eſpèce de fluide aëriforme, qui diſtingue l'air des bords de la mer, de celui de l'intérieur des terres, & qui produit ce changement d'alkali végétal, en alkali marin?

Il eſt facile de s'aſſurer de ce fait, par des expériences directes; mais ſi le végétal, produit par des graines recueillies ſur les bords de la mer, donne encore de l'alkali marin, quoique ſemé dans l'intérieur des terres, s'il faut pluſieurs générations de plantes, pour produire cette métamorphoſe, combien le phénomène devient-il plus difficile à analyſer? Les changemens produits par la végétation, dans les élémens des corps, doivent ſans doute devenir un jour, une branche de l'analyſe chimique, & ce ne ſera point une des moins utiles, ni des moins propres à nous faire pénétrer un peu plus avant, dans les ſecrets de la Nature.

On emploie les cendres de tamaris, pour décompoſer l'eau-mère du ſalpêtre, & en retirer du nitre. Il eſt aiſé de voir que le choix du lieu où croît cette plante, n'eſt pas indifférent. Le tamaris des bords de la mer, donneroit beaucoup plus de nitre quadrangulaire, celui des terres ne donneroit au contraire que du véritable ſalpêtre.

SUR LE VITRIOL DE MERCURE.

QUELQUES Chimiſtes avoient annoncé que le vitriol de Mercure ſe décompoſoit, au lieu de ſe ſublimer, & que le métal paſſoit dans la diſtillation, ſéparé de l'acide, & ſous V. les Mém. p. 485.

la forme de mercure coulant : M. Cornette a trouvé, en répétant cette expérience, un résultat différent ; il s'est sublimé une grande quantité du vitriol mercuriel, & très-peu de mercure séparé de l'acide.

Ce mercure étoit sous la forme d'une poudre grise, & l'acide qui s'en étoit séparé, étoit décomposé de manière qu'il passoit séparément de l'air acide sulfureux, & une certaine quantité d'air vital : le premier de ces airs est miscible à l'eau & produit alors avec l'alkali fixe, le sel sulfureux de Stalh. Il faut remarquer que, lorsqu'on emploie pour faire le vitriol de mercure, non le mercure coulant, mais une chaux de mercure qui, comme on sait, contient elle-même une certaine quantité d'air vital ; alors le vitriol de mercure se sublime en entier : cette différence paroît donc tenir à la présence de cet air, qui peut empêcher la décomposition de l'acide vitriolique, soit pendant la distillation, soit dans la formation du vitriol de mercure.

Ainsi, les phénomènes que présente la sublimation du vitriol de mercure, paroissent dépendre de l'action des substances aëriformes qui sont devenues un des élémens les plus importans des Analyses chimiques, & ont ajouté à cette Sçience un si grand degré de précision & d'étendue.

SUR LA DÉCOMPOSITION DES SELS VITRIOLIQUES ET NITREUX, PAR L'ACIDE MARIN.

V. les Mém. p. 487.

L'OBJET de ce Mémoire est d'examiner l'action de l'acide marin sur les sels vitrioliques & nitreux, à base métallique : M. Cornette a déjà montré dans d'autres Mémoires *(année 1778)* que cet acide décompose les Sels vitrioliques & nitreux à base d'alkali fixe & volatil, & il prouve ici qu'il a la même action sur ces sels, lorsque leur base est métallique.

Cette propriété étoit déjà connue pour les métaux blancs, tels que l'argent, le plomb, le mercure, le régule d'antimoine,

M. Cornette l'étend ici au cuivre, au fer, au zinc, au cobalt. Ces expériences deviennent très-difficiles, lorsque l'on opère sur des substances, dont l'eau régale est le dissolvant, parce qu'alors il est beaucoup plus difficile de séparer l'acide nitreux du métal, & qu'il en reste une partie qui se mêle à l'acide marin.

L'acide marin dans ce cas semble non-seulement décomposer tout le sel nitreux, mais s'unir même avec une partie de l'esprit de nitre, & attaquer le métal dans cet état de combinaison; car, en général, dans cette circonstance, les cristaux que l'on obtient paroissent homogènes, & renfermer dans chacun de leurs élémens les deux acides & leurs bases, & non être formés par l'agrégation des cristaux de deux sels, l'un nitreux & l'autre marin. Cependant, même dans ce cas, M. Cornette est parvenu à retirer du nitre de cobalt des cristaux, où l'acide marin se trouvoit seul; & il est en droit d'en conclure que l'acide marin décompose ces sels nitreux. D'ailleurs, un grand nombre d'expériences semblent indiquer que dans l'action de l'eau régale, c'est l'acide marin qui est vraiment le principe actif; ainsi, quand même on ne pourroit séparer l'acide nitreux en entier de sa base, la supériorité de l'action de l'acide marin paroîtroit encore avoir en sa faveur une très-grande probabilité.

SUR

L'HUILE DE VITRIOL GLACIALE.

Si l'on distille sur du charbon un mélange d'acide vitriolique & d'acide nitreux, il monte à la fin de la dissolution un sel concret qui est l'acide vitriolique sous forme solide, l'huile de vitriol glaciale. L'acide vitriolique pur distillé sur du charbon, ne produit point le même effet, non plus que la distillation d'un mélange d'acide nitreux & d'acide vitriolique. V. les Mém. p. 479.

Ce phénomène observé par M. Cornette, a une grande analogie avec plusieurs faits découverts par les Chimistes

modernes, on ſait que c'eſt en diſtillant de l'acide nitreux ſur du ſucre, ſur des gommes, ſur de la ſoie, qu'on parvient à ſéparer de ces ſubſtances un acide concret. Toutes ces matières contiennent du phlogiſtique comme le charbon, toutes agiſſent ſur l'acide nitreux & le décompoſent en partie; ainſi le fait que contient ce Mémoire, n'eſt pas un fait iſolé: il ſe lie avec ceux qu'ont obſervés les autres Chimiſtes, & on doit le regarder comme une obſervation bien propre à nous éclairer ſur la formation de ces acides concrets, inconnus il y a quelques années; mais qui placés dans un très-grand nombre de ſubſtances végétales & animales, deviennent un des objets les plus importans de l'analyſe chimique. En effet, l'obſervation de M. Cornette ſemble indiquer que ces acides concrets n'exiſtent point tout formés dans les ſubſtances qui les produiſent, mais qu'ils doivent leur formation, ou du moins leur forme concrète, à la décompoſition de l'acide nitreux & d'une partie du phlogiſtique de ces ſubſtances.





ARITHMÉTIQUE POLITIQUE.

SUR LA POPULATION DE LA FRANCE.

L'EUROPE eſt-elle plus peuplée aujourd'hui qu'elle ne l'étoit du temps de la République Romaine, ou ſous les Empereurs? Sa population eſt-elle augmentée ou diminuée depuis un demi-ſiècle? Ces deux queſtions ont été agitées de nos jours par des Philoſophes, par des Politiques, par des Calculateurs.

V. les Mém. p. 459.

Monteſquieu & Wallace ont ſoutenu que l'eſpèce humaine avoit diminué depuis les temps que nous nommons *anciens*. Hume & Voltaire ont ſoutenu le contraire; & l'on trouve, pour ou contre l'augmentation de la population en Europe, depuis le commencement de ce ſiècle, des autorités preſque égales en poids & en nombre. L'objet qu'embraſſe M. Morand, n'eſt pas ſi vaſte; il n'examine que la population de la France, & en cela il a raiſon; tout ce qui dépend des connoiſſances de détail ne peut être ni bien exact ni bien certain, que lorſqu'il eſt l'ouvrage d'un habitant du pays même qu'on cherche à faire connoître; & il échappe ſouvent des erreurs groſſières aux hommes les plus éclairés, lorſqu'ils parlent d'un autre pays que le leur.

M. Morand, d'après un examen critique des différens Auteurs qui ſe ſont occupés de la population de la France, croit pouvoir conclure qu'elle a conſidérablement augmenté depuis quarante ans, qu'en général la fécondité y eſt plus grande & la mortalité moindre; & après avoir lû ſon ouvrage il eſt difficile de ne point avoir la même opinion.

Mais, dira-t-on, comment ce réſultat peut-il s'accorder

avec les progrès du luxe, la corruption des mœurs dans la capitale, l'augmentation de la misère dans les provinces?

On pourroit répondre que la population s'accroît ou diminue en même temps que la quantité des subsistances; qu'il est plus aisé de comparer avec quelque précision l'état de la culture d'un pays, ou sa population dans deux époques, que le plus ou le moins d'aisance de ses habitans. Or, on ne peut nier que l'agriculture n'ait fait des progrès, les prairies artificielles se sont multipliées, la culture des pommes de terre s'est répandue de nos jours dans plusieurs provinces, ainsi le raisonnement est ici d'accord avec l'observation; & l'on voit que la population s'est accrue & qu'elle a dû s'accroître. D'ailleurs, la classe du peuple qui vit de son travail, a plus d'aisance; il suffit, pour s'en assurer, d'observer l'augmentation de la consommation de viande dans les bourgs & dans les villages, de comparer les logemens des habitans des campagnes, leurs habillemens, avec ce qu'ils étoient il y a un demi-siècle; on peut observer aussi, que le commerce & l'industrie ont fait de grands progrès, qu'ils jouissent en général d'une plus grande liberté; que les loix fiscales sont exécutées avec moins de rigueur, quoique les revenus du fisc soient augmentés. Tous ces changemens n'auroient pu se faire si la misère n'étoit pas diminuée, & la diminution de la misère en est à la fois la cause & l'effet.

Il est difficile d'avoir une mesure bien juste de la corruption des mœurs dans chaque siècle, & particulièrement de celle dont il s'agit ici, de la débauche, qui n'est point, peut-être, la corruption de mœurs la plus nuisible, mais celle qui a un effet le plus direct sur la population. Si cependant on veut comparer ce que nous connoissons de nos mœurs, avec ce que les Mémoires particuliers, les Lettres, la tradition nous apprennent des mœurs des générations qui nous ont précédés, cette comparaison sera à notre avantage. On observera sur-tout deux points, dont la réunion nous paroît décisive; 1.° que les mauvaises mœurs sont moins grossières & moins scandaleuses; 2.° que l'hypocrisie de mœurs est plus rare. Or, si nous montrons moins de corruption,

& si

& si nous cachons moins celle que nous avons, comment pourra-t-elle être augmentée? cette franchise dans nos mœurs, qui a souvent déterminé à prononcer contre nous, devoit au contraire être une raison en notre faveur; on affichoit jadis des principes plus austères & on ne les suivoit pas; nous en annonçons de plus faciles, mais nous nous en écartons moins; notre indulgence tient plus à l'humanité qu'à la corruption.

Le seul fait qui semble prouver quelque chose contre nous, est l'augmentation du nombre des Enfans-trouvés; mais qu'on daigne examiner si cette augmentation n'est pas l'effet des vues d'humanité, de sagesse, qui ont facilité l'accès de ces asiles, supprimé toutes les recherches, tous les obstacles qui en écartoient autrefois; qui les ont ouverts aux victimes de la misère comme à celles de la honte; qui ont procuré à des cantons éloignés les moyens de profiter de ces secours. Le temps où plus de foiblesses sont dévoilées, ne vaut-il pas mieux que celui où l'austérité, en effrayant les coupables, multiplioit les crimes secrets.

On a cité aussi comme une preuve des progrès de la misère & de ceux de la débauche, la diminution de la taille des hommes, diminution très-réelle, du moins dans quelques cantons; mais cette diminution n'a-t-elle pas une autre cause? l'énorme perte d'hommes d'une grande taille, que la guerre enlève, perte qui loin de se réparer, s'accroît même pendant la paix, parce que les Soldats sont presque tous célibataires. Leur nombre n'est pas assez grand pour nuire à la population générale, pour l'empêcher de se proportionner à la quantité des subsistances, ou pour diminuer cette quantité; mais le rapport de leur nombre à celui des hommes d'une taille élevée, est assez grand pour avoir une influence très-sensible. Les Soldats mariés cependant déserteroient moins, seroient plus sages, plus honnêtes, & moins livrés à l'ivrognerie, à la débauche, à l'oisiveté, mais il faut avouer aussi qu'ils seroient moins lestes.

L'augmentation du luxe ne peut être regardée comme nuisible à la population, que dans le cas où elle diminueroit

le nombre des mariages, ou ſeroit un obſtacle à leur fécondité; en effet, le luxe en général eſt la ſuite néceſſaire de l'inégalité des fortunes, celui de nos jours, plus utile à l'induſtrie, eſt moins funeſte que le faſte auquel il a ſuccédé, & l'inégalité des fortunes a ſûrement diminué. Or il eſt aſſez difficile de ſavoir ſi le nombre des hommes que la crainte d'avoir à diminuer leur dépenſe, retient dans le célibat, ou empêche d'augmenter leur famille, eſt plus grand qu'il ne l'a été; mais cette différence, ſûrement beaucoup plus petite qu'on ne le croit, ne peut regarder que des claſſes très-peu nombreuſes, & n'eſt qu'un objet inſenſible dans la population d'un grand État; l'effet en diſparoît néceſſairement, en comparaiſon de l'augmentation de population que celui de la culture & des ſubſiſtances a dû produire.

C'eſt dans des vues ſans doute très-reſpectables, qu'on cherche à nous faire croire que nos mœurs ſont dégénérées de celles de nos pères, afin de nous inſpirer une plus grande envie de nous corriger; qu'on déclame contre les progrès du luxe, dans l'eſpérance d'effrayer par la crainte de ſes ſuites funeſtes; qu'on exagère la misère des peuples, pour empêcher tout ce qui pourroit l'augmenter; mais nous oſons croire que la vérité ſeroit plus reſpectable encore & plus utile. Nous ſommes ſi loin de cette égalité de fortune qui peut détruire le luxe, de cette bonté de mœurs qui fait régner dans les familles de tous les états, la paix, la confiance, l'amour des devoirs; la misère préſente encore dans la capitale & dans les campagnes, un tableau trop déchirant pour que perſonne puiſſe croire qu'il n'y a rien à corriger: mais celui qui nous dit que nous avons déjà fait des progrès, que nous en ferons encore, n'eſt-il pas plus encourageant que le moraliſte, qui en nous préſentant nos maux comme aggravés ſans ceſſe par le temps, ſemble nous ôter tout eſpoir? Nous ſommes dans la décadence, voilà ce qu'un zèle outré nous répète. Nous devons faire nos efforts pour n'y point tomber, & malgré nos progrès, peut-être en ſommes-nous menacés, ſi nous ne ſommes attentifs à la

prévenir, voilà ce qu'il ſemble qu'un zèle plus éclairé doive nous faire entendre.

Les obſervations ſur la population de Paris en particulier, paroiſſent prouver que le nombre des naiſſances y ſurpaſſe conſtamment celui des morts; mais il n'en faudroit pas conclure une augmentation de population. On ne trouve point dans le nombre de ces morts, les enfans envoyés en nourrice & ſevrés dans les provinces, & le nombre eſt très-grand. D'un autre côté, plus de perſonnes viennent des provinces s'établir à Paris, qu'il ne retourne de Pariſiens dans les provinces; & par conſéquent la population pourroit être croiſſante quand même le nombre des morts ſurpaſſeroit celui des naiſſances. Pour bien juger cette queſtion, pour ſavoir ſi dans un lieu la mortalité augmente ou diminue, il faudroit ne faire ſes obſervations que ſur des Tables qui contiendroient les individus nés & morts dans le même lieu; cette précaution eſt néceſſaire toutes les fois qu'on veut tirer des Tables de mortalité, des conſéquences relatives à la ſalubrité de l'air, à la vie moyenne des habitans d'un pays, aux effets que la nourriture, les habitudes, la manière de vivre, les progrès de l'art de la Médecine, peuvent produire ſur la durée de la vie.





ANALYSE.

SUR LA THEORIE DES SUITES.

V. les Mém. p. 207.

LES Géomètres ne considérèrent d'abord la théorie des Suites, que comme un moyen d'obtenir une valeur approchée des quantités dont la valeur exacte, ou ne peut être assignée par les méthodes connues, ou se présente sous une forme trop compliquée : mais ils aperçurent bientôt, en examinant ces séries, que la considération de leur forme, celle de la loi que suivent leurs coëfficiens successifs, conduisoient à un grand nombre de vérités nouvelles, souvent utiles, ou du moins piquantes, par les espèces de paradoxes qu'elles sembloient offrir; en sorte que, depuis le siècle dernier, cette théorie est devenue une des branches les plus cultivées & les plus fécondes de l'analyse.

On sait qu'il existe nécessairement un rapport entre la somme d'une série, c'est-à-dire la fonction dont le développement a produit cette série, & son terme général, c'est-à-dire le coëfficient d'un terme qu'on suppose occuper dans la série, un rang quelconque : souvent il est difficile de trouver la somme d'une série dont on connoît le terme général, quelquefois il l'est même de trouver le terme général lorsque la somme de la série est connue, & sur-tout d'avoir l'expression de ce même terme, en supposant le rang qu'on lui suppose dans la série exprimée par un nombre quelconque, qui puisse n'être pa un entier. On a donné à cette dernière recherche le nom d'*interpolation*.

Si on considère plusieurs séries, & qu'il y ait une équation entre leurs termes généraux, il en existe une autre

entre leurs ſommes, & réciproquement; il eſt aiſé de voir que ces équations ne ſont pas du même genre, que les unes peuvent être faciles à réſoudre, tandis que les autres offriront des difficultés inſurmontables, & qu'ainſi, par exemple, on peut réduire la ſolution d'une équation entre les termes généraux de pluſieurs ſéries, à celle de l'équation entre les ſommes, & à la détermination du terme général d'une ſérie dont on connoît la ſomme; ce qui peut rendre le Problème beaucoup plus ſimple, ou donner pour ſa ſolution, des méthodes qu'une analyſe plus directe eût difficilement fait découvrir.

L'objet du Mémoire de M. de la Place, eſt de conſidérer les rapports de ces deux équations, l'une entre les termes généraux de différentes ſéries, l'autre entre les ſommes de ces mêmes ſéries, & de conſidérer les différens cas où la ſolution d'une de ces équations, donnant celle de l'autre, la fait dépendre de méthodes qu'il n'eût point été poſſible d'y employer immédiatement.

Il applique cette méthode générale à l'interpolation des ſuites, dans pluſieurs cas qui n'avoient point encore été conſidérés, à leur transformation, à l'examen de certains rapports ſinguliers entre différentes opérations de l'analyſe, comme entre la différentiation, l'extraction des racines, l'intégration & l'élévation aux puiſſances, à la théorie des différences partielles, pour pluſieurs deſquelles il trouve, par cette méthode, les intégrales exprimées par des fonctions qui renferment des intégrales définies, à l'examen de la loi de continuité, à laquelle les fonctions arbitraires de ces intégrales ſont aſſujetties, enfin à des équations ſingulières qui renferment des différences partielles, finies pour une variable, & infiniment petites pour l'autre.

Nous ſommes obligés de renvoyer au Mémoire même, pour le détail de ces diverſes recherches; il nous ſuffit d'avoir montré le principe de cette méthode, dont cette grande variété d'applications fait voir, en même temps, la fécondité & l'étendue.





ASTRONOMIE.

SUITE DES MÉTHODES ANALYTIQUES Pour résoudre les Problèmes Astronomiqes.

V. les Mém. p. 51.

UNE méthode analytique de calculer le mouvement des Comètes, devoit faire partie du grand travail de M. du Séjour, sur l'application de l'analyse à l'Astronomie, travail dont il s'occupe depuis long-temps, & dont les volumes de nos Mémoires, depuis 1764, ont tous renfermé quelque partie importante.

M. du Séjour a senti combien sa méthode deviendroit plus simple, s'il pouvoit séparer les équations qui servent à déterminer le plan de l'orbite de celles qui donnent la trajectoire, & il y est parvenu. Les trois distances de la Terre à la Comète, qu'on emploie alors, & dont on suppose que l'on connoît le rapport, doivent être prises à la vérité pour des points peu éloignés, ce qui est un désavantage; mais, pourvu que l'on ait une suite d'observations voisines entr'elles, l'auteur trouve le moyen d'avoir la position de l'orbite qui satisfait à trois observations, telles qu'on voudra les choisir dans le nombre de celles qu'on peut employer.

Le plan de l'orbite une fois connu, la détermination de la trajectoire, soit parabolique, soit elliptique, si les observations obligent ou plutôt permettent de la supposer telle, devient beaucoup plus facile.

Enfin, si la première méthode n'a point donné la position

de l'orbite avec aſſez de préciſion, M. du Séjour donne le moyen de réparer cette inexactitude, en même temps que l'on cherche à déterminer la trajectoire.

SUR LA PLANÈTE DE M. HERSCHEL.

DEPUIS la découverte des deux ſatellites de Saturne, par Dominique Caſſini, en 1684, l'Aſtronomie avoit ceſſé d'enrichir notre Ciel de nouveaux aſtres; car les Comètes, viſibles ſeulement dans une petite partie de leur cours, & ceſſant d'avoir par leur diſtance, aucune influence ſenſible ſur notre ſyſtème, ſemblent bien moins nous appartenir que les Planètes; ainſi les aſtres éclairés par le Soleil, & circulant autour de lui dans des ellipſes, étoient partagés en deux claſſes très-diſtinctes, l'une où la diſtance du foyer au centre eſt très-petite, l'autre où cette même diſtance eſt fort grande, par rapport à la diſtance du foyer, à l'extrémité de l'axe; c'eſt-à-dire à celledu Soleil à l'aſtre dans le périhélie V. les Mém. p. 526.

Le 13 Mars 1781, M. Herſchel, en obſervant à Bath avec un Téleſcope de ſept pieds conſtruit par lui-même, les étoiles des pieds des Gémeaux, en diſtingua une, que ſes apparences lui firent regarder comme une Comète; il mit à ſon téleſcope un oculaire qui augmentoit le groſſiſſement, & le diamètre de l'étoile parut augmenté; il ne douta plus que ſa conjecture ne fût fondée, il eut ſoin de déterminer, avec préciſion, le lieu du nouvel aſtre, & deux jours après, il eut le plaiſir de voir qu'il avoit changé de place. On regarda d'abord cet aſtre comme une Comète; mais bientôt, M. Lexell, célèbre Aſtronome de Péterſbourg, qui alors étoit à Londres, annonça qu'il avoit trouvé moyen de ſatisfaire à toutes les obſervations de cet aſtre, en ſuppoſant que ſon orbite eſt un cercle dont le rayon eſt dix-huit fois plus grand que celui de l'orbite terreſtre; ce qui donne par conſéquent à cet aſtre, une révolution d'environ quatre-vingt-deux ans: alors, des paraboles qui avoient depuis

quatorze juſqu'à quinze fois cette diſtance, pour diſtance de leur foyer au ſommet de l'axe, repréſentoient également bien les obſervations.

M. de la Lande, en cherchant à déterminer par trois obſervations cette orbite ſuppoſée circulaire, a trouvé un réſultat très-approchant de celui de M. Lexell. M.rs Proſperin & Klinkenberg ont eu des réſultats à peu-près ſemblables. Le temps qu'on a pu obſerver cette Planète, ne ſuffit point encore pour oſer décider ſi ſon orbite eſt réellement à très-peu-près circulaire: dans l'eſpace qu'elle a parcouru, & qui ne peut être que d'environ 6 degrés, on a découvert déjà quelques irrégularités. M. de la Lande, en comparant ſa théorie avec l'obſervation, a dreſſé une table des différences qui s'y trouvent; les différences ſont très-petites en elles-mêmes, mais elles ſont dans le même ſens. Nous devons donc nous borner à croire que l'hypothèſe circulaire doit repréſenter aſſez exactement, pendant quelque temps encore, le cours de cet aſtre, que ſon orbite a une excentricité ſenſible, & qu'il eſt encore impoſſible de la déterminer.

Nous n'avions juſqu'ici aucune Planète de notre ſyſtème, auſſi peu viſible, qui pût être confondue avec une Étoile de la ſeptième grandeur, & celle-ci n'eſt pas ſans doute la ſeule; il exiſte peut-être un grand nombre de corps céleſtes que nous découvrirons ſucceſſivement, à meſure que des obſervations, faites avec des inſtrumens plus parfaits, ſe multiplieront davantage.

Combien M. Herſchel, en portant les yeux des Aſtronomes vers les obſervations de ce genre, en leur montrant, par un examen aſſidu & ſcrupuleux du Ciel, un moyen de multiplier les découvertes, ne contribuera-t-il point à nous faire voir de nouveaux phénomènes, qu'il nous eſt impoſſible de prévoir? L'obſervation des petites Étoiles, que les Aſtronomes n'avoient juſqu'ici preſque jamais examinées, que relativement à l'utilité dont elles peuvent être, pour déterminer la poſition des Planètes, va devenir une des branches les plus curieuſes de l'Aſtronomie; & il eſt impoſſible que les

les travaux néceſſaires, pour nous aſſurer du nombre des petites Planètes viſibles aux téleſcopes, & comparables en grandeur aux petites Étoiles, ou pour en déterminer le cours, ne nous conduiſent pas à des connoiſſances ſur une foule de phénomènes céleſtes, à peine ſoupçonnés, ou encore abſolument inconnus.

SUR L'INCLINAISON DU TROISIÈME SATELLITE DE JUPITER, ET SUR LES ÉLÉMENS DE L'ORBITE DE VÉNUS.

DANS les temps où les Sciences ſont peu cultivées, elles s'arrêtent long-temps au même point, & un Traité complet ſur une Science particulière, peut ſervir pendant pluſieurs ſiècles, & devenir un dépôt où tous ceux qui veulent s'inſtruire, trouveront toutes les connoiſſances réunies. Il n'en eſt pas de même parmi nous, quelques années ſuffiſent pour qu'il ſoit néceſſaire d'ajouter de nouvelles théories à l'ouvrage le plus complet, pour qu'on ſoit obligé d'en perfectionner, d'en corriger quelques parties. V. les Mém. pages 438 & 447.

M. de la Lande a publié en 1771, la ſeconde édition de ſon Traité d'Aſtronomie, & les deux Mémoires qu'il donne dans ce volume, ont pour objet d'ajouter à l'exactitude de ſon Ouvrage, en déterminant des élémens de la théorie de Vénus & du troiſième ſatellite de Jupiter, qu'il n'étoit pas poſſible de donner alors avec la même préciſion.

On ſavoit que l'inclinaiſon du troiſième ſatellite de Jupiter, n'eſt pas conſtante, mais on ignoroit ſi l'augmentation obſervée dans cette inclinaiſon, devoit produire une équation ſéculaire, ou ſi elle étoit renfermée entre certaines limites.

L'opinion de M. de la Lande en 1771, étoit que cette inclinaiſon avoit été dans ſon *maximum* en 1763, où elle étoit de $3^d\ 26'$, tandis qu'elle n'avoit été que de 3^d en

1697, & qu'elle se retrouveroit à ce point de *minimum* en 1729.

De nouvelles observations des satellites de Jupiter, l'ont mis en état d'appuyer cette opinion sur des fondemens plus solides, il ne reste plus aucun doute que l'inclinaison du troisième Satellite n'ait commencé à diminuer. Ces mêmes observations lui ont montré que les équations empiriques de M. Wargentin, ne donnoient pas les variations de l'inclinaison du troisième Satellite, avec la même exactitude que l'hypothèse de M. Maraldi, qui consiste à supposer que la révolution des nœuds de l'orbite du troisième Satellite, rapportée à celle du second, est de cent trente-deux ans.

Dans le second Mémoire, M. de la Lande corrige les élémens de la théorie de Vénus, d'après de nouvelles observations des conjonctions inférieures de cette Planète, qu'il regarde comme les plus propres à donner des résultats certains & précis.

SUR LA CONSTELLATION DES PLÉÏADES, ET SUR L'OPPOSITION DE JUPITER, du 12 Mars 1779.

V. les Mém. p. 505.

M. Jeaurat donne ici, d'après des observations faites en 1779, la position de soixante-quatre Étoiles des Pléïades. Il compare avec les positions déterminées par M. Cassini, & M. l'abbé de la Caille, celles de six des sept principales Étoiles de cette Constellation, car la septième, connue sous le nom de *Pléïone*, paroît avoir un mouvement propre qui n'est point encore bien connu. Cette comparaison lui donne 24′ 25″ pour le mouvement des Étoiles en longitude en vingt-neuf ans, ce qui fait environ 5″ de plus en trente ans qu'on ne le suppose communément.

L'observation de l'opposition de Jupiter en 1779, a été faite dans des circonstances favorables, & avec beaucoup

d'exactitude. En la comparant aux Tables, M. Jeaurat trouve que celles de M. Cassini s'accordent le mieux avec l'observation, ensuite celles de M. Wargentin & de M. Jeaurat lui-même, qui à peine diffèrent entr'elles; celles de Halley sont les plus éloignées. Mais une observation isolée ne suffit pas pour juger du degré d'exactitude des différentes Tables, & M. Jeaurat remarque que pour d'autres observations de l'opposition de Jupiter, ses Tables & celles de M. Wargentin ont été plus conformes aux observations que celles de M. Cassini.

SUR LA COMÈTE de 1779.

CETTE Comète a été observée par M. Messier, depuis le 18 Janvier qu'il l'a découverte, jusqu'au 17 Mai; c'est la vingt-deuxième dont il ait suivi le cours, & la soixante-quatrième dont l'orbite ait été calculée. V. les Mém. p. 318.

Les élémens de l'orbite de celle-ci ont été déterminés séparément par M.rs de Saron, d'Angos, Méchain & Reggio; d'après des observations différentes, ils s'accordent entr'eux avec beaucoup de précision, & l'orbite calculée diffère très-peu des observations.

M. Messier joint à son Mémoire la détermination de deux cents soixante-onze Étoiles, auxquelles il a rapporté les positions de la Comète, & il le termine par un compte détaillé des observations de la même Comète, faites dans différentes parties de l'Europe.

SUR LA LONGITUDE DE LA NOUVELLE ZEMBLE.

LES Hollandois ont déterminé en 1597, la longitude de la nouvelle Zemble, d'après une conjonction de la Lune & de Jupiter, observée le 24 Janvier. L'exactitude de cette V. les Mém. p. 381.

détermination peut être affectée, soit par l'erreur des Tables astronomiques, soit par celle de l'heure à laquelle les Hollandois ont fait l'observation. M. le Monnier prouve ici, que si on suit les Tables des Institutions astronomiques, il n'y a point une erreur sensible dans la détermination des Hollandois, qu'en prenant celles de Mayer, l'erreur peut être d'un degré tout au plus; mais que l'incertitude de l'heure en produit une d'environ cinq degrés sur la longitude de cette partie de la nouvelle Zemble.

SUR UNE

NOUVELLE ESPÈCE DE LUNETTE.

V. les Mém. p. 23. LA Lunette que M. Jeaurat présente ici aux Astronomes, donne deux images du même objet, l'une droite, & l'autre renversée; pour y parvenir, il emploie un objectif percé d'un trou, l'objet est vu renversé par cet objectif, tandis qu'un second, qui répond à la partie vide du premier, sert, au moyen d'un appareil convenable, à donner l'image directe. Ces deux verres doivent être formés de manière à offrir deux images égales ; par ce moyen , les deux images de l'astre qu'on observe semblent parcourir en sens contraire le champ de la lunette, & s'éloigner avec une vîtesse relative, double de celle avec laquelle une seule image paroîtroit parcourir le champ de la même lunette: dans le passage du centre de l'astre par le centre de la lunette, les deux images coïncident, ce qui donne un moyen d'observer exactement le passage du centre, quel que soit le diamêtre de l'astre.

M. Jeaurat donne ici les formules générales pour déterminer les dimensions des verres qui doivent entrer dans la construction de ces lunettes, & en déduit les constructions les plus avantageuses.

Il y a joint de nouvelles dimensions pour les objectifs

achromatiques, propres à détruire en partie l'aberration de ſphéricité, en détruiſant celle de réfrangibilité, la ſeule à laquelle M. Jeaurat avoit cru devoir s'arrêter, dans le Mémoire qu'il a donné en 1770 ſur la même matière.

SUR UN ASTÉRÉOMÈTRE.

CET Inſtrument, inventé par M. Jeaurat, ſert à trouver promptement & ſans calcul l'heure du lever & du coucher des Étoiles, il ſuffit pour cela d'orienter l'inſtrument par rapport au paſſage de l'aſtre au méridien, & à ſa déclinaiſon connue : une alidade marque ſur le champ l'heure du lever, & celle du coucher V. les .... p. 502.

Il a été exécuté par M. de Courtenvaux, Honoraire de l'Académie, qui y grava de ſa main, *Jeaurat invenit, Courtenvaux fecit.*

NOUS renvoyons aux Mémoires :

Les nouvelles Recherches de M. le Monnier, ſur le cap de la Circonciſion, & ſur l'Aiguille aimantée. V. les Mém. pages 12 & 15.

Les Obſervations des ſatellites de Jupiter, faites à Périnaldo en 1779: Par M. Maraldi. Page 19.

Les Obſervations de l'écliple de Soleil du 14 Juin, & de celles de Lune du 30 Mai, & du 25 Novembre: Par M. Meſſier. Pages 169, 172 & 175.





OUVRAGES
PRÉSENTÉS À L'ACADÉMIE.

PRIX.

L'ACADÉMIE avoit proposé pour sujet du Prix de 1779:

La Théorie des Machines simples, en ayant égard aux effets du frottement & de la roideur des cordages.

Aucune des Pièces du Concours ne lui ayant paru remplir les vues qui l'avoient déterminée à choisir ce Sujet, elle a remis le Prix, & proposé de nouveau la même question pour 1781, avec un Prix double.

M. BEZOUT a publié cette année un Ouvrage intitulé, *Théorie générale des équations algébriques.*

L'élimination des équations qui fait l'objet principal de ce Traité, est en général l'art de tirer d'un système d'équations, qui renferment un certain nombre d'inconnues, une équation qui ne contienne plus que le moindre nombre d'inconnues possible: si, par exemple, le nombre des inconnues surpasse d'une, de deux unités, celui des équations, l'élimination consiste à chercher l'équation qui a lieu entre deux, entre trois des inconnues seulement; si le nombre des équations au contraire surpasse celui des inconnues, l'art de l'élimination consiste à trouver les conditions qui doivent avoir

lieu entre les coëfficiens des équations, pour qu'elles puissent exister en même temps : si le nombre des équations est égal à celui des inconnues, on cherche alors l'équation déterminée qui donne la valeur d'une de ces inconnues. Ce dernier cas est le plus commun, & celui qui a été le plus souvent l'objet de la recherche des Géomètres.

La théorie de l'élimination est une des plus importantes de l'Analyse; c'est de la perfection de cette théorie, de la simplification des méthodes d'éliminer, que dépend le grand problème de la solution générale des équations déterminées. Il semble d'abord que l'élimination ne doive présenter d'autres difficultés que celle de la longueur des calculs; mais d'abord ces calculs sont tellement compliqués, qu'ils deviennent impratiquables même pour des systèmes d'équations en petit nombre & peu élevées. Ensuite, on s'est aperçu que l'équation résultante, à laquelle on parvient par des éliminations successives, est d'un degré plus élevé qu'elle ne devoit être, qu'elle a dans ce cas des facteurs inutiles à la solution du problème proposé, des racines qui ne satisfont point au système d'équations que l'on considère.

Il est donc très-important d'avoir d'abord un moyen de connoître, par l'inspection du système d'équations, quel doit être le degré de l'équation résultante, & ensuite d'obtenir cette équation débarrassée de ces facteurs inutiles.

Cette recherche est d'autant plus intéressante, que son utilité ne se borne point, comme on pourroit l'imaginer, à faciliter, à rendre plus sûre la solution des problèmes particuliers que l'on peut se proposer. Il y a un grand nombre de questions d'Analyse, pour lesquelles il suffit de connoître, *a priori*, le véritable degré d'une équation résultante, & dont la solution a pour objet de connoître non la valeur des inconnues, mais certaines propriétés dépendantes de la forme des équations qui les déterminent; c'est pour cela qu'il ne suffit pas de connoître le degré de l'équation résultante d'un système d'équations, dont chacune renferme tous les termes, mais qu'il peut être très-utile de connoître ce degré pour un

ſyſtème d'équations, où certains termes manquent ſuivant un ordre ſyſtématique qu'on peut ſuppoſer.

Telle eſt la première queſtion que M. Bezout ſe propoſe, & il prouve rigoureuſement, par une méthode nouvelle, qui lui appartient, que l'équation réſultante ne doit monter jamais au-deſſus d'un degré égal au produit des degrés de toutes les équations du ſyſtème: il applique cette méthode à pluſieurs ſyſtèmes d'équations aſſujettis à certaines conditions, il fait voir pourquoi, dans les différentes hypothèſes qu'il conſidère, l'équation réſultante doit toujours s'abaiſſer, & il fixe les limites de cet abaiſſement.

Il s'occupe enſuite de la recherche des moyens les plus ſimples pour trouver cette équation réſultante; on connoît le degré qu'elle doit avoir, il ne s'agit donc plus que d'en déterminer les coëfficiens. Il réduit cette recherche à l'élimination d'un certain nombre d'inconnes renfermées dans un ſyſtème d'équations du premier degré. On avoit, il y a déjà long-temps, des formules générales pour ce cas, mais ces formules avoient l'inconvénient d'être beaucoup trop compliquées, & de préſenter même quelques difficultés dans leur application aux ſyſtèmes, où les équations n'avoient pas une forme ſymétrique: M. Bezout a donc été obligé de chercher une autre méthode; celle qu'il propoſe, eſt auſſi ſimple & auſſi commode, que la nature du problème le permet.

Cette méthode a un avantage important, ſur lequel nous croyons devoir inſiſter, elle réduit à des opérations qui ont une forme régulière, la plus grande partie des calculs qui exigent la ſolution des problèmes particuliers; il ſuffiroit donc de ſe familiariſer avec ces opérations, de chercher des moyens de les abréger, ou d'apprendre par l'habitude à les faire avec rapidité, pour ſe mettre en état de réſoudre complétement une ſoule de problèmes que la longueur exceſſive des calculs a obligé de réſoudre par des méthodes indirectes.

Nous ne ſuivrons pas M. Bezout dans tous les détails d'une théorie qu'il a portée beaucoup plus loin qu'aucun des

des Analiſtes qui l'ont précédé, nous nous bornerons à obſerver qu'elle eſt auſſi ſimple que générale; l'idée très-ingénieuſe de produire l'équation réſultante, en ajoutant entr'elles toutes les équations du ſyſtème, multipliées par des facteurs indéterminés, & l'application heureuſe à l'art des éliminations de quelques Théorèmes nouveaux ſur le calcul des différences finies, tels ont été les fondemens de tout l'édifice, dont les détails offroient d'ailleurs à chaque pas, des difficultés qui ne pouvoient être levées que par une main très-habile.

Il ne nous reſte qu'à répondre à ceux qui demanderoient à quoi ſert un Traité ſur l'élimination; nous avouerons ſans peine qu'il n'a point une utilité immédiate, mais preſque aucune théorie dans les Sciences n'a cet avantage. Un Sauvage, en voyant une maiſon qui n'eſt pas encore au premier étage, pourroit regarder comme un amuſement inutile, la peine que l'on prend pour élever perpendiculairement cette maſſe de pierres, il ne comprendroit point quel peut être l'objet de ces fondations creuſées ſi avant, & avec tant de peine; l'utilité de chaque partie n'exiſte que par ſon rapport avec le but général de tout l'édifice, qu'il ne peut ſaiſir d'avance dans ces premiers élémens qui frappent ſes regards; mais le même homme verra au premier coup-d'œil, l'utilité d'un meuble de peu d'importance; dira-t-on que l'art de former ce meuble, eſt au-deſſus de l'art d'un Architecte? Il en eſt de même de toutes les Sciences. Ce ne ſont pas les travaux immédiatement applicables à la pratique, qui ont l'utilité la plus réelle, la plus grande, la plus durable, qui exigent le plus d'efforts, & qui méritent une plus grande reconnoiſſance; car ce n'eſt pas ſeulement ſur l'utilité actuelle qu'elle doit ſe meſurer, mais ſur l'utilité de tous les temps, ſur les efforts que ces grandes théories ont dû coûter, ſur le petit nombre d'hommes dont on peut eſpérer de tels efforts & de tels ſervices. Il faut ſonger, non à l'utilité particulière qui peut réſulter de telle découverte, de tel traité, mais à celle qui

résultera un jour des progrès de la Science dont ce traité, cette découverte sont des élémens nécessaires, & compter parmi nos Bienfaiteurs, ceux qui ont fourni ou arrangé quelques matériaux de cet édifice immense qui s'élève pour d'autres générations.

LES Mémoires présentés à l'Académie en 1779, & qu'on a jugés dignes d'être imprimés dans le Recueil des Savans Étrangers, sont au nombre de vingt-deux :

Sur les Apocins : Par M. Desfontaines.

Sur le Phosphore tiré des os : Par M. Nicolas.

Sur les Orties de mer : Par M. Vastel.

Sur l'Éclipse de Soleil du 24 Juin 1778 : Par M. Méchain.

Sur l'opposition de Jupiter : Par le même.

Sur le *Periploca :* Par M. Descemet.

Sur les Apocins : Par le même.

Sur la famille des Plantes à fleurs composées : Par M. Desfontaines.

Sur le genre des *Cedrus* & des *Juniperus :* Par M. Descemet.

Sur la *Tremollia :* Par le même.

Sur le *Berberis :* Par le même.

Sur l'analyse du Seigle ergoté, & sur ses effets : Par M. l'abbé Tessier.

Sur les *Protea*, ou Arbres-d'argent : Par M. Desfontaines.

Sur quelques nouveaux genres de Plantes : Par le même.

Sur le mouvement des étamines du Seigle : Par M. l'abbé Tessier.

Sur les maladies du Blé : Par le même.

Sur la Comète de 1779 : Par M. Méchain.

Sur la liquation du Cuivre : Par M. Duhamel, Correſpondant de l'Académie.

Obſervations Aſtronomiques : Par M. Garipuy, Correſpondant de l'Académie.

Sur la rotation du Soleil : Par M. Charles.

Obſervations d'Éclipſes de Soleil & de Lune : Par M. d'Agelet.

Sur le Calcul Intégral : Par M. Charles.

Sur un accident occaſionné par des vapeurs méphitiques : Par M. Marcorelle, Correſpondant de l'Académie.

Sur les Éclipſes de Lune : Par M. Wallot, Correſpondant de l'Académie.

Nous avons oublié de faire mention, dans la liſte des Mémoires approuvés en 1777, d'un Mémoire de M. Marcorelle, ſur des Météores extraordinaires.





ÉLOGE
DE M. DE JUSSIEU.

JOSEPH DE JUSSIEU, Associé de l'Académie des Sciences, Docteur en Médecine de la Faculté de Paris, naquit à Lyon, le 3 Septembre 1704; il étoit frère de M.rs Antoine & Bernard de Jussieu, & le dernier de seize Enfans. Cette famille nombreuse a donné dans le même temps trois Botanistes à l'Académie, illustration unique jusqu'à présent dans l'histoire des Sciences.

Formé par ses frères plus âgés que lui, & qui étoient déjà célèbres dans la Botanique, lorsqu'il ne faisoit que sortir de l'enfance, son premier penchant le portoit à suivre la même carrière; cependant il étoit né avec une de ces imaginations vives qui, lorsqu'elles sont jointes à un esprit juste, & à un cœur droit, peuvent rendre inconstant dans la jeunesse, mais ne laissent plus dans l'âge mûr qu'une activité utile: abandonnant bientôt son premier projet, il quitta l'étude de la Botanique pour celle des Mathématiques, & la profession de Médecin pour l'état d'Ingénieur. Il acquit alors des connoissances que souvent dans la suite, il eut occasion d'employer, & que peut-être on devroit regarder comme un préliminaire essentiel dans toutes les Sciences naturelles, soit parce que dans chacune il se présente des questions où l'application de ces connoissances est nécessaire, soit parce que ces mêmes connoissances donnent à ceux qui les cultivent, l'habitude d'être plus difficiles sur les définitions & sur les preuves. A mesure que les Sciences se sont étendues, leur distinction a été plus absolue, & leur limites plus marquées; mais il seroit peut-être aussi nuisible à

leurs progrès, de trop les isoler, que de trop les confondre. Après cette diversion qui fut très-courte, M. de Jussieu revint à des occupations vers lesquelles il se sentoit rappelé, parce qu'elles lui étoient communes avec des frères qu'il chérissoit.

En 1735, il fut choisi, comme Botaniste, pour accompagner au Pérou les Astronomes de l'Académie; il les suivit dans ce voyage célèbre, profitant des relâches les moins longues pour envoyer à ses frères les plantes & les graines qu'il recueilloit. Arrêté plus d'une fois par des maladies courtes & violentes, il s'en relevoit pour se livrer avec une ardeur plus grande aux fatigues qui les lui avoient causées; il n'avoit qu'une seule crainte, & ne voyoit qu'un danger, celui de quitter un pays sans l'avoir observé.

A la vérité l'amour des Sciences n'étoit pas la seule passion qui l'animât; on voit par ses Lettres, que l'idée du plaisir qu'il préparoit à ses frères, par chacun de ses envois, eût suffi pour lui faire tout risquer & tout supporter.

Les Astronomes virent avec quelque surprise, que le Botaniste qu'on leur avoit associé, étoit en même temps un Mathématicien éclairé, capable de concourir avec eux aux opérations astronomiques. M. Bouguer a dit, après son retour, qu'aucun de ses Coopérateurs ne lui avoit été plus utile que M. de Jussieu; M. Bouguer alloit même plus loin, mais il avoit eu à combattre, dans ses Confrères, quelques prétentions très-excusables sans doute, si on songe qu'il étoit bien naturel d'être jaloux d'une gloire qui avoit tant coûté; & il n'avoit trouvé dans M. de Jussieu que de la docilité & du zèle.

Pendant le temps employé aux travaux astronomiques, M. de Jussieu observa les différentes espèces d'arbres qui donnent le quinquina, les caractères botaniques qui distinguent chaque espèce, le degré de vertu de chacune, les arbres dont on mêle frauduleusement l'écorce avec celle du quinquina, il apprit aux habitans mêmes du pays à employer cette écorce avec méthode, à en reconnoître les différentes

eſpèces, à en tirer la matière extractive: lui-même prépara une quantité conſidérable d'extrait de quinquina, pour l'envoyer à ſes frères. Cet extrait s'eſt trouvé plus efficace que celui qu'on prépare en France, & ſi, comme le croyoit M. de Juſſieu, l'extrait peut dans tous les cas être ſubſtitué à l'écorce elle-même, peut-être il ſeroit utile que l'uſage d'envoyer le quinquina ſous cette forme s'établît dans le Commerce; le tranſport ſeroit moins embarraſſant, la vertu du quinquina s'altéreroit moins, & la fraude ne ſeroit vraiſemblablement ni plus facile, ni plus dangereuſe, ni plus embarraſſante à reconnoître.

Cependant les Aſtronomes avoient rempli l'objet de leur voyage, & ils ſe préparoient à retourner en Europe. Sept ans de travaux pénibles euſſent pu ſuffire au zèle de M. de Juſſieu; il eût revu une famille chérie, il eût joui de la gloire de ſes recherches, mais il n'avoit vu encore que des contrées habitées par des Européens, défigurées par la culture, ou du moins parcourues avant lui par quelques Voyageurs, & il laiſſoit derrière lui des pays immenſes, où une foule d'objets nouveaux devoient frapper les yeux du premier obſervateur qui oſeroit y pénétrer, où la Nature ſeule avoit réglé la diſpoſition des végétaux, & donné à la terre les plantes qu'elle devoit produire: il ſavoit que les découvertes y ſeroient plus faciles & moins glorieuſes, que le voyage ſeroit plus pénible; mais il voyoit auſſi qu'à chaque pas il pouvoit eſpérer ou le plaiſir de voir une choſe nouvelle, ou la ſatiſfaction de faire une obſervation utile. M. de Juſſieu ne put ſe réſoudre à quitter le Pérou ſans avoir parcouru ces contrées inconnues: la difficulté de tirer des ſecours de l'Europe n'étoit pas un obſtacle pour lui; il étoit Médecin, & un Médecin françois étoit regardé dans ces pays, à peu-près comme dans l'ancienne Grèce on regardoit cette famille des rois de Carie, long-temps dépoſitaire preſqu'unique des ſecrets de la Médecine, & à laquelle un peuple enthouſiaſte dans ſa reconnoiſſance, avoit ſuppoſé une origine céleſte. L'admiration pour M. de Juſſieu eut une manière de s'exprimer

bien différence de celle des anciens Grecs : il reçut une défenſe abſolue de ſortir juſqu'à la fin d'une maladie épidémique dans laquelle on avoit eu beſoin de ſon ſecours; on décerna des peines contre quiconque favoriſeroit ſon évaſion; on promit une récompenſe à celui qui l'arrèteroit s'il paſſoit la frontière. Ces précautions honorables & tyranniques étoient bien inutiles, on eût pu s'en repoſer ſur ſon zèle pour l'humanité. Si cette partie du voyage de M. de Juſſieu a été perdue pour la Botanique, elle ſervira du moins à l'hiſtoire de la Médecine; on a trouvé dans ſes papiers, des détails intéreſſans ſur la marche de la petite vérole au Pérou, ſur les maladies épidémiques de ce pays, ſur une maladie ſingulière qui ſuivit une éruption du Cotopaxi, & à laquelle on donna le nom de ce volcan.

Retenu, & par les fonctions de Médecin, & par pluſieurs maladies violentes auxquelles il ne put échapper, M. de Juſſieu ne commença ſes nouveaux voyages qu'en 1747; c'eſt alors qu'il parcourut pluſieurs pays ſauvages & inhabités. il falloit traverſer des lacs immenſes ſur de petits bateaux de jonc, paſſer des torrens ſur des ponts de corde de cent pieds de long; ailleurs, de longues pièces de bois, appuyées ſur les bords de la rivière, & ſur des rochers placés au milieu & beaucoup plus bas que les rives, compoſoient un pont formé de deux plans inclinés très-rapides: d'autres fois, le pont étoit fait de bateaux de jonc, recouverts par des faſcines, & ſupportés par des cables du même jonc, étendus d'un bord du torrent à l'autre. M. de Juſſieu nous a laiſſé des deſſins de ces ponts, monumens hardis de l'induſtrie d'un peuple ingénieux & ſauvage.

Il fut obligé de gravir ſur des rochers qui ſervent de retraite au reſte des anciens habitans du pays, à qui on donne le nom de *Rebelles*, parce qu'ils défendent leur indépendance naturelle, & qu'ils traitent en ennemis, les Européens & leurs eſclaves; mais ils reſpectèrent M. de Juſſieu, comme s'ils euſſent ſenti que, miniſtre de paix & de lumière, occupé de chercher des remèdes à des maux

communs à tous les hommes, il étoit le compatriote & l'ami de tous les peuples.

Il parcourut des déſerts où la rigueur du froid a détruit toute végétation, réduit à vivre de biſcuit & de fromage ſec; abandonné & dépouillé par ſes domeſtiques, peut-être ne dut-il la vie qu'à l'indulgence exceſſive avec laquelle on traite les voleurs au Pérou, ils auroient eu tout à riſquer & peu à gagner, en ſe débarraſſant par un crime de plus, d'un dénonciateur & d'un témoin: enfin ſeul au milieu de ces déſerts, il perd ſubitement la vue: cet état horrible ne dura qu'un jour, mais qui peut apprécier la longue & terrible durée d'un tel jour?

C'eſt à travers tant de fatigues & de dangers, que M. de Juſſieu parvint à un pays fertile, riche en plantes juſqu'alors ignorées de l'Europe; mais à peine les a-t-il recueillies, qu'il ſe livre à de nouveaux dangers, il marche au milieu des précipices dans un pays inhabité, où il découvre les reſtes immenſes des fortereſſes que les Incas oppoſoient aux incurſions des Sauvages. Ces vaſtes contrées étoient devenues déſertes, placées près du Paraguai, toute communication leur étoit interdite avec ce pays, où l'on croyoit alors que les Jéſuites avoient fondé un empire, & où ils n'avoient réellement établi que des couvens & des comptoirs: de-là il paſſe à la province de Loſmoxos, traverſant des pays marécageux & brûlans, dévoré par le Soleil, & plongé dans la fange juſqu'aux genoux, vivant de millet & de maïs, forcé de paſſer la nuit ſur les arbres, & d'abandonner la terre aux reptiles: enfin, après avoir vu tout ce que les provinces éloignées des côtes pouvoient lui offrir d'objets nouveaux, il ſe retrouva en 1750 au Potoſi.

La plus grande partie des découvertes faites dans ces voyages, eſt perdue pour nous; nous ne pouvons en préſenter que quelques fragmens, bien propres à augmenter nos regrets.

M. de Juſſieu décrivit l'eſpèce de canelle qui croît ſur les montagnes du pays de los Canelos, il ramaſſa dans une des

des vallées des Cordilières, l'hélyotrope odorant & la pervenche naturalisée depuis parmi nous ; il visita plusieurs mines d'argent, observa & décrivit les procédés employés dans la mine de mercure de Guancavelica. Il examina la montagne de Pumacanche, qu'il croit entièrement formée d'aimant, ainsi que les montagnes voisines. Il observa des sources d'eau chaude, qui s'élancent des montagnes glacées de Tunguraga & de Vilcanose. Il trouva dans les montagnes du Pérou, ces ossemens immenses, étrangers au sol où ils sont déposés, & que la Nature a semés dans les entrailles de la terre, comme des monumens de ces temps où la mémoire des hommes ne peut atteindre; mais il observa une hauteur au-dessus de laquelle ces productions animales ne se trouvent plus; c'est-là que l'empire de la mer a ses limites, ou du moins c'est-là qu'il ne reste plus de vestiges de son empire. Il se procura sur les bords du lac Chicuito, une collection nombreuse de différentes espèces d'oiseaux aquatiques, nouvelles pour nous. Il observa dans la province de los Yungas, le coca, cette plante si nécessaire aux Péruviens enchaînés dans les mines, ressource que la Nature avoit mis en dépôt dans ces contrées, comme une consolation & un soutien contre les maux que cause à leurs habitans la dureté des Européens. Ces victimes de l'avarice mâchent sans cesse les feuilles de cette plante, séchées & saupoudrées de cendre de quinoa; ces sucs restaurateurs soutiennent leurs forces, relèvent leur ame abattue par l'oppression, & leur donnent le courage de supporter le travail & la servitude.

M. de Jussieu ne se borna point à l'histoire naturelle, ou plutôt il chercha à compléter son travail, en y ajoutant la carte des pays qu'il avoit vus. En parcourant ses Journaux, dont nous ne donnons ici qu'une foible esquisse, on sent que si aucune partie de ses travaux n'eût été perdue, il nous eût fait connoître le Pérou mieux que nous ne connoissons encore plusieurs parties de l'Europe.

Arrivé dans le Potosi, M. de Jussieu, qui cependant sentoit déjà les premières atteintes des infirmités dont il a

été la victime, non-seulement y pratique la Médecine; mais il l'enseigne aux Médecins Espagnols & Péruviens; il leur apprend à connoître les vertus des Plantes, lève les Cartes de la province, examine les mines, réforme les travaux publics, enfin on ne lui permet point de partir qu'il n'ait rétabli un pont nécessaire à la communication du pays, & ruiné depuis vingt ans; c'étoit pour la seconde fois qu'il éprouvoit la même violence, & qu'on récompensoit son talent & son zèle par la perte de sa liberté. Le Botaniste redevient ingénieur, il reconstruit le pont, forme des digues qui doivent retenir le fleuve grossi par des torrens, rétablit des chemins. Ainsi dans les premiers âges des Nations, tous les Arts, toutes les Sciences appartenoient à un seul homme. Une pyramide élevée aux dépens du public, atteste la reconnoissance du pays pour M. de Jussieu, & la violence qu'on lui avoit faite, violence dont cette pyramide étoit une sorte de réparation, car ceux qui peuvent tout, croient trop aisément que par des marques d'honneur ils peuvent aussi compenser ou réparer une injustice.

Quatre années furent employées à ces travaux. Le Gouverneur du pays, M. de Xauregui qui logeoit chez lui M. de Jussieu, lui avoit des obligations personnelles du soin qu'il avoit pris de sa famille, il le retint un an, le flattant de l'espérance de le ramener bientôt sur les côtes, & de le conduire en Europe. Cette année écoulée, M. de Jussieu revint avec M. de Xauregui à Lima, par une autre route que celle qu'il avoit prise en quittant cette ville, & y arriva vers la fin de Décembre 1755.

Il n'aspiroit d'abord qu'à retourner dans sa patrie; sa santé étoit affoiblie, & son courage commençoit à l'abandonner; M. de Xauregui partit sans lui, soit qu'il ne voulût pas exposer M. de Jussieu aux fatigues du voyage, par le cap Horn, soit qu'il desirât laisser auprès de sa femme un Médecin habile, & nécessaire à sa santé. M. de Jussieu, resté à Lima, ne recevant de sa patrie aucun secours, privé de ses appointemens comme si, en s'obstinant à rendre son travail plus

complet, il eût mérité d'en perdre la récompenſe, fut obligé de ſe livrer de nouveau à la pratique de la Médecine. La Géométrie, ſeule étude *qui le ſatisfît par l'évidence de ſes démonſtrations* (ce ſont ſes termes) occupoit le reſte de ſon temps; il ne voyoit plus dans la Botanique, qu'une Science à laquelle il avoit ſacrifié ſa ſanté & ſa fortune, qui ne l'avoit pas même récompenſé par la gloire, de ce qu'elle lui avoit coûté; le plaiſir de ſoutenir la paſſion plus conſtante & plus heureuſe de ſes frères, auroit ſoutenu ſon courage; mais on lui mandoit ſouvent, que ſes envois de graines & de plantes avoient été perdus. Enfin il apprit la mort de ſon frère aîné, cette nouvelle le conſterna. *Je ne puis penſer à lui*, écrivoit-il, *ſans que mon ſang ne ſe gèle, & que mon cœur ne ſe couvre d'un voile noir; ce n'eſt point un frère, c'eſt mon père que j'ai perdu.*

Vers 1761, le départ de M.de de Xauregui que la ſanté de M. de Juſſieu ne lui permit pas de ſuivre, mit le comble à ſes maux; il devint ſujet à de fréquens vertiges, ſa mémoire s'affoiblit; il continuoit cependant de voir des malades, fuyant les Grands, dont la confiance inquiète & exigeante lui paroiſſoit un eſclavage, préférant les Pauvres, donnant l'exemple du déſintéreſſement dans des pays, où le ſeul amour de l'or attire les Européens: conſumé du regret de vivre loin de ſa patrie, & manquant de courage pour vaincre les obſtacles qui le retenoient, ne pouvant ſupporter l'idée de reſter au Pérou, & ne voyant qu'avec effroi les dangers & la fatigue du retour; conſervant ſa généroſité & ſes vertus, mais trop foible pour ſe défendre contre ceux qui ne craignoient point d'en abuſer; encore utile aux autres, & devenu inutile à lui-même: enfin ſes véritables amis ſentirent combien ſon départ devenoit néceſſaire, ils l'y déterminèrent, & il quitta Lima, où ce départ fut regardé par le peuple comme un malheur public. Cet homme qui avoit été pendant vingt ans le bienfaiteur du pays où il avoit vécu, fut obligé d'emprunter pour ſubvenir aux frais de ſon voyage.

Sa tête avoit perdu ſon activité & ſes forces, ſon ame étoit épuiſée, mais ſa raiſon étoit ſaine encore. Le voyage rétablit ſa ſanté, mais ſa tête s'affoiblit de plus en plus; il revint à Paris en 1771, après trente-ſix ans d'abſence, retrouver ſon frère, le reconnoître & pleurer dans ſes bras. Il ſavoit encore qu'il avoit un frère & qu'il l'aimoit, mais ce fut la ſeule choſe dont il eût conſervé le ſouvenir, ou plutôt le ſentiment; ſes découvertes, ſes vues, ſes travaux, le fruit de quarante années conſacrées aux Sciences, ſes chagrins, ſes malheurs, tout étoit effacé de ſa mémoire. Un frère malheureux, reçu dans une famille vertueuſe, un martyr de la Botanique, recueilli dans une maiſon qu'on pourroit appeler le ſanctuaire de cette Science, fut traité avec le reſpect qu'on devoit à ſon malheur & à la cauſe de ce malheur; on lui prodigua les ſoins, ils furent inutiles. Il vit mourir ce frère qu'il avoit tant aimé, mais il étoit devenu incapable de ſentir ſa perte, & par une eſpèce de compenſation dont il faut rendre grâce à la Nature, ſon état lui épargna du moins le ſentiment de cette dernière infortune. Ses neveux, à qui il reſtoit ſeul, lui donnèrent toutes les marques de tendreſſe qu'il pouvoit recevoir, ils cherchoient à prolonger, à adoucir ſa vie, à conſerver long-temps les reſtes reſpectables d'un vieillard, qui aſſez malheureux pour avoir perdu juſqu'au ſouvenir de ce qu'il avoit été, méritoit que les autres en gardaſſent la mémoire.

Il recevoit ces ſecours avec une ſenſibilité & une douceur touchante; privé de la mémoire, incapable de ſentir combien il avoit de droits à tout ce qu'on faiſoit pour lui, les ſoins de chaque jour lui paroiſſoient un nouveau bienfait auquel il répondoit chaque jour par une reconnoiſſance nouvelle, & l'état où il étoit tombé, lui avoit laiſſé ſon caractère, naturellement doux & ſenſible. Bientôt ſa vie ne fut plus qu'un aſſoupiſſement continuel, ſes membres ſe retirèrent, & il mourut de la gangrène, après huit jours de ſouffrances, le 11 Avril 1779, âgé de plus de ſoixante-quatorze ans.

Telle fut la fin de quarante ans de travaux, & de quinze ans de malheurs.

M. de Juſſieu avoit été fait Adjoint-Botaniſte de l'Académie en 1743, lorſqu'il étoit au Pérou: en 1758 on le nomma Aſſocié-vétéran, à cauſe de ſa longue abſence. Son état, à ſon retour, ne lui permit point de paroître à nos Aſſemblées, & par une ſingularité unique, il fut Académicien pendant trente-ſix ans, ſans avoir jamais paru à l'Académie; il a conſacré aux Sciences ſa vie entière, & n'a pas même publié un ſeul Mémoire.

M. de Juſſieu ſon neveu, croit devoir à la mémoire de ſon oncle, de donner un Journal détaillé de ſon voyage, de publier ceux de ſes travaux que les naufrages & les accidens ont épargnés; c'eſt-là qu'on pourra juger de tout ce qu'on a perdu, & qu'on verra combien d'eſtime & de reconnoiſſance on devoit à cet homme, oublié, maltraité même pendant ſa vie, & qui a fait aux Sciences & à l'humanité, le ſacrifice le plus entier peut-être dont les Annales des Sciences puiſſent s'honorer.





ÉLOGE

DE M. LE COMTE D'ARCI.

PATRICE D'ARCI, Penſionnaire-Géomètre de l'Académie des Sciences, Maréchal des camps & armées du Roi, Chevalier de l'Ordre de Saint-Louis, & Commandeur de l'Ordre de Saint-Lazare, naquit à Gallowai en Irlande, le 27 Septembre 1725, de Jean d'Arci & de Jeanne Linch, fille de Robet Linch, Chevalier-Baronnet.

Les Comtes d'Holderneſſ en Angleterre, dont le nom eſt d'*Arci*, regardent la famille des d'Arci d'Irlande, comme iſſue de la même ſouche que la leur, & ſortie d'un ſecond mariage de Jean d'Arci, Lord-juſticier d'Irlande, ſous Édouard III. La Maiſon d'Arci, comme les autres Maiſons angloiſes, dont le nom eſt françois, & dont la ſource eſt inconnue, fait remonter ſon origine à l'un des Chevaliers normands qui ſuivirent en Angleterre Guillaume le Conquérant. Nous ne nous arrêterons point ſur ces détails, bien peu importans aux yeux d'une Compagnie ſavante, où les Ouvrages ſont tout, & où les titres ne ſont rien: mais les Confrères de M. le Comte d'Arci peuvent voir avec intérêt que la France a quelque droit de le revendiquer ſur l'Irlande.

Ses parens, à la fois Jacobites & Catholiques, étoient opprimés, à ce dernier titre, ſous des loix cruelles, indignes de la ſageſſe & de l'humanité des loix angloiſes, mais qu'une fauſſe politique avoit cru néceſſaires dans le ſiècle dernier: ils avoient mieux aimé renoncer à leurs droits, qu'à la fidélité qu'ils avoient vouée à leur religion & à la famille des Stuarts.

La France eſt l'aſyle naturel des Irlandois catholiques qui annoncent de l'activité & des talens, & que les loix de leur patrie condamnent à l'inutilité & à l'inaction. Le jeune d'Arci fut envoyé à Paris en 1739, auprès d'un de ſes oncles; le haſard le plaça dans la maiſon où logeoit M. Clairaut le père; il devint ſon élève, & mérita bientôt d'être le diſciple ou plutôt le compagnon d'étude de M. Clairaut le fils: c'étoit à l'époque où la France commençoit à reprendre dans les Sciences-mathématiques le rang qu'elle avoit perdu après la mort de Deſcartes & de Paſcal, & qu'elle a ſu conſerver depuis. M. d'Arci fit des progrès rapides: après trois ans d'étude, âgé ſeulement de dix-ſept ans, il donna une nouvelle ſolution du problème de la courbe d'égale preſſion dans un milieu réſiſtant: les ouvrages de la jeuneſſe de M. Clairaut avoient accoutumé à de plus grands prodiges; mais c'étoit beaucoup alors que de ſavoir à dix-ſept ans les principes de la Mécanique tranſcendante & ceux du Calcul intégral, de mettre en équation un problème de Dynamique, & de conſtruire une équation différentielle du troiſième ordre, à laquelle la méthode de M. d'Arci l'avoit conduit: d'ailleurs, il joignoit à ſa ſolution des remarques qui annonçoient une ſagacité dont il donna des preuves plus certaines dès l'année ſuivante, par la ſolution d'un nouveau problème, ſolution qui obtint également les ſuffrages de l'Académie. Il s'agiſſoit de déterminer la courbe que décrit dans l'eſpace un corps peſant qui gliſſe par ſon poids le long d'un plan mobile, en même-temps que la preſſion de ce corps fait mouvoir horizontalement le plan qui le porte; à la vérité, ce problème avoit été réſolu par M.rs Jean Bernoulli & Clairaut; mais dans la ſolution qu'en donne M. d'Arci, par une méthode qui lui eſt propre, on aperçoit déjà l'empreinte de ſon talent, & même de ce caractère original qui ſe retrouve dans toutes ſes productions.

La guerre vint alors enlever aux Sciences M. le Chevalier d'Arci (c'eſt le nom qu'il prit en entrant au Service, & que nous lui conſerverons dans cet Éloge, parce que c'eſt celui

ſous lequel il a publié tous ſes ouvrages) il fit, comme Capitaine dans le régiment de Condé, deux campagnes en Allemagne, & une en Flandre: en 1746 il fut deſtiné à ſe joindre au ſecours que le Roi envoyoit au Prétendant, qui avoit débarqué en Écoſſe; c'étoit pour ſa patrie, pour ſa famille, pour les droits de celui qu'il regardoit comme ſon Prince, que M. d'Arci alloit combattre; ſon eſpérance fut trompée, une flotte angloiſe enleva le convoi; on avoit eſpéré qu'il échapperoit à la faveur de l'obſcurité, mais il fut découvert par l'amiral Knowles, à l'aide d'une lunette de nuit, inſtrument qui commençoit alors à être connu en Angleterre. Né en Irlande, M. d'Arci avoit été pris en portant les armes contre le Gouvernement de ſa patrie, la loi le condamnoit, mais l'humanité, la juſtice & la politique engagèrent à le traiter comme un Officier françois.

Les infortunes du Prétendant n'avoient pu rien changer à ſes droits; non-ſeulement M. le Chevalier d'Arci continua de le regarder comme le fils & l'héritier de ſon Souverain, mais il conſerva le même attachement pour la perſonne du Prince Édouard. Il défendoit les vertus ou les talens qu'il avoit cru voir en lui, avec le même zèle qu'il avoit défendu ſes droits à la Couronne d'Angleterre: il avoit été prêt à répandre ſon ſang pour le replacer ſur le Trône de ſes ancêtres, il eût ſoutenu, aux mêmes riſques, qu'il étoit digne d'y remonter. Enfin, lorſque la France eut refuſé un aſyle à un deſcendant de Henri IV, lorſque Rome eut abandonné la cauſe d'un Prince, dont l'aïeul avoit perdu trois couronnes par ſon zèle pour la Religion Catholique, lorſque la voix publique jugeoit avec tant de ſévérité un Prince malheureux, dont l'ame n'avoit pu réſiſter à une ſi longue ſuite de revers, M. d'Arci ne fut point ébranlé.

La Maiſon des Stuarts, ſemble n'avoir été montrée au monde, que pour donner aux Rois une leçon du malheur & des dangers attachés à la Puiſſance ſouveraine; elle ſeule, parmi tant de familles détrônées, a vu, dans l'eſpace de ſoixante ans, deux têtes couronnées tombant ſous la hache des

des bourreaux, par des assassinats revêtus des formes de la Justice. Mais aucune famille aussi n'a conservé plus long-temps après sa chute, des partisans si zélés. Il est impossible cependant d'attribuer ce zèle, ni à l'attachement pour la Religion Catholique qui avoit été le prétexte ou la cause des malheurs de Jacques II, puisque des Protestans de toutes les Sectes ont partagé ce sentiment; ni à des vues ambitieuses, puisque ce zèle a survécu à toute espérance raisonnable du rétablissement des Stuarts. On ne peut trouver la cause d'une fidélité si constante, que dans l'excès même des malheurs de cette Maison, dans la proscription terrible prononcée contre elle par la famille qui l'a remplacée sur le Trône: tant la persécution a de force pour attacher les ames généreuses à ceux qui en sont les victimes!

Ce ne fut qu'en 1749, après la paix, que M. le Chevalier d'Arci put entrer à l'Académie: la guerre ne lui avoit pas fait abandonner les Sciences; mais il avoit choisi dans la Géométrie le genre de travail qui étoit le plus compatible avec la vie active & agitée qu'il étoit obligé de mener. Dans son premier Mémoire, il avoit employé l'Analyse, depuis il préféra la Synthèse, méthode qui exige plus de méditations que de calculs, & plus d'efforts que de travail. M. d'Arci lut deux Mémoires à l'Académie, même dans le courant de la guerre, l'un en 1746, avant d'être pris par les Anglois; l'autre en 1747, après son échange: le premier renfermoit un principe général de mécanique, celui de la conservation du mouvement giratoire. Ce même principe avoit été donné en 1745, par M.rs Daniel Bernoulli & Euler; mais il n'est pas vraisemblable que leurs ouvrages aient été chercher M. d'Arci dans les campagnes de Flandre; d'ailleurs, il suffit de voir comment chacun des Inventeurs a présenté ce même principe pour sentir que la méthode de M. d'Arci, est vraiment à lui, & qu'il n'y a rien de commun entre sa manière de traiter les questions mécaniques & celle de ces deux illustres Géomètres: enfin, ce principe ne s'applique immédiatement qu'aux mouvemens libres, & pour l'étendre aux mouve-

mens aſſujettis à des conditions, M. d'Arci employoit une méthode à la fois originale & ſimple, élégante & ingénieuſe.

En 1750, il préſenta ſon principe ſous une autre forme, il l'appela *le principe de la conſervation d'action*, pour l'oppoſer en quelque ſorte au principe de la moindre action, auquel M. de Maupertuis étoit parvenu à donner une grande célébrité, & que M. d'Arci avoit attaqué dans pluſieurs Mémoires. On ſait quelles diſputes ce principe produiſit, combien elles furent inutiles aux progrès des Sciences, & affligeantes pour ceux qui s'intéreſſent à leur gloire. Nous n'entrerons point dans ces diſcuſſions qui ont ceſſé d'intéreſſer les Mathématiciens, & que nous croyons qu'on peut regarder comme abſolument terminées, depuis qu'un Géomètre philoſophe a fixé, avec autant de préciſion que d'impartialité, ce qu'on doit penſer de la métaphyſique de ce principe, dans quelques-uns des articles dont il a enrichi l'Encyclopédie.

M. d'Arci a employé ſon principe à la ſolution de pluſieurs problèmes; parmi ceux auxquels il l'applique, on remarque le problème de la préceſſion des Équinoxes, le plus difficile peut-être de l'Aſtronomie-phyſique, & celui dont la ſolution a contribué le plus à prouver la vérité de la loi générale découverte par Newton. M. d'Alembert avoit réſolu le premier ce problème, pluſieurs années auparavant, par une méthode directe qui embraſſe la théorie générale des mouvemens des corps finis, quelle qu'en ſoit la figure. La vérité ne nous permet pas de diſſimuler que les Géomètres s'accordent à trouver une erreur dans la nouvelle ſolution que M. d'Arci en a donnée; mais ſi on ſonge que les premiers Mathématiciens de l'Europe avoient inutilement tenté de réſoudre ce problème, que Newton lui-même n'avoit pas été plus heureux que M. d'Arci; qu'enfin, depuis que le défaut de ſa ſolution a été remarqué, de ſavans Géomètres en ont publié de nouvelles, où l'on a pu obſerver auſſi des erreurs; alors, on ſentira que celle qui eſt échappée à M. d'Arci n'affoiblit en rien les preuves multipliées que ſes autres ouvrages ont données de ſa ſagacité & de ſes talens.

Le principe de la conſervation du mouvement giratoire, comme celui de la conſervation des forces vives, comme celui de la moindre action, enfin, comme tous les autres principes du même genre, peut être ſujet à quelques exceptions, ou plutôt à quelques modifications; le calcul en avertit, il indique, il corrige les erreurs où l'on pourroit tomber en donnant à ces principes une trop grande étendue; ainſi, ils peuvent toujours être employés comme des formules mathématiques. On ſait avec quel ſuccès M.[rs] Bernoulli ſe ſont ſervis de celui des forces vives, & quel heureux uſage M.[rs] Euler & de la Grange ont fait de celui de la moindre action, mais (ainſi que l'ont remarqué eux-mêmes ces illuſtres Géomètres) on ſe tromperoit en regardant aucun de ces principes comme une des loix invariables de la Nature: il faut remarquer encore que deux de ces principes, lorſqu'ils ne ſe réduiſent pas à un ſeul diverſement préſenté, peuvent réſoudre tous les problèmes de mécanique, mais qu'en général il eſt néceſſaire d'en employer deux. Le principe lumineux & ſimple, donné par M. d'Alembert en 1742, eſt juſqu'ici l'unique qui puiſſe ſuffire ſeul à la ſolution des problèmes, parce qu'il eſt direct, & qu'il n'eſt pour ainſi dire que l'expreſſion mathématique des notions premières & eſſentielles de l'action & du mouvement; il eſt auſſi le ſeul, & par la même raiſon, qui puiſſe donner la démonſtration de tous les autres, & qui nous faſſe diſtinguer le ſens dans lequel chacun d'eux peut être regardé comme vrai.

Lorſque M. le Chevalier d'Arci entra dans l'Académie, l'Électricité occupoit tous les Phyſiciens. Cette eſpèce de mode, qui fixe ſucceſſivement les regards du public & les vues des Savans, ſur les différentes parties des Sciences, ſert à leurs progrès, quoiqu'elle ſoit plus ſouvent la ſuite que la cauſe des découvertes les plus brillantes: mais les découvertes brillantes laiſſent preſque toujours entr'elles & les vérités qui les ont précédées, un vide qu'il faut remplir. Les Inventeurs ne ſaiſiſſent pas toutes les conſéquences de leurs découvertes, n'en développent pas tous les uſages, & c'eſt

pour remplir ce vide, pour ſuivre ces conſéque nce, pour multiplier ces uſages, que le concours de pluſieurs Savans devient néceſſaire.

L'Électricité agit ſur les corps avec une force ſuſceptible d'être aſſujettie au calcul, & pour analyſer les phénomènes électriques, il étoit intéreſſant de meſurer cette force; il falloit donc chercher un électromètre. Les corps électriſés attirent ceux qui ſont capables de recevoir d'eux l'électricité; deux corps doués d'une électricité contraire, s'attirent plus fortement encore; mais la force répulſive qu'exercent entre eux des corps qui ont le même genre d'électricité, & qui la reçoivent d'un même conducteur, paroît celle dont il eſt le plus facile de comparer les degrés d'intenſité: elle fut employée dans la conſtruction de l'électromètre que proposèrent M.rs d'Arci & le Roi; car M. le Chevalier d'Arci fit ces expériences de concert avec M. le Roi, de cette Académie, Élève comme lui de M. Clairaut. Un goût commun pour la Phyſique avoit reſſerré cette liaiſon de leur jeuneſſe, qui a duré juſqu'à la mort de M. d'Arci. Après une amitié de vingt ans, tous deux ſe crurent des droits à une même place, & cette concurrence, qui auroit détruit peut-être ſans retour une amitié commune, ne put altérer celle de M.rs d'Arci & le Roi, même pendant le temps de la diſcuſſion; aucun des deux cependant ne parut ſonger à propoſer le ſacrifice de ſes prétentions, bien ſûr que ſon Concurrent n'eût pas voulu lui céder l'avantage de ſacrifier ſes droits à l'amitié.

M. d'Arci n'avoit pu faire la guerre ſans réfléchir ſur les parties de cet art auxquelles les Sciences qu'il cultivoit étoient plus immédiatement liées, & pendant la paix, il s'occupa de perfectionner la théorie de l'Artillerie.

La guerre eſt un fléau, mais c'eſt la guerre elle-même, & non l'art de la guerre, qui eſt funeſte: à meſure même que l'art ſe perfectionne, les maux qu'elle enfante deviennent moins cruels; car, plus les ſuccès dépendent de la ſcience & du talent, moins les paſſions & la fureur multiplient les

maſſacres & la dévaſtation. Ainſi, en même temps que les progrès des lumières en morale rendront les guerres plus rares & moins acharnées, les progrès des lumières en phyſique les rendront moins ſanglantes & moins deſtructives. Il eſt donc permis, ſans bleſſer l'humanité, de louer des travaux qui ont pour objet la perfection d'un art deſtructeur. Il eſt permis de célébrer le génie qui crée de nouveaux moyens de défendre la Patrie, & de forcer à la paix ceux qui l'ont troublée; & l'on ne doit déteſter que la politique meurtrière qui fait de ces moyens de conſervation & de tranquillité un inſtrument d'injuſtice & de deſtruction.

M. le Chevalier d'Arci donna un premier Mémoire ſur l'Artillerie en 1750, continua long-temps ſes expériences, & en raſſembla les réſultats dans l'Eſſai ſur l'Artillerie, publié en 1760. L'Auteur trace, dans ſon Ouvrage, le plan d'une théorie générale de l'Artillerie, plan qu'il ne ſe propoſe pas de remplir en entier: il ſentoit que cette théorie ne pouvoit être appuyée que ſur des expériences nouvelles, & que ces expériences demandoient de nouveaux moyens.

Un des objets les plus importans, étoit la connoiſſance de la poudre. Il falloit déterminer, par des expériences exactes, quelle proportion dans les parties conſtituantes, quelle qualité de grain, quels procédés dans la manipulation, donnent à la poudre le plus de force: Il falloit ſavoir ſi la force qui eſt communiquée aux projectiles dépend de la promptitude avec laquelle la poudre s'enflamme: mais pour faire ces expériences on avoit beſoin d'une éprouvette qui donnât des réſultats précis, & il n'en exiſtoit pas. M. d'Arci imagina de ſuſpendre un petit canon à un pendule, & de juger de la force de la poudre par l'arc que le recul feroit décrire à ce canon: cet inſtrument, perfectionné depuis par lui-même, a été adopté par la Régie des poudres: il peut rendre ſenſibles de très-petites différences dans la poudre, aucune circonſtance étrangère n'en altère les réſultats; & pour juger de la ſupériorité d'une poudre ſur une autre, on trouveroit difficilement un inſtrument plus ſenſible ou plus ſûr.

Il résulte des expériences de M. d'Arci, que plus la poudre s'enflamme vîte, plus elle a de force; que le mélange exact des matières & la sécheresse de la poudre, contribuent sur-tout à la rendre meilleure; qu'enfin de petites différences dans la manipulation, en produisent de bien plus sensibles dans les effets, que n'en font naître des changemens dans la proportion des matières, qui au premier coup d'œil paroîtroient bien plus importans.

M. d'Arci examine ensuite quelle différence la longueur des pièces du même calibre, tirées avec des charges égales, produit dans la vîtesse du boulet; & quels sont les effets de différentes quantités de poudre employées à charger la même pièce. Pour mesurer la force des projectiles, il emploie un pendule contre lequel ces projectiles viennent frapper, & la grandeur des arcs décrits par ce pendule, donne les forces cherchées. Cette méthode que Robins a employée, est préférable à celle où l'on voudroit juger des forces par les portées, & M. d'Arci a rendu plus exacte la machine qu'il a imitée de Robins.

Ces expériences prouvent que plus on augmente la longueur des pièces, plus la force est augmentée; ou du moins, que pour de très-grandes longueurs, l'augmentation qui en résulte, surpasse de beaucoup & l'augmentation du frottement & celle de la résistance de l'air. Au contraire l'augmentation de force produite par une plus grande charge dans un canon de longueur donnée a des limites très-étroites.

La loi de la résistance que l'air oppose aux boulets, étoit un des objets les plus essentiels & en même temps le plus difficile de ces recherches. Robins avoit senti que si la loi qui donne la résistance proportionnelle aux quarrés des vîtesses, a lieu, même pour les fluides élastiques dans de petites vîtesses, elle cesse d'être juste & même approchée, lorsque les vîtesses deviennent très-grandes. Il avoit fait pour déterminer la loi qu'il falloit substituer à cette ancienne loi, une suite d'expériences intéressantes, mais elles étoient bien loin de décider la question. Ce même objet a occupé

M. d'Arci jufqu'à la fin de fa vie; avec des inftrumens meilleurs & un plan de recherches mieux combiné, il avoit des reffources mathématiques plus étendues que celles de Robins, mais il n'étoit point fatisfait encore des réfultats de fes expériences & de fes calculs ; & cette févérité pour lui-même, qui nous a privés du fruit de fon travail, eft une raifon de plus pour en regretter la perte.

Attaché comme Colonel à la fuite du régiment de Fitz-james en 1752, M. d'Arci fit avec ce Corps la campagne de 1757, & fe trouva à la bataille de Rofbach. Ce régiment, trop affoibli par la perte qu'il effuya dans cette journée, fut obligé de revenir en France; M. d'Arci fut alors employé fous M. le Comte d'Hérouville, à qui l'on avoit confié les préparatifs d'une defcente projetée fur les côtes de la Grande-Bretagne. L'examen que M. d'Arci avoit fait pendant la paix des côtes de l'Irlande, une connoiffance exacte du caractère des habitans & de leurs difpofitions, le poids qu'il pouvoit avoir auprès des reftes du parti Jacobite & des Catholiques, que les précautions injurieufes prifes contre eux avoient ulcérés fans les avoir rendus moins à craindre; fon intrépidité, fon audace, fon éloquence naturelle, pleine de véhémence & d'action, fes connoiffances dans toutes les parties de l'art militaire, enfin des reffources contre les accidens imprévus, reffources qu'on ne peut attendre que de ceux qui joignent à la pratique une théorie profonde, tous ces avantages fembloient rendre M. d'Arci non-feulement utile, mais même néceffaire, pour ainfi dire, au fuccès d'une expédition fur les côtes d'Irlande. Mais ce projet ne fut pas exécuté ; le grade de Brigadier fut la récompenfe des travaux de M. d'Arci, & une foible confolation de l'inutilité de fon zèle. La paix vint bientôt le rendre aux Sciences & à l'Académie; en 1765 il donna un Mémoire fur la durée des fenfations de la vue, celui de fes ouvrages peut-être où l'on voit briller le plus & fon talent pour imaginer des appareils qui conduifent à des expériences exactes & concluantes, & la fagacité avec laquelle il favoit

combiner & varier ſes expériences, pour en tirer des réſultats certains & précis.

Un enfant, en agitant circulairement un charbon allumé, produit l'apparence d'une roue de feu; une roue dentée qui tourne, ne préſente qu'un cercle continu ; une corde ſonore qui vibre avec rapidité, paroît un loſange : ces effets ſont connus de tous les temps.

Ils prouvent que nos ſenſations ont une durée plus grande que celle de l'action de leur cauſe; l'ébranlement produit dans l'organe, ſe prolonge après que le corps extérieur a ceſſé d'agir. Ce fait a lieu vraiſemblablement pour tous nos ſens, & c'eſt de cette circonſtance que, peut-être, on pourra déduire un jour les loix de la compoſition muſicale, ſi ces loix ont leur baſe dans la Nature; mais c'eſt ſur-tout pour le ſens de la vue que ce phénomène eſt ſenſible, parce que c'eſt le ſens pour lequel nous pouvons le plus aiſément nous aſſurer que l'action extérieure a ceſſé, & ſéparer la durée de la cauſe de celle de l'effet.

Perſonne n'avoit encore ſongé à ſoumettre ces obſervations au calcul, à déterminer la vîteſſe néceſſaire pour produire ces apparences, & à meſurer par conſéquent la durée de chaque impreſſion inſtantanée : c'eſt l'objet que s'eſt propoſé M. d'Arci. Il trouva que, pendant une nuit obſcure, la ſenſation que produiſoit un charbon allumé duroit environ huit tierces. Si on fait tourner un cercle où il n'y ait qu'une ouverture, & que derrière on place un flambeau, ce flambeau demeure toujours viſible lorſque le cercle ne met que neuf tierces à faire ſa révolution; plus l'objet a d'éclat & d'étendue, en un mot, plus ſon impreſſion ſur l'organe eſt forte, plus la ſenſation a de durée, & moins il eſt néceſſaire que le mouvement ſoit rapide.

C'eſt l'objet qui frappe le plus vivement nos yeux que l'on voit & qui dérobe la vue des autres. En effet, que l'on faſſe paſſer, ſoit un corps plus viſible devant celui qui l'eſt moins, ſoit un corps moins viſible devant celui qui l'eſt plus, c'eſt toujours le moins viſible qui diſparoît. L'objet qui

qui produit une ſenſation continue, quoiqu'il n'ait frappé les ſens qu'un inſtant, fait une impreſſion plus foible que s'il agiſſoit pendant tout ce temps ſur l'organe; ou plutôt on a une ſenſation mixte qui, lorſque la différence de l'éclat eſt très-grande, ne paroît qu'un affoibliſſement de la plus grande lumière, mais qui, ſi l'inégalité eſt moindre, eſt un véritable mélange des deux ſenſations.

Ainſi un corps peut paſſer devant nos yeux ſans être vu, & ſans marquer ſa préſence autrement que par l'affoibliſſement de l'éclat des objets qu'il couvre.

Ainſi lorſqu'on fait tourner des cartons peints de jaune & de bleu, on n'aperçoit qu'un cercle continu de couleur verte. Ainſi les ſept couleurs du priſme, en tournant rapidement, produiſent un blanc-obſcur, & d'autant moins obſcur que le mouvement eſt plus rapide.

Comme cette durée de la ſenſation augmente avec l'éclat de l'objet, il auroit été intéreſſant de connoître ſuivant quelles loix l'augmentation de la durée ſuit celle de l'intenſité de la lumière. On auroit pu chercher réciproquement de combien l'intenſité de la lumière d'un objet que le mouvement rend continuellement viſible, ſe trouve dégradée; mais de telles expériences offroient une difficulté preſque inſurmontable, & M. d'Arci en avoit éprouvé déjà beaucoup pour ſes premières expériences. L'état de ſa vue l'avoit obligé de ſe fier à d'autres yeux que les ſiens, & ces nouvelles recherches exigeoient une attention & une immobilité qu'il eût obtenues difficilement d'un obſervateur qui n'auroit été ſoutenu dans ce travail ſi pénible, ni par l'eſpérance de la gloire, ni par le plaiſir de ſuivre ſes propres idées.

L'eſprit qui a conduit M. d'Arci dans ce travail, le guidoit également dans tous ſes ouvrages de phyſique, on le voit toujours occupé de comparer à la théorie mathématique, les réſultats des obſervations. Il cherchoit dans l'expérience les élémens ſur leſquels le calcul doit s'exercer, & les fondemens

d'après lesquels la Géométrie peut conduire à la découverte des loix de la Nature. En même temps il se servoit des Mathématiques pour ne demander aux expériences que ce qu'on peut en attendre, & pour les forcer à ne rien refuser de tout ce qu'elles peuvent donner.

Tel est en particulier l'objet d'un Mémoire sur les machines hydrauliques, imprimé en 1754; Mémoire dans lequel M. d'Arci montre combien il est facile de s'égarer en cherchant par l'expérience les loix des effets susceptibles d'un *maximum* ou d'un *minimum*, & indique en même temps comment on peut former un systême d'expériences qui, même dans ce cas, conduise à la découverte de ces loix.

On remarque également dans tous ses ouvrages, des vues ingénieuses & philosophiques; l'Auteur présente toujours ses recherches comme des essais qu'il se propose d'étendre & de perfectionner, mais le temps d'y mettre la dernière main lui manquoit. Il avoit l'ambition de son état, la seule ambition excusable, la seule qui puisse être utile. Son ardeur pour les Sciences ne s'étoit point affoiblie par les distractions auxquelles deux guerres l'avoient forcé, plusieurs même de ses travaux sont datés de l'époque de ces guerres; mais ces longues distractions lui avoient fait perdre l'habitude du travail, & l'habitude plus nécessaire encore de suivre long-temps un même objet & une même idée. Comme il voyoit les objets en grand, comme il vouloit porter dans ses expériences une précision rigoureuse, le défaut de temps, les bornes de sa fortune ne lui ont trop souvent permis d'exécuter qu'une foible partie de ce qu'il avoit conçu.

D'ailleurs M. d'Arci vivoit dans le monde, & avec une belle figure, une taille avantageuse, un caractère ardent, une ame active, il étoit difficile qu'il ne se laissât point entraîner à une dissipation dont sa constitution lui permettoit d'oublier la fatigue pour n'en sentir que les plaisirs; & l'emploi de ses talens pour les Sciences a dû souffrir quelquefois des autres avantages que la Nature lui avoit donnés.

En 1770, M. d'Arci devint Maréchal-de-camp & Pensionnaire de l'Académie; il parut alors s'attacher plus particulièrement à cette Compagnie, il la regardoit comme sa patrie, & comme une République où il vouloit être un citoyen considéré, mais seulement un citoyen. Les droits, & sur-tout la liberté de l'Académie, paroissoient son premier intérêt, l'apparence de la plus légère atteinte portée à ces objets sacrés pour lui, suffisoit pour exciter son indignation, il croyoit que la liberté valoit mieux encore que la paix; opinion républicaine qu'il est dangereux d'exagérer, & dont il seroit peut-être facile d'abuser, en l'appliquant au régime d'une Compagnie savante, où ce ne sont pas, comme dans les associations politiques les avantages des citoyens, mais les progrès des Sciences, qui doivent être le premier but de la société.

L'héritage d'un oncle que M. d'Arci avoit en France, & qui lui avoit servi de père, des récompenses militaires & des intérêts dans les mines, où il avoit fourni à la fois des fonds & des vues utiles, avoient augmenté sa fortune; il crut devoir la partager avec une nièce élevée à Paris sous ses yeux, & dont il avoit long-temps observé avec intérêt l'esprit, le caractère & les vertus naissantes; il l'épousa en 1777, & prit alors le nom de Comte d'Arci : il étoit dans l'âge où la société générale offre à peine des distractions, où elle coûte plus qu'elle ne donne, & où tous les hommes qui ne sont dominés ni par l'ambition, ni par la passion de l'étude, sentent le besoin d'une société intime & domestique. En épousant sa nièce, M. d'Arci espéroit assurer leur bonheur mutuel; le mariage avoit resserré des liens déjà chers à tous deux; l'habitude de se voir & de s'aimer avoit fait disparoître la distance qu'auroit pu mettre entr'eux l'inégalité des âges; l'autorité d'un mari perdant ce qu'elle a d'imposant entre les mains d'un étranger, & douce comme l'autorité d'un père, ne devoit plus paroître un joug, mais un appui; enfin, dès les premiers momens de leur union, ils pouvoient se flatter d'éprouver le bonheur de cette con-

fiance intime, de cette amitié pure & inaltérable qui, dans les unions ordinaires, ne peut être que le fruit d'une tendresse constante, & qui en est la plus douce récompense. Cette union qui auroit dû être si heureuse dura peu, M. d'Arci mourut, d'un *cholera-morbus,* le 18 Octobre 1779, n'ayant vécu avec sa femme qu'assez de temps pour qu'elle apprît à sentir toute l'étendue de la perte qu'elle a faite.

M. d'Arci avoit des amis dans le monde, parmi les Militaires, dans l'Académie; s'il avoit eu un caractère liant & facile, on en concluroit seulement qu'il étoit aimable, & non qu'il fût digne d'être aimé; mais avec un caractère ferme, indépendant & facile à s'irriter, il ne put avoir des amis que parce qu'il sentoit le prix de l'amitié, qu'il en connoissoit les devoirs, & qu'il savoit la mériter.

Les Irlandois qui venoient chercher un asyle en France, trouvoient dans M. d'Arci un protecteur, ou plutôt un ami. Il partageoit avec eux sa fortune, s'occupoit de leurs intérêts, suivoit leurs affaires avec chaleur, employoit pour eux le poids que lui donnoit sa réputation & le crédit de ses amis. Il consoloit ou servoit l'infortune, défendoit ou appuyoit le talent, & ne protégeoit ni l'avidité ni l'intrigue, malheur où tombent si souvent ceux qui obligent, moins par bienfaisance, que par vanité ou par foiblesse.

On remarquoit en lui un penchant pour les Anglois, qui sembloit contraster avec l'ardeur qu'il avoit montrée contre l'Angleterre; c'est que la différence des Gouvernemens ne forme pas la différence des Nations. Une même langue, la ressemblance des mœurs & des opinions politiques, les mêmes goûts, le même amour de la liberté, font un seul peuple des Irlandois & des Anglois. En plaignant sa Nation opprimée par l'Angleterre, en détestant la domination des Anglois, M. d'Arci aimoit la nation Angloise, étoit fier de ses succès dans tous les genres, même de ses succès militaires, quoiqu'il les vît avec douleur. Les Grands-hommes, les Savans d'Angleterre étoient ses compatriotes; la consti-

tution Angloiſe, celle ſous laquelle il eût préféré de vivre, le Prince ſeul étoit étranger pour lui. Ainſi M. d'Arci réuniſſoit, comme pluſieurs de ſes compatriotes, deux paſſions qui paroiſſent contradictoires, & qui ne ſont que deux modifications d'un même ſentiment, l'amour de ſa patrie & des loix de ſon pays, avec la haine de ſon gouvernement.

Dans un voyage qu'il fit en Irlande en 1767, un de ſes oncles lui offrit une fortune conſidérable s'il vouloit s'y établir; il la refuſa, ne voulant pas habiter dans un pays libre en apparence, mais que par des formalités tyranniques l'Angleterre tenoit ſous le joug, dans un pays où il eût fallu vivre privé des droits de citoyen, ou les acheter par un parjure. Il paſſa à Londres dans le même voyage : les Anglois le traitèrent comme un homme qui faiſoit honneur à la Nation britannique, & qui, par ſon refus même de reſter ſous leur domination, avoit acquis un nouveau titre à leur eſtime: ſon nom cependant ne fut point inſcrit dans la liſte de la Société Royale, la Loi l'avoit proſcrit; mais l'eſtime publique & la généroſité de la Nation angloiſe protégeoient ſa perſonne contre les attentats de la Loi. Ainſi, chez ce peuple ſi orgueilleux de ſa liberté & de ſa légiſlation, il exiſte auſſi des Loix auxquelles la raiſon & l'honneur défendent d'obéir.

La mort a frappé M. d'Arci préciſément dans l'inſtant où la Nation irlandoiſe alloit reprendre, par ſon courage, une liberté que ſes diviſions & le fanatiſme lui avoient fait perdre: il auroit vu les Miniſtres d'Angleterre forcés de reconnoître des droits qui appartiennent aux Irlandois, comme hommes plutôt encore que comme citoyens, & dont la juſtice ne permet pas à une Nation de priver un peuple ſur lequel elle croit avoir le droit de régner: il auroit vu la conduite ferme & modérée de ſes compatriotes forcer la Nation angloiſe à entendre aſſez bien les intérêts de ſa puiſſance & de ſon bonheur, pour aimer mieux avoir des frères que des eſclaves; & un peuple-roi, inſtruit par ſes malheurs, donner, trop à regret peut-être, un exemple de juſtice à l'égard d'un

peuple-ſujet, exemple unique dans l'Hiſtoire, & que l'Angleterre doit ſe repentir de n'avoir pas donné quelques années plus tôt. Cette révolution eût été pour M. d'Arci le jour le plus heureux de ſa vie, mais le ſort lui envioit cette conſolation, & ſes derniers regards n'ont pas vu la liberté de ſon pays.

La place de Penſionnaire-Géomètre, qu'occupoit M. d'Arci, a été remplie par M. l'abbé Boſſut, déjà Aſſocié dans la même Claſſe.



MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

MÉMOIRES



MÉMOIRES DE MATHÉMATIQUE ET DE PHYSIQUE,

TIRÉS DES REGISTRES de l'Académie Royale des Sciences.

Année M. DCCLXXIX.

MÉMOIRE SUR LES LAINES DE FRANCE, COMPARÉES AUX LAINES ÉTRANGÈRES.

Par M. DAUBENTON.

LES avantages du Commerce sont d'autant plus grands, que l'on connoît mieux les choses qui en sont l'objet : l'appât du gain est un puissant aiguillon pour exciter l'industrie

Lû à la Séance de la S.t Martin, 1779.

des Commerçans; mais ſouvent l'induſtrie la plus ſubtile ne donne que des connoiſſances fautives, ſi elle n'eſt appuyée ſur les principes des Sciences.

Il y a dans les productions de la Nature un degré de perfection qui eſt au-deſſus de la portée de nos ſens, & que nous ne pouvons apercevoir ſans le ſecours des inſtrumens qui rendent nos yeux plus perçans: ces moyens ſont abſolument néceſſaires pour diſtinguer avec préciſion les différences qui ſe trouvent entre les laines par rapport à leur fineſſe.

Le Commerçant qui a les meilleurs yeux & qui eſt le plus exercé dans le choix des laines, ne peut diſcerner ſi les filamens d'une laine ſuperfine ſont plus déliés que ceux d'une autre, lorſqu'il n'y a qu'une légère différence entr'elles: cependant cette petite différence influe beaucoup ſur le prix de cette marchandiſe & ſur la qualité des Étoffes que l'on en fait.

Tant que l'on n'aura pas un moyen ſûr pour diſtinguer les différens degrés de la fineſſe des laines, on ſera expoſé à de grandes mépriſes ſur celles que l'on vend, que l'on achette & que l'on emploie: on fera venir à grands frais des laines étrangères qui ſeront ſouvent inférieures à celles de ſon propre pays: le prix en ſera toujours arbitraire; le Manufacturier achettera au haſard des laines dont il ne connoîtra la valeur qu'après les avoir employées; la qualité de ſes étoffes ne ſera pas proportionnée aux prix de la laine.

Ces grands inconvéniens dans le Commerce, ne ſont pas les ſeuls qui réſultent du défaut de connoiſſance ſur le degré de fineſſe des laines: il y en a un autre qui n'eſt pas de moindre conſéquence. Faute de connoître les différences qui ſont entre les laines ſuperfines, on ne peut ſe conduire qu'à l'aveugle pour l'amélioration ou pour le maintien de cette production dans les troupeaux; on ne ſait ſi la laine des béliers que l'on donne aux brebis, les ſera dégénérer ou les perfectionnera.

Cette incertitude m'auroit empêché de donner aux expériences que j'ai faites ſur la production des laines autant de

précision que je le desirois : j'ai été obligé de mesurer le diamètre des filamens de la laine pour reconnoître & comparer leurs différens degrés de finesse; j'ai pris cette dimension exactement par le moyen d'un micromètre, que j'ai fait tracer exprès pour cet usage sur une lame de cristal de roche, par la machine à diviser de M. Megnié.

Ayant observé, avec cet instrument appliqué au microscope, tous les échantillons que j'ai pu avoir des laines, non-seulement de France, mais aussi des pays étrangers, j'ai vu qu'il n'y a point de laine, même des plus grosses, qui n'ait des filamens très-fins, dont le diamètre n'est que la 560.[e] partie de la ligne du pied-de-roi.

J'ai en même temps reconnu que les laines les plus fines ont des filamens dont le diamètre va jusqu'à la 140.[e] partie d'une ligne. J'ai fixé à ce point le premier terme de la laine superfine, parce que je n'ai pu trouver aucune laine dont tous les filamens fussent plus fins ou qui n'en eût point d'aussi gros.

Toutes les laines ayant des filamens très-fins, on ne peut distinguer les différens degrés de la finesse & de la grosseur de la laine que par les filamens les plus gros: on les trouve facilement, car ils sont toujours à l'extrémité des flocons de la toison, que l'on appelle *mèches*.

Il n'y a qu'un 10.[e] de ligne entre les côtés parallèles des carrés du micromètre dont je me sers pour mesurer le diamètre des filamens des laines; il est placé au foyer de l'oculaire du microscope; la lentille grossit quatorze fois; par conséquent le diamètre d'un filament de laine qui est au foyer de cette lentille, & qui paroît occuper par sa largeur un carré entier du micromètre, n'est que de la 140.[e] partie d'une ligne.

Toute laine dont les plus gros filamens ne remplissent par leur largeur qu'un carré du micromètre, est donc une laine superfine au premier degré, c'est-à-dire une des plus fines de toutes les laines que j'ai pu avoir. Cette connoissance étant acquise, j'ai fait les mêmes observations sur les laines les plus

groſſières, & j'ai vu que la largeur de leurs filamens les plus gros occupoit juſqu'à ſix carrés du micromètre, qui valent la 23.ᵉ partie d'une ligne.

Je dois faire remarquer ici qu'il ne s'agit que des filamens de vraie laine, & non pas de ceux du jarre, qui ne ſont que des poils durs mêlés avec la laine: les plus gros de ces filamens rempliſſent juſqu'à onze carrés du micromètre, & leur diamètre eſt par conſéquent la 12.ᵉ partie d'une ligne. Il y a des jarres moins gros, & même d'auſſi fins que des filamens de laine ſuperfine; mais pour peu que l'on ſoit exercé à l'examen des laines, on reconnoît aiſément le jarre.

Il ne ſuffiſoit pas de connoître les termes extrêmes des laines les plus fines & les plus groſſes, il falloit encore fixer des termes intermédiaires pour diſtinguer différentes ſortes de laines par rapport à différens degrés de fineſſe & de leur groſſeur pour l'emploi que l'on en fait dans les Manufactures.

On déſigne ces différentes ſortes par les dénominations de *laines ſuperfines, fines, mi-fines, moyennes, mi-groſſes & groſſes,* mais on n'a aucune règle ſûre pour les diſtinguer: ces dénominations varient très-ſouvent; la même laine, au même degré de fineſſe, eſt regardée comme fine dans un pays, & comme ſuperfine dans un autre: cette incertitude occaſionne beaucoup de mépriſes dans le Commerce, par ignorance ou par ſupercherie.

J'ai tâché de fixer toutes ces dénominations, en indiquant les degrés de fineſſe de la laine auxquels on peut les rapporter: cette diviſion des laines en différentes ſortes eſt arbitraire; elle n'a été imaginée que pour la commodité des Manufacturiers. La Nature ne produit pas ces différentes ſortes de laines ſéparément les unes des autres, au contraire on en trouve pluſieurs mêlées enſemble dans la même toiſon & dans la même mèche: il faut en faire le triage pour avoir les laines ſuperfines, les laines fines, & d'autres ſortes qui ſont néceſſaires pour différens emplois dans les Manufactures.

La diviſion des laines en différentes ſortes étant arbitraire, je me ſuis propoſé d'en faire une qui fût d'accord, autant

qu'il ſeroit poſſible, avec les notions reçues parmi les Commerçans, & qui pût leur ſervir de guide dans leurs conventions.

J'ai fait voir qu'une laine eſt ſuperfine au premier degré, lorſque le diamètre de ſes plus gros filamens n'eſt que d'une 140.e partie de la ligne : ce premier terme eſt certain par les preuves que j'en ai données; mais quel eſt le dernier terme de la laine ſuperfine ? à quel degré de fineſſe la laine doit-elle perdre le nom de ſuperfin & prendre le nom de fin ?

Pour réſoudre cette queſtion, j'ai obſervé vingt-neuf échantillons de laines qui venoient de magaſins & de manufactures où elles étoient regardées comme ſuperfines. Ayant reconnu, par des obſervations ſoigneuſement répétées, que les gros filamens de ces laines occupoient rarement plus de deux carrés du micromètre, j'ai fixé le dernier terme des laines ſuperfines à celles dont les plus gros filamens rempliſſent par leur largeur deux carrés du micromètre, & dont le diamètre eſt de la 70.e partie d'une ligne.

Après les laines ſuperfines, j'en diſtingue quatre autres ſortes, ſous les dénominations de *laines fines*, de *laines moyennes*, de *groſſes laines* & de *laines ſupergroſſes*, ce qui fait en tout cinq ſortes de laines depuis la plus fine juſqu'à la plus groſſe.

Cette diviſion eſt plus commode & plus exacte que celles qui ont été imaginées juſqu'à préſent; elle partage en cinq parties égales la différence qui ſe trouve réellement entre les laines les plus fines & les plus groſſes.

Quoique les dénominations de *mi-fin* & de *mi-gros* ſoient en uſage, je les ai ſupprimées, parce que j'ai reconnu, après pluſieurs eſſais, que cette multiplicité de noms rendoit leur ſignification équivoque. Les cinq ſortes de laine que je diſtingue s'accordent avec la progreſſion de la Nature dans la production des laines, par rapport à leur fineſſe & à leur groſſeur : celles que j'appelle *moyennes* le ſont réellement, puiſqu'elles correſpondent au terme moyen entre les deux extrêmes des laines ſuperfines & des ſupergroſſes : les laines

fines & les groſſes ſont placées à égales diſtances entre les laines moyennes & les laines ſupergroſſes & ſuperfines. Voilà donc une nomenclature ſimple, exacte & applicable aux laines de tous les pays, ſans qu'elle puiſſe varier, ſuivant les intérêts des Propriétaires, des Commerçans & des Manufacturiers.

Les laines de chaque ſorte ont différens degrés de fineſſe ou de groſſeur, puiſque les diamètres des filamens qui indiquent leurs dénominatious, varient de la 140.e partie d'une ligne. Quoique cette différence paroiſſe peu conſidérable, elle eſt importante pour la valeur & le prix des laines: il faut néceſſairement diſtinguer dans chaque ſorte des laines de deux qualités différentes; celles de la première ſont les plus fines, & celles de la ſeconde ſont les plus groſſes.

Cette diſtinction eſt plus néceſſaire pour les laines ſuperfines & pour les laines fines que pour les autres, parce qu'elles ſont d'un plus haut prix, & que l'on en fait des ouvrages où les différens degrés de fineſſe ſont plus intéreſſans.

En admettant un plus grand nombre de ſortes de laines; j'aurois pu ſupprimer la diſtinction de deux qualités dans chaque ſorte, mais je ſerois tombé dans un grand inconvénient: j'aurois rendu la connoiſſance des laines fort équivoque, beaucoup plus difficile, & peut-être impoſſible pour les Bergers & les autres gens de la campagne, & pour la plupart des Marchands.

On ne peut ſe paſſer du microſcope pour déterminer avec préciſion tous les degrés de fineſſe de la laine par les différentes grandeurs du diamètre de ſes filamens, pour limiter les différentes ſortes de laines, pour les faire connoître dans leur état actuel & montrer à la poſtérité les changemens qu'elles auront éprouvés dans les temps à venir: mais je ſuis fort éloigné de propoſer à tous les Marchands, à tous les Propriétaires de troupeaux & aux Bergers, d'avoir des microſcopes pour reconnoître les différentes ſortes de laines; il n'y a que les Commerçans & les grands Manufacturiers qui doivent ſe ſervir de cet inſtrument; il leur ſera très-utile,

& même abſolument néceſſaire, toutes les fois qu'ils ſeront obligés de connoître exactement le degré de la fineſſe des laines dans des cas importans à leur commerce ou à leurs fabriques.

Pour l'uſage ordinaire, il ſuffiroit d'avoir des échantillons des cinq ſortes de laines, qui auroient été vérifiés au microſcope, & auxquels on compareroit les laines dont on voudroit connoître le degré de fineſſe ou de groſſeur; une ſeule perſonne pourroit en peu de temps choiſir & éprouver au microſcope, un très-grand nombre de ces échantillons pour les diſtribuer par-tout où il ſeroit néceſſaire.

De petits flocons de ces laines étant épars & appliqués ſur un velours, ou ſur un drap noir, on voit leurs rapports avec les laines dont on veut connoître la fineſſe ou la groſſeur.

On pourroit auſſi avoir pour objets de comparaiſon des fils d'argent trait, du même diamètre que les filamens des cinq ſortes de laines; le métal auroit bientôt perdu ſon éclat, & prendroit une couleur approchante de celle de la laine. Je crois qu'il ſe fait du fil d'argent auſſi fin que les filamens de la laine ſuperfine au premier degré; car M. Tillet, actuellement Directeur de l'Académie, m'a donné un échantillon de fil d'or qui n'a en diamètre que la 70.e partie d'une ligne, & qui eſt par conſéquent d'une groſſeur égale à celle de la laine ſuperfine de la dernière qualité. On pourroit ſans doute faire du fil d'argent plus délié, & avoir des échantillons qui correſpondroient aux différentes ſortes de laine : ces échantillons ne ſeroient pas ſujets aux accidens qui détruiſent la laine, mais je ne les ai pas eſſayés; je ne ſais s'ils rempliroient mes vues.

Il y auroit encore un autre moyen pour reconnoître les différentes ſortes de laine, qui ſeroit plus ſimple pour les gens de la campagne : on pourroit leur indiquer, ſur différentes parties du corps d'un animal qui ſe trouveroit dans tous les pays, le poil qui auroit à-peu-près le même diamètre que les filamens de chaque ſorte de laine : le duvet de la fouine eſt auſſi fin que la laine ſuperfine au premier degré; le gros

poil eſt à peu-près de même groſſeur que la laine ſuper-groſſe. J'ai trouvé auſſi des rapports entre le poil d'autres parties du corps de cet animal & les autres ſortes de laines ; mais ces obſervations ne ſont pas aſſez confirmées : je m'en tiens pour le préſent aux échantillons réels des cinq ſortes de laines.

Ces échantillons étant appliqués à deux pouces de diſtance les uns des autres, ſur une étoffe noire expoſée au grand jour, on place la laine que l'on veut comparer entre les deux échantillons qui paroiſſent au premier coup-d'œil y avoir le plus de rapport. Suppoſons qu'elle ſoit entre le fin & le ſuperfin : en examinant attentivement ces trois objets, on reconnoît ſi la laine miſe à l'épreuve reſſemble plus à l'échantillon du fin qu'à celui du ſuperfin ; dans ce cas, elle eſt fine de première qualité ; au contraire ſi elle a plus de rapport avec l'échantillon du ſuperfin qu'avec celui du fin, elle eſt ſuperfine de ſeconde qualité.

Par ce moyen, on ſaura de quelle ſorte ſont les laines, & de quelle qualité dans chaque ſorte ; on en reconnoîtra mieux la valeur & le prix : on pourra choiſir les béliers les plus convenables pour améliorer les laines d'un troupeau par leurs alliances avec les brebis, ou au moins pour les empêcher de dégénérer, comme il n'arrive que trop ſouvent par le défaut d'intelligence pour le choix des béliers.

Ces objets n'étoient pas les ſeuls que j'avois en vue, lorſque j'ai recherché les moyens de conſtater cinq ſortes de laines, & de les faire connoître : je me ſuis auſſi propoſé de comparer exactement les laines de France, ſur-tout les plus fines avec celles des pays étrangers, & de reconnoître à quel point de perfection j'étois parvenu par mes expériences pour l'amélioration des laines.

J'ai fait la comparaiſon des laines dans toute l'étendue qui m'a été poſſible ; j'en ai mis à l'épreuve rigoureuſe du microſcope un très-grand nombre de différentes ſortes, parmi leſquelles il y en a de pays ſi éloignés, que je n'aurois jamais pu me les procurer ſans la protection du Gouvernement qui a toujours

a toujours favorisé mes recherches. Ayant observé ces laines avec la plus grande attention, j'ai reconnu que les plus fines venoient d'Espagne.

J'ai observé un grand nombre d'échantillons des laines superfines qui nous viennent de l'Étranger, je ne les ai pas trouvées au premier degré de finesse.

J'ai aussi vu des laines de Roussillon au premier degré de la seconde qualité de superfin, & des laines de Berri & d'Auxois au dernier degré.

Quoique la grandeur du diamètre des filamens des laines superfines au premier & au dernier degré ne diffère que de la cent quarantième partie d'une ligne, cette différence est très-sensible dans les étoffes fabriquées avec ces deux sortes de laines; cependant le Commerçant ni le Manufacturier ne peuvent absolument pas l'apercevoir dans ses différens degrés sur les laines: aussi arrive-t-il quelquefois que le Fabricant fait les meilleures étoffes avec les laines superfines qui lui ont coûté le moins, parce que toutes les laines qui ont un certain degré de finesse, sont vendues & achetées à l'aveugle.

J'étois dans la même incertitude au milieu des laines de ma Bergerie, avant d'avoir trouvé le moyen de déterminer avec précision leurs différens degrés de finesse; mes yeux, même avec l'aide d'une loupe, me servoient mal; lorsque je consultois les meilleurs Connoisseurs que je pouvois trouver, je les voyois fort indécis, & souvent ils se contredisoient d'un moment à l'autre.

Enfin j'ai mis à l'épreuve invariable du microscope les laines qui ont été améliorées par mes expériences, & j'ai vu avec beaucoup de satisfaction qu'elles étoient parvenues au premier degré de superfin.

Par exemple, la laine d'un Bélier de trois ans est à ce haut degré de finesse, quoiqu'il soit venu d'un Bélier & d'une Brebis, tous les deux métis de races de Roussillon & d'Auxois, dont la laine n'étoit que de la seconde qualité de superfin; ce Bélier & cette Brebis avoient été produits eux-mêmes par

des Béliers de Rouſſillon à laine ſuperfine de la ſeconde qualité, & par des Brebis d'Auxois à laine moyenne.

Par la première génération, la laine ſuperfine du Bélier a changé la laine moyenne de la Brebis en laine ſuperfine de la ſeconde qualité dans l'Agneau qu'ils ont produit. Cette amélioration eſt ſi vraiſemblable, & je l'ai vu tant de fois, que je n'y trouve rien d'extraordinaire; mais je ſuis toujours ſurpris que dans la ſeconde génération, l'Agneau ait eu une laine ſuperfine au premier degré, quoique le père & la mère n'euſſent qu'une laine ſuperfine de ſeconde qualité. J'ai déjà vu pluſieurs fois cet évènement dans la ſuite de mes expériences; je ne puis l'attribuer à l'influence du Bélier ou de la Brebis ſur leur Agneau, puiſqu'il les ſurpaſſe dans la fineſſe de la laine : il faut néceſſairement qu'elle ait été perfectionnée par une cauſe étrangère.

Ce n'eſt pas le choix des alimens, car tous les métis de ma Bergerie ne ſont nourris la plupart du temps que de paille : j'ai toujours eu pour principe, qu'il ne faut jamais favoriſer les expériences de ce genre, mais les faire en toute rigueur.

Mes troupeaux vont aux parcours ſur de petites montagnes & ſur des côteaux ſecs & maigres ; il eſt certain que ces pâturages ſont très-bons pour la production des laines fines; mais quoiqu'il y ait des pâturages de cette nature dans tous les pays montueux, les laines n'y ont pas été améliorées comme dans ma Bergerie.

Je préſume que le plein air auquel mes troupeaux ſont expoſés nuit & jour en tout temps, a beaucoup influé ſur l'amélioration de leurs laines; mais je n'en ai point de preuves convaincantes : je tâche d'en acquérir par des expériences que je fais exprès dans cette vue.

Il eſt toujours très-difficile & ſouvent impoſſible de diſtinguer les différentes cauſes qui influent ſur les productions de la Nature : nous pouvons les rechercher ſans impatience lorſqu'elles produiſent de bons effets. Il eſt certain que l'on peut avoir en France des laines ſuperfines de première qualité,

& même au plus haut degré : l'épreuve que j'en ai faite me paroît aſſez conſtante, aſſez évidente & aſſez répétée pour que les moyens qui l'ont produite puiſſent être utiles au Public. Douze ans d'expériences m'ont déterminé à les expoſer dans une inſtruction pour les Bergers : je la ſoumettrai au jugement de l'Académie, & je la publierai ſi elle eſt jugée digne de ſon approbation.



SECOND MÉMOIRE
SUR LE CAP DE LA CIRCONCISION.

Par M. LE MONNIER.

Lû le 12 Avril 1780.

M. DE LOZIERS-BOUVET, qui réside à Paris actuellement, m'a communiqué une Carte * avec l'extrait de son Journal, qu'il a envoyé, en forme de lettre, à la Compagnie des Indes le 28 Juin 1739, & qui fut lû pour lors à l'Assemblée de l'Académie par feu M. du Fay.

Cette lettre contient seize pages *in-folio*, avec un plan & une vue du cap de la Circoncision, par 54d 3′ de latitude australe, & 26 degrés ½ de longitude estimée, à compter de Ténériffe : on en a imprimé un extrait pour lors dans les Observations sur les Écrits modernes, & M. Buache en a publié un autre, avec une Carte de la plus grande partie de l'hémisphère austral, là où il rapporte les variations observées de l'Aiguille aimantée, tirées des Journaux de M. Bouvet. M. Buache donne, vis-à-vis le cap de la Circoncision, la variation de l'Aiguille par un des compas de route, 6d 30′ du Nord à l'Ouest, & par l'autre 8 degrés; en sorte qu'on peut prendre un milieu, savoir 7 degrés ¼. Le Capitaine Cook, par les mêmes longitudes & latitudes, à ce qu'il croyoit pour lors, a trouvé tout récemment 13 ½ degrés de variation; l'excès est donc près de 6 degrés, & la ligne sans déclinaison & d'autres lignes qui l'avoisinent, n'ont pas varié assurément de la moitié de cette quantité à 54 degrés de latitude australe.

Dès le 15 Décembre 1738, on avoit vu, à 48d 50′ de latitude, par 7 degrés de longitude, des glaces dont la

* Il m'a dit avoir vu quatre fois le cap de la Circoncision, & sa lettre faisoit déjà mention de trois fois : le premier Pilote qui l'avoit découvert, eut vingt piastres de récompense à la vue de deux cents hommes qui formoient l'équipage du Vaisseau.

hauteur étoit de 2 à 300 pieds, & depuis un quart de lieue jusqu'à deux & trois lieues de tour, &c.

Extrait du Journal.

« Le 1.er Janvier, vers les 3 heures après midi, on a vu une terre fort haute qui étoit couverte de neiges & fort embrumée: « elle a paru comme un gros Cap, &c. Cette terre restoit alors « dans l'Est-nord-est, à dix ou douze lieues: les vents en ve- « noient, & nous mimes sur le champ au plus près pour l'aller « reconnoître, étant situés par 54 degrés de latitude & 27 ou « 28 de longitude: ils prétendent que le jour précédent ils « n'en avoient pas passé à plus de trois lieues; mais ce jour-là « ils étoient à la cape; grand vent, grosse mer & brume très- « épaisse le 31 Décembre: le 1.er Janvier, à 10 heures du « soir, par une éclaircie, ils ont vu une très-grosse glace près « d'eux, & qu'ils ont soupçonné avoir bordé la terre. «

Le 6 Janvier, beaucoup d'oiseaux blancs & gros comme « des pigeons: par une éclaircie, ils ont vu une très-grosse « glace à un quart de lieue à l'avant, & la terre à une ou deux « lieues, &c. Ils ont encore vu la terre le 5 Janvier, & plus « près qu'ils ne la croyoient du Vaisseau. »

Extrait d'une Lettre de M. la Vigne-Buisson, écrite de Saint-Malo, à M. Loziers-Bouvet, & communiquée à l'Académie le 19 Avril 1780.

Cette lettre, écrite tout récemment par un ancien Capitaine de Vaisseau de la Compagnie des Indes, lequel a commandé ensuite dans le Port de l'Orient, nous fournit encore un témoignage authentique de la découverte du Cap, à 54 degrés de latitude.

« Mon Journal de notre voyage des Terres australes, a eu à peu-près le même sort que le vôtre; l'original, qui n'étoit « qu'un brouillon, s'est trouvé perdu, &c. «

Pour moi, qui avois des yeux de vingt-six ans, j'affirme- « rois sur mon honneur & sur ma vie, que je n'ai cessé de «

» voir la terre (du Cap) pendant neuf ou dix jours, toutes les
» fois que la brume ne nous en a pas empêché, & j'en étois si
» fort persuadé, que le seul jour qui annonça, au lever du Soleil,
» un temps clair & propre à envoyer des bateaux à terre, moi
» étant de quart, m'ayant ordonné de mettre notre chaloupe
» de pêche à la mer, & m'ayant commandé pour m'y em-
» barquer & faire la reconnoissance de cette terre, je ne vous
» fis aucune représentation, & j'étois prêt à partir lorsque le
» temps s'obscurcit par la brume épaisse qui couvrit tout d'un
coup l'horizon ».



ADDITIONS AUX DÉCOUVERTES
DÉJA PUBLIÉES
SUR LE CAP DE LA CIRCONCISION.

Par M. LE MONNIER.

IL y a environ un mois qu'on a produit dans l'Aſſemblée le Journal d'un Pilote du Vaiſſeau *l'Aigle*, de la Compagnie des Indes, dont l'extrait m'ayant été communiqué par M. Bori, eſt reſté au Secrétariat. Ce Journal avoit été annoncé comme une pièce abſolument contraire à la découverte du Cap ou île auſtrale de la Circonciſion : or dans ce même Journal, on trouve au contraire que ce Pilote a vu & relevé douze fois les terres du cap de la Circonciſion, depuis le 1.er Janvier juſqu'au 8 du même mois de l'année 1739 : on y trouve auſſi quelques Obſervations ſur la variation de l'aimant, qui donneroient la poſition de ce Cap encore plus dans l'Oueſt que je ne l'avois cru devoir établir par les Obſervations publiées juſqu'à ce jour. Lû le 3 Mai 1780.

Dans la dernière aſſemblée du 29 Avril, on a encore produit un calcul de la longitude de ce Cap, fondé ſur une ſuppoſition que je n'admets nullement, au ſujet des variations de l'Aiguille aimantée : on y poſe pour point fondamental de la queſtion, qu'à 5 degrés de variations de l'Aiguille, à la latitude de 54 degrés, répondent 10 degrés en longitude géographique, au lieu de 8 degrés ſeulement que j'ai cru devoir établir dans nos Mémoires de 1776, *page 667 ;* car la ligne ſans déclinaiſon a dû être, vers 54 degrés de latitude, en 1775, à 5 degrés de longitude, à compter de l'île de Fer ; & puiſque le Capitaine Cook, dont j'emprunte uniquement ici les Obſervations, comptoit 27 degrés de longitude lorſque la variation de l'Aiguille étoit 13 degrés $\frac{1}{2}$, il eſt clair qu'à proportion, pour 5 degrés de variation on ne doit admettre

que 8 degrés de différence en longitude géographique à la latitude de 54 degrés australe, & sous le Méridien du Cap de la Circoncision.

Or d'après cette supposition, déjà trop forcée, de 10 degrés au lieu de 8 degrés, on embarrasse la question, par l'effet des lieues parcourues, qui ne sont plus lieues marines, & par les courans; comme si les courans qui ont lieu proche l'Afrique, 20 degrés moins au sud & à l'attérage du cap de Bonne-espérance, pouvoient influer sur une mer aussi éloignée du continent d'Afrique que doit l'être celle qui environne le cap, ou plutôt l'île de la Circoncision. Quoique j'aie déjà recueilli avec soin dans le Mémoire qu'on veut attaquer, tout ce qui concerne la position de la ligne sans déclinaison de l'Océan atlantique dans la partie du Sud, comme aussi les rapports qui se trouvent aux approches de cette ligne, entre les degrés de longitude & les variations observées du compas ou de l'Aiguille aimantée, on ne sera peut-être pas fâché de trouver ici la suite des Observations faites au-delà du 27.e degré de longitude, par le Capitaine Cook & les autres Officiers du Vaisseau *la Résolution;* d'autant que plus on s'éloigne de la ligne sans déclinaison, plus le rapport augmente entre les variations observées du compas & les degrés de longitude géographique. Voici l'extrait du Livre publié à Londres en 1777, sous ce titre : *The original Astronomical Observations made in the course of a Voyage towards the south Pole, &c.*

1.° A la *page 383*, il est dit que le 14 Février 1775, par 56^d 14$'\frac{1}{2}$ de latitude australe (& par conséquent 2 degrés $\frac{1}{4}$ plus au Sud que le cap de la Circoncision, sous le Méridien duquel le Vaisseau *la Résolution* devoit alors se trouver), la longitude étoit 4^d 50$'$, c'est-à-dire, 23^d 1$'$ à compter de l'île de Fer. On observa ce jour-là 6^d 50$'\frac{1}{3}$ de variation du Nord à l'Ouest, grosse mer & vent S. W.

Et à la *page 270*, le 15, à 8^h 24$'$ du matin, la latitude étoit encore 55^d 30$'\frac{1}{6}$, la longitude 5^d 56$'\frac{1}{8}$, mauvaise mer; donc longitude 24^d 7$'$ depuis l'île de Fer.

2.° Le

2.° Le 16 Février, latitude auftrale	54^d 24′ $\frac{1}{6}$		
Longitude	6. 30.		
La variation	12^d 7′	vent S.	
Le même jour	54. 21 $\frac{1}{2}$		
Longitude	8. 6.		
La variation	13. 42 $\frac{1}{3}$	E. S.	
Le 17, vent modéré	54. 25 $\frac{1}{3}$		
Longitude	9. 20.		
La variation	13. 16 $\frac{1}{3}$	N. W.	
Le 21, vent modéré	54. 26.		
Longitude	19. 15.		
La variation	19. 8 $\frac{1}{2}$	vent W.	

Ces variations, comme on voit, ont été obfervées plufieurs fois dans les parties de l'Océan, fituées à l'eft du cap de la Circoncifion, & par une latitude qui peut être cenfée conftante : on s'éloignoit alors davantage du premier Méridien magnétique ou ligne fans déclinaifon, & les rapports des variations, comme j'en ai averti, devoient s'accroître alors ou donner un peu plus de 8 degrés en longitude pour 5 degrés de variations, relativement à ce que j'avois dû conclure aux approches du premier Méridien.

Mais il s'en faut bien, par les Obfervations du 16 & du 17 Février, qu'on trouve les 8 degrés en longitude, ni ce qu'on a voulu porter inutilement jufqu'à 10 degrés dans la dernière affemblée, car on n'auroit d'abord que 6 degrés $\frac{1}{2}$: enfuite prenant un plus grand intervalle de temps & d'efpace parcouru, favoir du 17 au 21 Février, on trouve 9 degrés, à très-peu de chofe près : prenant donc un milieu, je trouve 7 degrés $\frac{3}{4}$ au lieu des 10 degrés qu'on a fuppofés dans le Mémoire lû à la dernière Affemblée; & fi on s'opiniâtroit à retenir les 9 degrés déterminés par les dernières Obfervations du Capitaine Cook, par une longitude qui eft 16 degrés plus à l'Orient que n'eft celle que j'attribue au cap de la Circoncifion, cela ne fauroit détruire les 8 degrés en longitude que je trouve dans l'Oueft de ce Cap, pour une variation

de 5 degrés ou changement obſervé dans la déclinaiſon de l'Aimant, en faiſant route aux environs de ce Cap.

C'eſt donc ſans fondement qu'on a voulu attaquer les valeurs que j'ai aſſignées pour la longitude du cap de la Circonciſion, & que feu M. Buache a voulu placer au moins, conformément aux Journaux de M. Bouvet dont il étoit ſaiſi; ou bien à l'égard de l'île de Fer, 2 degrés plus dans l'Oueſt *, ainſi que les Anglois, ſur le Vaiſſeau *la Réſolution,* en y croiſant, l'ont très-bien reconnu: leurs Capitaines s'étoient emparés à Louiſbourg, en 1743, des originaux de ce Journal, dont M. Buache nous avoit heureuſement conſervé, il y avoit déjà quatre ans, une copie exacte & très-fidèle, & que le célèbre Commandant, M. Bouvet, a bien voulu communiquer tout récemment à l'Aſſemblée & au Dépôt de la Marine, ainſi que ſa lettre écrite à la Compagnie des Indes en Juillet 1739.

* On s'eſt encore mépris dans les 28 degrés $\frac{1}{2}$, & qui ſont les mêmes, à compter de l'île de Fer, que les 26 degrés $\frac{1}{2}$ des Pilotes, à compter du pic de Ténériffe. *Voyez la Pièce paraphée & le Rapport des Commiſſaires de l'Académie, &c.*



OBSERVATIONS DES ÉCLIPSES DES SATELLITES DE JUPITER,

Faites en 1779 à Périnaldo, dans le Comté de Nice, avec une Lunette achromatique de 3 pieds de foyer, & 27 lignes d'ouverture.

Par M. MARALDI.

Lû le 29 Janvier 1780.

MOIS & JOURS.		TEMPS VRAI.	
Janvier...	14	15h 30′ 14″	Immerſion du troiſième Satellite; il fait beau.
	14	18. 35. 37	Émerſion du troiſième; il fait beau.
	18	18. 13. 27	Immerſion du premier; il fait beau.
	20	12. 41. 57	Immerſion du premier; il fait beau.
	21	12. 51. 46	Immerſion du ſecond; il fait fort beau.
Février....	3	16. 25. 50	Immerſion du premier; il fait fort beau, mais ♃ trop proche & preſqu'en conjonction avec la Lune, qui eſt un peu plus boréale.
	4	17. 54. 49	Immerſion du ſecond; très-douteuſe, à cauſe des fortes vapeurs qui ſont dans l'air.
	10	18. 19. 37	Immerſion du premier; il fait beau, mais il fait jour.
	17	15. 36. 3	Immerſion du quatrième; il fait beau: lorſque je ſuis retourné à la lunette, j'ai cru l'entrevoir encore.
	17	15. 37. 7	On ne le voit certainement plus.
	19	11. 17. 31	Immerſion du troiſième; il fait fort beau.
	19	14. 42. 33	Immerſion du premier; il fait fort beau.
	21	9. 11. 15	Immerſion du premier; il fait beau.
	22	12. 21. 14	Immerſion du ſecond; il fait fort beau.

MOIS & JOURS.	TEMPS VRAI.	
Février. . 26	$15^h\ 17'\ 9''$	Immersion du troisième; très-douteuse: fortes vapeurs: on voit très-foiblement les autres Satellites, quoique ♃ soit bien terminé, & qu'on voie distinctement les bandes.
28	11. 6. 14	Immersion du premier; il fait beau, mais la lumière de la Lune m'incommode.
Mars. . . . 1	14. 56. 28	Immersion du second; il fait fort beau.
6	9. 35. 18	Immersion du quatrième; il fait beau, mais ♃ est ondoyant, & j'ai les yeux fatigués.
23	13. 37. 8	Émersion du premier; il fait beau, mais il fait un peu de vent qui agite la lunette.
27	10. 12. 7	Émersion du troisième; il fait beau.
30	15. 33. 12	Émersion du premier; il fait beau.
Avril. . . . 3	14. 11. 28	Émersion du troisième; il fait très-beau.
15	3. 55. 10	Émersion du premier; il fait beau.
20	11. 50. 15	Émersion du second; il fait beau.
27	12. 47. 48	Émersion du second; il fait beau, mais Jupiter est ondoyant & mal terminé.
Mai. 1	12. 15. 29	Émersion du premier; il fait beau.
10	8. 40. 55	Émersion du premier; il fait beau.
15	8. 59. 56	Émersion du second; il fait beau.
16	11. 21. 50	Immersion du troisième; il fait beau.
17	10. 34. 36	Émersion du premier; il fait beau.
22	11. 36. 13	Émersion du second; il fait beau.
Juin. . . . 25	9. 0. 33	Émersion du premier; fortes vapeurs.
Novembre. 12	17. 48. 46	Émersion du quatrième; il fait beau, mais Jupiter est encore un peu ondoyant.
22	17. 25. 34	Immersion du premier; il fait beau.
Décembre. 8	15. 34. 8	Immersion du premier; il fait beau.
15	71. 24. 31	Immersion du premier; il fait beau.
28	17. 37. 54	Immersion du second; il fait beau.
31	15. 32. 33	Immersion du premier; il fait beau.
31	18. 31. 5	Immersion du troisième; il fait beau.

Observation de l'Éclipse de Lune, du 29 Mai 1779, faite avec une Lunette de 7 pieds, garnie d'un réticule de 13 fils parallèles, dont les extrêmes comprenoient le diamètre de la Lune.

MOIS & JOURS.	TEMPS VRAI.	
Mai...... 29	15h 24′ 0″	La Lune sort des nuages, & on voit la pénombre à la vue simple.
29	15. 32. 7	Commencement de l'Éclipse.
29	15. 36. 35	La Lune sort des nuages, & Galilée me paroît couvert.
29	15. 40. 0	L'Éclipse est de deux doigts.
29	15. 45. 15	L'Éclipse est de trois doigts.
29	15. 48. 45	L'ombre à Aristarque.
29	15. 50. 35	L'Éclipse est de quatre doigts.
29	15. 53. 30	L'Éclipse me paroît de cinq doigts : la Lune entre dans les nuages.
29	15. 59. 30	La Lune paroît un moment, & l'Éclipse me paroît de six doigts ; elle s'est cachée ensuite, & je ne l'ai pas pu voir depuis.

Observation de l'Éclipse de Lune, du 23 Novembre 1779.

J'ai observé cette Éclipse avec la lunette achromatique de 3 pieds, qui grossit soixante fois, parce qu'il faisoit un très-grand vent qui m'a empèché de me servir de la lunette ordinaire de 7 pieds, qu'il étoit impossible de tenir à la fenêtre.

MOIS & JOURS.	TEMPS VRAI.	
Novembre. 23	$6^h\ 34'\ 0''$	Pénombre forte.
23	6. 41. 24	Commencement de l'Éclipſe.
23	6. 43. 8	L'ombre à Galilée.
23	6. 44. 20	Galilée couvert.
23	6. 46. 41	L'ombre à Ariſtarque.
23	6. 48. 40	Ariſtarque dans l'ombre.
23	6. 57. 28	L'ombre à Copernic.
23	6. 59. 43	Copernic dans l'ombre.
23	7. 3. 58	L'ombre à Platon.
23	7. 5. 34	Platon dans l'ombre, & la Lune couverte par les nuages.
23	7. 28. 35	L'ombre à *Mare criſium*.
23	7. 34. 10	*Mare criſium* tout dans l'ombre.
23	7. 38. 10	Immerſion douteuſe.
23	7. 38. 44	Immerſion certaine.
23	9. 7. 58	Commencement de l'émerſion entre les nuages qui ont enſuite couvert totalement la Lune; à $9^h\ 30'$, pluie; & je quitte.



MÉMOIRE
SUR LES
LUNETTES DIPLANTIDIENNES
OU À DOUBLE IMAGE,
Et ſur les Objectifs & les Oculaires achromatiques.

Par M. JEAURAT.

28 Août 1779, & lû par extrait à la rentrée publique de la Saint-Martin de cette année.

LES Lunettes que je nomme *diplantidiennes*, ſont celles qui repréſentent tout-à-la-fois deux images d'un même objet, l'une droite & l'autre renverſée; cette conſtruction procure, pour l'obſervation des Aſtres, des avantages que n'ont pas les lunettes ordinaires, qui ne repréſentent qu'une ſeule image pour chaque objet: voici en quoi conſiſtent les avantages de cette nouvelle conſtruction.

Les deux images de l'Aſtre entrent dans la lunette, & en ſortent à la fois par la droite & par la gauche, puiſqu'elles ſont dans des ſens oppoſés, & qu'elles marchent en ſens contraire; ainſi elles vont au-devant l'une de l'autre, ſe ſéparent & ſortent par les côtés oppoſés à ceux par où elles ſont entrées; donc, pour premier avantage, les deux images ont entr'elles des vîteſſes apparentes, doubles de celle d'une ſeule image à l'égard de l'axe fixe & immobile d'une lunette ordinaire.

Après l'entrée de l'Aſtre dans la lunette, & avant ſa ſortie, les deux images, par leur contact, donnent les paſſages des deux bords du diſque de l'Aſtre, ſoit par le plan du Méridien, ſoit par un cercle horaire quelconque; d'ailleurs, le croiſement de deux images, lorſqu'elles ſont précisément l'une ſur l'autre, donne le paſſage du centre, quelle que ſoit la grandeur du diamètre de l'Aſtre : or, cette obſervation intermédiaire, & qui ſe vérifie naturellement par les deux autres, n'a encore pu ſe faire d'aucune manière & avec aucune autre

lunette, & ne se concluoit que de celle des bords du disque de l'Astre, qui s'observent avant ou après le véritable passage cherché.

La construction *diplantidienne* que je propose, a donc l'avantage de doubler la vîtesse du passage des Astres, de rendre l'observation des petites Étoiles aussi facile que celle des plus grandes, & d'être susceptible d'une observation qu'on n'avoit encore pu que déduire de deux autres, savoir, l'observation directe du passage du centre d'un Astre, quelle que soit la grandeur de son diamètre.

Quoiqu'on puisse se dispenser de placer des fils dans cette lunette, néanmoins il sera bon d'y en adapter, parce que, pour les observations aisées à faire, comme celle des Astres dont la force de la lumière est assez considérable pour éclairer les fils de manière à voir tout-à-la-fois l'Astre & les fils, on aura alors la facilité de diriger la lunette dès que l'Astre y entrera, de sorte que les deux images soient toutes deux placées sur le fil qui passe par l'axe de la lunette; car dans ce cas, on sera assuré d'avance que les deux images parcourront exactement le même fil, & que les coïncidences des images se feront comme il convient; autrement il faudroit que, dans l'instant même où on observe dans le méridien le passage & la hauteur du centre de l'Astre, qu'on fasse à la lunette displantidienne le petit changement de hauteur qui convient, pour que le recouvrement exact des deux images se fasse avec la précision que comporte la construction de cette lunette.

D'après les avantages que m'a paru réunir la construction *diplantidienne*, à laquelle personne n'avoit encore pensé, je la proposai le 10 Avril 1778, à M. Navarre, habile Opticien; & après plusieurs conférences que j'eus avec lui à ce sujet, il construisit sa lunette qu'il a présentée à l'Académie: M.rs Cassini de Thury, le Roi & Bailly, en ont fait leur rapport le 2 Septembre 1778, & ont trouvé que le succès de M. Navarre prouvoit qu'il avoit des connoissances en Optique, que n'ont pas ceux qui ne savent qu'exécuter.

Le

Le premier objet que je me propoſe ici, eſt de donner la ſolution générale du Problème dont M. Navarre a réſolu lui-même le cas de la conſtruction qu'il a adopté : je vais donc donner ici la relation générale entre les foyers des lentilles & les diſtances que les lentilles doivent avoir entr'elles; ainſi, avec trois lentilles de foyer quelconque, on conſtruira toujours, & ſans recherche haſardée, une lunette qui procurera complètement l'effet propoſé, & quand on n'aura pas atteint exactement les foyers qu'on ſe ſera propoſés, d'après les Tables que je donne, on pourra calculer directement, d'après les foyers exécutés, quelles ſeront les diſtances qu'on devra adopter pour produire l'effet demandé. Enſuite je donne des meſures d'objectifs *achromatiques*, que je crois préférables à celles que j'ai données, *Mémoires de l'Académie, année 1770, pages 461 & 486.*

L'effet propoſé des lunettes *diplantidiennes*, s'opère d'une manière ſimple, moyennant trois objectifs; l'un des trois eſt percé dans ſon milieu, & les deux autres ſont à l'ordinaire, pleins & non percés.

L'objectif percé, que je nomme *objectif équivalent*, forme naturellement une image renverſée, tandis que les deux autres forment enſemble, & par leur effet ſucceſſif & combiné, une image droite en ce même point, alors les deux images formées en un foyer commun, produiſent l'effet requis, & les dimenſions reſpectives des foyers des lentilles, à l'égard des diſtances qu'elles doivent avoir entr'elles, ſe calculent directement d'après les foyers des lentilles, comme on va le voir. Fig. 1.

Relation des foyers des lentilles, & des diſtances qu'elles doivent avoir entr'elles pour produire l'effet d'une double image.

1.° Soit la lentille A, dont le foyer F des rayons parallèles eſt $DA = F$; ſoit auſſi cette lentille A, percée dans ſon centre A de la manière qui convient, pour que les rayons réfractés des objets ne rencontrent pas ceux des deux autres lentilles a & c. Fig. 1.

2.° Soit la lentille a non percée, dont le foyer f des rayons parallèles eſt $Ba = f$, & ſoit la troiſième & dernière lentille C non percée, dont le foyer φ des rayons parallèles ſoit celui qu'il faut pour que l'image B, produite par l'effet de la lentille a, ſoit tranſmiſe & redreſſée en D, même foyer que celui que produit la ſeule lentille A.

Alors il ſe formera en D une image de ſituation droite, par l'effet ſucceſſif des lentilles a & c, & une autre image de ſituation renverſée, par l'effet de la ſeule lentille percée A.

De plus, ſoit
- $Da = x$, diſtance de la lentille a au foyer commun D,
- $DC = y$, foyer relatif à la diſtance BC de l'image B tranſmiſe par la lentille C,
- $BC = Da - Ba - DC = x - f - y$,
- r, rayon de la courbure de la lentille C, qu'on ſuppoſe iſocèle,
- p, rapport de la réfraction.

Cela poſé, je ſuppoſe, comme on le voit, que les foyers F, f & φ des rayons parallèles, ſont les données, & que les diſtances Da, Dc, ſont les cherchées, parce que la difficulté d'exécuter des lentilles de foyers, exactement conformes à ceux qu'on ſe preſcrit, eſt très-grande, au lieu qu'on eſpacera toujours de la manière qu'on voudra des lentilles entr'elles, & ſelon que le preſcrira le calcul.

Voici préſentement comme je procède, quant à la ſolution demandée, & le procédé dépend uniquement de connoiſſances ſimples, généralement connues en Optique, & dont M. Navarre a ſi heureuſement fait application dans *ſon Mémoire le 2 Septembre 1778.*

La lentille C tranſmettra l'image B en D, ſi DC ou $y = \frac{r \times BC}{2BC(p-1)-r}$, c'eſt-à-dire, ſi $= y \frac{r(x-f-y)}{2(x-f-y)(p-1)-r}$.

Mais φ eſt le foyer des rayons parallèles, ainſi on a

$$r = 2(p - 1)\varphi;$$

donc l'équation

$$y = \frac{r(x-f-y)}{2(x-f-y)(p-1)-r},$$

donnera pour première condition

$$\varphi = \frac{y(x-f-y)}{x-f}.$$

D'une autre part, les grandeurs des images ſont dans le rapport des diſtances focales; ainſi, la lentille A qui produit en D une image, & la lentille a qui produit en B une autre image, ont des groſſiſſemens, dont le rapport eſt celui de F à f.

D'ailleurs, la lentille C qui tranſmet l'image B, & la redreſſe en D, doit en même temps produire en D un groſſiſſement égal à celui de l'image D, produite par la ſeule lentille A dans ce même point D; cette condition de deux images d'égale grandeur, exige donc cette condition-ci,

$$DA \,.\, Ba :: DC \,.\, BC,$$

où . . . $F \,.\, f :: y \,.\, x - f - y$,

ſavoir $F(x - f - y) = fy$;

ainſi les conditions ſont $\left\{\begin{array}{l} \varphi(x-f) = y(x-f-y), \\ F(x-f-y) = fy. \end{array}\right.$

Donc $\left\{\begin{array}{l} \text{pour relation entre les données \& les cherchées } \varphi F(x-f) = fy^2, \\ \text{pour ſolution demandée} \ldots \left\{\begin{array}{l} Da, \text{ où } x = f + \frac{\varphi}{Ff}(F+f)^2, \\ DC, \text{ où } y = \frac{\varphi}{f}(F+f), \\ DA = F. \end{array}\right. \end{array}\right.$

Cette ſolution, qui a toute la généralité qu'on peut deſirer, donne naturellement la conſtruction que voici, pour fixer les diſtances reſpectives des lentilles dont les foyers F, f, φ ſeroient données.

Soit les droites indéfinies yQ, CL, perpendiculaire l'une à l'autre; faites $CK = F + f$, $CE = \varphi$, $CG = f$; tirez la droite GK; alors ſa parallèle ED donnera Fig. 2.

$Dc = \frac{\varphi}{f}(F + f)$ pour la diſtance de la lentille C, au foyer commun D, cette lentille C ayant φ pour foyer des rayons parallèles.

Fig. 2. D'une autre part, menez DM, parallèle à CL; faites $DH = DC = \frac{\varphi}{f}(F + f)$; par les points H & E, menez HE, ſon prolongement EB donnera

$$DB = \frac{\varphi}{Ff}(F + f)^2,$$

faiſant auſſi $Ba = f$; alors

$$Da = Ba + DB = f + \frac{\varphi}{Ff}(F + f)^2.$$

Quant à la lentille A, ſon foyer F en donne directement la poſition, car $DA = F$.

Cas particuliers qui offrent quelques facilités dans la pratique, mais qui ont l'inconvénient d'alonger, & preſque en pure perte, la longueur de la Lunette.

Fig. 1. 1.° Si l'on fait $\varphi = F = f$, on aura $\begin{cases} Da = 5F, \\ DC = 2F; \end{cases}$

dans ce cas, on a un foyer total Da, cinq fois plus grand que le foyer abſolu DA ou F.

2.° f étant comme on voudra, ſi on fait $\varphi = F$, on aura... $\begin{cases} Da = 2(F + f) + \frac{F^2}{f}, \\ DC = \frac{F}{f}(F + f); \end{cases}$

dans ce cas, on a un foyer total Da, plus que double du foyer abſolu F; & ſi on fait $f = \frac{1}{2}F$, la longueur totale Da ſera cinq fois celle du foyer abſolu F.

3.° φ étant comme on voudra, ſi l'on fait $F = f$, on aura.............. $\begin{cases} Da = F + 4\varphi \\ DC = 2\varphi; \end{cases}$

dans ce cas, le foyer total Da sera nécessairement plus grand que le foyer absolu F, mais l'excédant pourra être aussi petit qu'on voudra ; & si on fait $\varphi = \frac{1}{2}F = \frac{1}{2}f$, le foyer total Da sera triple du foyer absolu F; d'ailleurs, les lentilles C & A seront à une même distance du foyer commun D, c'est-à-dire, que le centre de ces deux lentilles sera commun, la lentille C, placée dans le vide même de la lentille A, d'une autre part, les surfaces pourront avoir un même rayon, pourvu que deux surfaces soient planes. Fig. 3.

Voyez *page 42*, la Table première, qui est dressée d'après la supposition de ce cas particulier, & dont le principal défaut est d'employer des surfaces planes, qui est ce qu'il y a de plus difficile à bien travailler. Voyez aussi la Table deuxième, qui répond à la figure quatrième, & où $F = f = 4\varphi$. Fig. 3.

4.° F étant comme on voudra, si l'on fait $f = \varphi$, on aura... $\begin{cases} Da = F + 3f + \frac{f^2}{F}, \\ Dc = F + f; \end{cases}$

dans ce dernier cas, la lentille c sera placée entre les lentilles A & a, & les lentilles a & c seront peu éloignées l'une de l'autre; on aura donc, comme dans les cas précédens, une distance focale relative Da, toujours plus grande que la distance absolue. Par exemple, si l'on fait $F = 4f = 4\varphi$, on aura $Da = \frac{29}{16}F$, & $Dc = \frac{5}{4}F$. Fig. 8.

Passons au cas qu'a adopté avec raison M. Navarre, dans lequel la distance absolue ou équivalente DA égale la distance totale & relative Da.

Cas préférable à ceux qu'on vient d'expliquer, & qui est celui que M. Navarre a adopté, à très-peu de chose près, pour la lunette qu'il m'a construite lorsqu'il a eu dessein de remplir mes vues. Fig. 1.

Laissant de côté l'avantage qu'il y a à construire des lentilles de foyers égaux, & qu'on peut travailler dans les mêmes bassins, pour ne s'occuper que du soin de n'avoir pas

une longueur de lunette plus grande que celle dont l'effet feroit réellement celui d'une lunette d'un moindre foyer, on voit qu'il convient que la longueur totale ou relative Da foit égale à la diſtance focale abſolue DA, ſavoir à celle du foyer des rayons parallèles, repréſentés par DA ou par F; alors ce cas

Fig. 5. eſt celui où $Da = DA$, où $f + \frac{\varphi}{Ff}(F + f)^2 = F$.

D'où l'on tire, pour condition des foyers entr'eux, la

Fig. 5. condition preſcrite que voici; $\varphi = \frac{Ff(F - f)}{(F + f)^2}$.

Cette condition exige que f ſoit moindre que F, car le foyer φ feroit zéro ou négatif, ſi f étoit égal ou plus grand que F.

Ainſi pourvu qu'on faſſe F plus grand que f, on pourra admettre entre F & f, tel rapport numérique qu'on voudra, puis ſe preſcrivant pour foyer des rayons parallèles de la lentille c, la valeur $\varphi = \frac{Ff(F - f)}{(F + f)^2}$, il ne reſtera plus d'autre poſition à chercher que celle de cette lentille c, & ſa poſition à l'égard du foyer commun $Da = F$, fera $Dc = \frac{F(F - f)}{F + f}$, ce qui revient ici à

$$Dc = \sqrt{\left[\frac{\varphi F}{f} (F - f) \right]}$$

Ce cas déduit ſi naturellement de ma ſolution générale, & qui offre un nombre infini de rapports entre F & f, préſente facilement les cinq principaux cas que voici:

1.° Soit $\left\{ \begin{array}{l} Da = F, \\ Ba = f = \frac{3}{5} F, \\ \varphi = \frac{3}{32} F. \end{array} \right\}$ on fera $Dc = \frac{1}{4} F$.

2.° Soit $\left\{ \begin{array}{l} Da = F, \\ Ba = f = \frac{1}{2} F, \\ \varphi = \frac{1}{9} F. \end{array} \right\}$ on fera $Dc = \frac{1}{3} F$.

3.° Soit $\begin{cases} Da = F, \\ Ba = f = \frac{1}{3} F, \\ \varphi = \frac{1}{8} F, \end{cases}$ on fera $Dc = \frac{1}{2} F$.

4.° Soit $\begin{cases} Da = F, \\ Ba = f = \frac{2}{3} F, \\ \varphi = \frac{1}{9} F, \end{cases}$ on fera $Dc = \frac{2}{3} F$.

5.° Soit $\begin{cases} Da = F, \\ Ba = f = \frac{1}{7} F, \\ \varphi = \frac{3}{32} F, \end{cases}$ on fera $Dc = \frac{3}{4} F$.

De ces principaux cas particuliers, celui qui paroît être le plus favorable de tous, eſt le troiſième, ſavoir celui où la lentille *C* ſera placée préciſément au milieu de la diſtance totale *DA* de la lentille, & c'eſt ſur ce principe que, *page 44*, la troiſième Table a été dreſſée : on ſe dirigera donc, à cet égard, d'après cette Table, pour conſtruire les lentilles, & pour les placer comme il convient ; mais quand l'exécution de la conſtruction des lentilles n'aura pas été préciſe pour les diſtances focales des lentilles, on ſe départira des poſitions preſcrites dans la Table, & au lieu d'avoir recours, comme M. Navarre, au tâtonnement de l'écartement des lentilles, on meſurera ſéparément les foyers des rayons parallèles de chaque lentille, puis, avec ces meſures, on les placera entr'elles avec ſûreté, de la manière qui conviendra, moyennant les meſures preſcrites par la formule générale, que je rapporte de nouveau ici, comme devant conſtamment ſervir de règle dans tous les ſyſtèmes qu'on adoptera.

Formule générale de la page 27, *& à laquelle doivent être rapportés tous les cas particuliers qu'on pourra imaginer.*

Diſtance $\begin{cases} Da = f + \frac{\varphi}{Ff} (F + f)^2, \\ DA = F, \\ DC = \frac{\varphi}{F} (F + f). \end{cases}$

Fig. 1. Et aussi pour relation des foyers avec les distances $\varphi F(Da - f) = f \times DC^2$.

La Table troisième sera suivie d'une quatrième, dans laquelle

Fig. 6. la distance relative Da n'est que les $\frac{4}{5}$ de la distance absolue, ou équivalente DA ou F; & dans cette quatrième Table, qu'on trouve *page 45*, on a supposé, pour le cas proposé, la relation des données que voici, ainsi que les distances cherchées qui s'ensuivent, & qui fixent l'arrangement des lentilles entr'elles.

$$\text{Soit } F = 2f = 15\varphi, \text{ on fera } \begin{cases} DA = F, \\ Da = \frac{4}{5} F, \\ DC = \frac{1}{5} F. \end{cases}$$

Voyons présentement quel est le cas qui convient tout-à-la-fois & aux oculaires & aux objectifs à double images.

Cas particulier qui convient tout-à-la-fois aux oculaires & aux objectifs à double images.

Fig. 7. Pour le cas des oculaires, on suppose l'œil placé en y, de manière que ce point y soit placé à une distance Ay, égale au foyer F ou à AD foyer de la lentille percée A, & en même temps à une distance ay, égale à celle du foyer f de la lentille a; ce cas est donc celui de la condition que voici.

$$\text{Condition des oculaires} \begin{cases} Ay = DA = F, \text{ foyer de la lentille percée}, \\ ay = Ba = f, \\ Aa = Ay - ay = F - f. \end{cases}$$

$$\text{Mais, } page\ 27, \begin{cases} Da = f + \frac{\varphi}{Ff}(F + f)^2, \\ DA = F; \end{cases}$$

alors, $Aa = Da - DA$

donne $F - f = f + \frac{\varphi}{Ff}(F + f)^2$,

ce qui assigne au foyer φ des rayons parallèles de la lentille C, la valeur prescrite que voici :

$$\varphi = \frac{2Ff(F - f)}{(F + f)^2}.$$

De plus,

De plus, f doit être moindre que F; car ſi f égaloit F, φ deviendroit zéro, & ſi f étoit plus grand que F, le foyer φ ſeroit négatif, c'eſt-à-dire que la lentille C ſeroit concave : excluant donc les lentilles concaves, qui ne réuſſiſſent que pour les miroirs de réflexion, on ſera f moindre que F, & auſſi $\varphi = \frac{2Ff(F-f)}{(F+f)^2}$. Cela poſé, la ſolution qui convient tout-à-la-fois aux oculaires & aux objectifs à double image, ſera celle-ci.

Condition preſcrite $\varphi = \frac{2Ff(F-f)}{(F+f)^2}$,

Diſtance cherchée... $\begin{cases} DA = F, \\ Da = 2F - f = f + \frac{\varphi}{Ff}(F+f)^2. \\ DC = \frac{2F(F-f)}{F+f} = \frac{\varphi}{f}(F+f). \end{cases}$

Dans ce cas, commun aux objectifs & aux oculaires à double images, le foyer relatif Da ſera plus grand que le foyer abſolu DA, & ſuppoſant, *Table V, page 46*, $f = \frac{1}{2}F$, Fig. 7.

On trouvera........ $\begin{cases} \varphi = \frac{2}{9}F, \\ Da = \frac{3}{2}F, \\ DA = F, \\ DC = \frac{2}{3}F; \end{cases}$

d'ailleurs, ſi l'on veut favoriſer la facilité de l'exécution, par exemple, d'admettre une même courbure pour les lentilles a & c, cette ſuppoſition de $f = \varphi$, donnera

$$f = \varphi = (\sqrt{5} - 2)F = 0{,}23607\, F. \qquad \text{Fig. 8.}$$

Cela poſé,

Les diſtances ſeront $\begin{cases} DA = F = 4{,}23604f = 4{,}23604\varphi, \\ Da = 1{,}76393\, F, \\ DC = 1{,}23600\, F. \end{cases}$

Or, c'eſt dans cette ſuppoſition qu'eſt dreſſée, *page 47*, la ſixième & dernière de mes Tables, pour les conſtructions *diplantidiennes*.

La crainte qu'il y a pour le ſuccès de la cinquième & ſixième Tables, communes aux oculaires & aux objectifs, c'eſt que dans l'application aux oculaires, il pourra arriver que la néceſſité de partager en deux parties l'ouverture totale, afin de laiſſer paſſer librement les différens rayons, ne reſtreigne trop chaque partie de l'ouverture de l'oculaire, l'ouverture totale étant déjà pour l'ordinaire plus petite qu'on ne voudroit, eu égard au champ de la lunette, qu'on a cependant intérêt de rendre le plus grand qu'il eſt poſſible.

Fig. 7. Si on ſupprime la lentille *C*, & ſi on fait la lentille *A* pleine & non percée, il eſt évident qu'on ſe trouve dans le cas des oculaires équivalens qui renverſent les objets, & qui ſont ceux qui réuſſiſſent le mieux dans la pratique.

Avant de paſſer à la conſtruction des objectifs achromatiques, on remarquera que la formule des objectifs à double image, s'applique d'une manière directe à la conſtruction des oculaires qui redreſſent les objets, & qui ſont composés
Fig. 9. de deux lentilles *a* & *c*.

La conſtruction des oculaires qui redreſſent les objets, moyennant deux lentilles ſeulement, n'eſt pas nouvelle *; elle a même été abandonnée, quoique cependant ingénieuſe, parce qu'elle reſtreint beaucoup le champ des lunettes, & le beſoin d'augmenter ce champ le plus qu'il eſt poſſible, a fait qu'on a eu recours à l'uſage de trois & de quatre lentilles, placées à foyers coïncidens les uns aux autres ; alors on a alongé forcément, & de beaucoup, la longueur de la lunette: or pour un oculaire, dont le foyer équivalent ne ſeroit pas moindre que deux pouces, voici la conſtruction qui convient, afin que la lunette ait préciſément la même longueur qu'elle auroit ſi l'oculaire étoit ſimple, & qu'il renverſât les objets.

* Seconde partie de l'Optique du P. Chérubin, Capucin, *année 1671.* D'une autre part, quant à la conſtruction des oculaires équivalens qui renverſent les objets, & qui eſt préférable à tout autre, l'oculaire près de l'œil doit être le tiers du foyer de l'autre, & la diſtance entre les deux doit être les deux tiers du foyer du plus grand des deux.

Soit $\begin{cases} f, \text{ foyer des rayons parallèles de la lentille } a, \text{ la plus proche de l'œil.} \\ \varphi, \text{ foyer des rayons parallèles de la lentille } c, \text{ la plus éloignée de l'œil,} \\ D, \text{ foyer relatif} \\ F, \text{ foyer équivalent} \end{cases}$ des lentilles a & c. Fig. 9.

La position de l'œil ne devant pas différer de celle qui auroit lieu, s'il n'y avoit qu'une seule lentille, dont le foyer seroit F, & qui renversât les objets, on est dans le cas de la formule qui convient tout-à-la-fois aux oculaires & aux objectifs à double image; ainsi, on a pour condition

$$\varphi = \frac{2Ff(F-f)}{(F+f)^2}.$$

Cela posé,

$$\text{on a} \begin{cases} Da = 2F - f = f + \frac{\varphi}{Ff}(F+f)^2, \\ Dc = \frac{2F(F-f)}{F+f} = \frac{\varphi}{f}(F+f), \\ ac = \frac{f(3F-f)}{F+f}. \end{cases}$$

D'ailleurs il convient que f soit moindre que φ; ainsi on peut adopter le rapport des foyers qui suit.

$$\text{Rapport numérique} \begin{cases} F = 6498, \\ f = \frac{1}{18} F = 361; \\ \varphi = \frac{34}{361} F = 612. \end{cases}$$

$$\text{Position numérique} \begin{cases} Da = 12635, \\ DC = 11628, \\ a = 1007. \end{cases}$$

Réduisant ces dimensions relatives entr'elles à celle d'un foyer équivalent F de 6 pouces, on aura les mesures qui suivent. Voy. Table VII, page 48.

		pouces	lignes	
Pour un foyer équivalent de 6 pouces....	$f =$	0.	4,0,	foyer des rayons parallèles de la lentille a,
	$\varphi =$	0.	6,8,	foyer des rayons parallèles de la lentille C,
	$Da =$	11.	8,0	positions respectives des lentilles a & c,
	$DC =$	10.	8,8	
	$Ac =$	0.	11,2	

Alors un oculaire qui auroit les dimenſions qu'on vient de calculer, redreſſeroit l'image des objets, & n'alongeroit pas plus la lunette qu'un oculaire ſimple qui les renverſeroit; car pour un oculaire ſimple de 6 pouces, & qui renverſe l'image des objets, l'œil s'éloigne du foyer de l'objectif de 12 pouces: ici, *figure 9*, pour un pareil foyer équivalent, l'œil s'éloigne de la lentille *a* de 4 lignes, & le ſurplus *Da* eſt de 11 pouces 8 lignes.

Quant à la facilité de l'exécution, on peut faire $f = \varphi$, mais cette conſtruction augmente même de beaucoup la longueur de l'oculaire dans un grand nombre de cas; auſſi n'employe-t-on cette conſtruction que lorſqu'on veut voir de petits objets proches: enfin, cette conſtruction, utile à de certains égards, eſt toute calculée dans la *Table VIII, page 48*, & cette huitième Table offre huit manières différentes de conſtruire les oculaires qu'on voudra, & pour le cas où l'on veut voir les objets dans une ſituation droite & naturelle. Préſentement voici les dimenſions d'objectifs achromatiques, que je crois préférables à celles de mon Mémoire, *année 1770, pages 461—486*.

Dimenſions des Objectifs achromatiques composés de trois
Fig. 12. *Lentilles* cB, BA, AA; *celles du milieu* BA *concave de flint-glaſſ ou de cryſtal d'Angleterre; & les deux autres* CB, AA *convexe, de crow-glaſſ ou de glace de Veniſe.*

Pour la facilité du travail des verres, il convenoit d'admettre le moins poſſible de courbures différentes; auſſi, dans cette vue, n'ai-je admis en 1770 que deux courbures différentes: or comme cette loi que je m'étois preſcrite, ne détruit réellement que l'aberration de réfrangibilité, qui, à la vérité, eſt la plus nuiſible, je vais cette fois admettre trois différentes courbures *A, B, C;* & de-là s'enſuivra que je détruirai entièrement l'aberration de réfrangibilité, & que

je reſtreindrai celle de ſphéricité à une quantité moindre que celle d'un objectif ſimple *AA ;* d'ailleurs j'admettrai auſſi, comme je l'ai déjà fait, *Mémoires de l'Académie, année 1770, pages 465*, les réfractions qui ſuivent.

Pour le Verre de Veniſe, dont le pouce cube pèſe 950 grains.

Réfraction des rayons rouges.	1,5258.
Réfraction des rayons moyens.	1,5298.
Réfraction des rayons violets.	1,5433.

Pour le cryſtal d'Angleterre, dont le pouce cube pèſe 1215 grains.

Réfraction des rayons rouges.	1,5920.
Réfraction des rayons moyens.	1,5973.
Réfraction des rayons violets.	1,6229.

Ces réfractions ont été établies d'après un grand nombre d'expériences que j'ai vu faire à M. l'abbé Bouriot; & ayant admis ces réſultats de réfraction, j'ai calculé trigonométriquement, *page 49*, les neuvième & dixième Tables qui terminent ce Mémoire. On trouvera donc ci-après les oculaires achromatiques, calculés depuis 9 lignes juſqu'à 7 pouces, & les objectifs depuis 2 pouces juſqu'à 12 pieds de foyer.

Avant de procéder au calcul, j'enviſage la lentille *AA*, placée du côté de l'œil, comme étant un objectif ſimple & auſſi comme étant la lentille principale; puis les deux précédens *AB*, *BC*, comme devant produire ſur la lentille principale *AA* l'effet de diminuer le plus qu'il eſt poſſible l'aberration de ſphéricité, & d'annuller en même temps celle de réfrangibilité; d'où l'on voit que les rayons entrant dans la précédente lentille *cB*, ſuivant une direction parallèle à l'axe, doivent, après avoir traverſé les deux lentilles *CB*, *BA*, ſortir de la ſeconde *BA*, ſuivant des directions & diſperſions *HR* de rayon rouge, *HM* de rayon moyen, & *HV* de rayon violet; & qu'après avoir traverſé de nouveau l'objectif ſimple *AA*, ils doivent ſortir enſemble & ſuivre une ſeule & même direction *HD*, ainſi en fixant une diſtance Fig. 12. Fig. 10.

Fig. 10. focale *AD* qui soit celle de la lentille simple *AA*. Voici comment se fait le calcul requis.

Fig. 12. Soit
- r rayon des courbures égales *AA* de la lentille de crow-glass,
- p rapport de la réfraction moyenne dans le crow-glass,
- f foyer des rayons parallèles pour la réfraction moyenne,
- $DA = f = \frac{r}{2(p-1)}$ pour une ouverture infiniment petite d'objectif,
- *AH* demi-ouverture prise convenablement, mais à volonté.

1.° Avec *AH*, pris à volonté, & avec $f = \frac{r}{2(p-1)}$, on calculera la direction, suivant laquelle le rayon moyen auroit dû entrer dans la lentille principale *AA*, pour sortir suivant la direction *HD*, assujettie à la distance focale $f = \frac{r}{2(p-1)}$.

Fig. 12. 2.° Avec l'arc *Bh*, pris comme il convient, savoir, à peu-près double de l'arc *AH*; on calculera pour l'intérieur de la première lentille *CB* (*figure 11*) la position *FN*, qu'auroit dû avoir le rayon moyen (*figure 10*) pour prendre la direction *HD* de la sortie du rayon moyen.

Fig. 11. 3.° Avec l'angle *NFK* (du rayon moyen *FN*, avec *FK*, parallèle à l'axe des lentilles) on cherchera dans la Table qui suit, l'angle *LFK* qui lui correspond : alors cet angle *LFK* est (*figure 12*) la valeur de l'arc *C*, eu égard aux évaluations arbitraires des arcs *Bh*, *AH*. Ainsi laissant de côté la destruction de l'aberration de réfrangibilité, on détruira ici celle de sphéricité.

POUR LE VERRE DE VENISE.

Figure 11.

TABLE de la correſpondance de l'angle calculé NFK *avec l'angle cherché* LFK, *dont l'arc* C *eſt la meſure. L'arc* C *eſt la première* Fig. 12.
courbure de la première lentille CB *de l'objectif total* C, B, A, A.

NFK.	LFK ou *c.*	DIFFÉR.	NFK.	LFK ou *c.*	DIFFÉR.	NFK.	LFK ou *c.*	DIFFÉR.
D. M.	*D. M. S.*	*M. S.*	*D. M.*	*D. M. S.*	*M. S.*	*D. M.*	*D. M. S.*	*M. S.*
0. 0	0. 0. 0		3. 0	8. 34. 39		6. 0	16. 57. 18	
0. 20	0. 57. 25	57. 25	3. 20	9. 31. 18	56. 39	6. 20	17. 51. 56	54. 38
0. 40	1. 54. 48	57. 23	3. 40	10. 27. 46	56. 28	6. 40	18. 46. 17	54. 21
1. 0	2. 52. 9	57. 21	4. 0	11. 24. 5	56. 19	7. 0	19. 40. 19	54. 2
1. 20	3. 49. 29	57. 20	4. 20	12. 20. 12	56. 7	7. 20	20. 34. 5	53. 46
1. 40	4. 46. 43	57. 14	4. 40	13. 16. 4	55. 52	7. 40	21. 27. 30	53. 25
2. 0	5. 43. 51	57. 8	5. 0	14. 11. 44	55. 40	8. 0	22. 20. 35	53. 5
2. 20	6. 40. 54	57. 3	5. 20	15. 7. 11	55. 27	8. 20	23. 13. 22	52. 47
2. 40	7. 37. 51	56. 57	5. 40	16. 2. 29	55. 18	8. 40	24. 5. 52	52. 30
3. 0	8. 34. 39	56. 48	6. 0	16. 57. 18	54. 49	9. 0	24. 57. 6	51. 14

Quelle que ſoit la relation établie entre les courbures *A* & *B*, Fig. 12. on trouvera toujours avec la Table précédente la courbure *C*, qui convient pour que le rayon moyen *EF*, parallèle à Fig. 11. l'axe *GD*, ſorte de la lentille ſimple *AA*, ſuivant la direction Fig. 10. preſcrite *HD*; mais ſi d'ailleurs la direction des rayons rouges & violets à la ſortie des lentilles *CB*, *BA*, ne forme pas un angle *VHR*, ou *uHr* de diſperſion, qui ſoit préciſément celui qui convient, on ſera de nouveau une ſeconde ou au plus une troiſième ſuppoſition pour l'établiſſement du rapport de la courbure *A* à la courbure *B*, & alors on fixera Fig. 12. décidément la vraie courbure *C*, tant pour la deſtruction complète de l'aberration de réfrangibilité, que pour la diminution conſidérable de celle de ſphéricité.

Fig. 12. 1.° Soit la courbure *A* de.......... 20d 0′ 0″,
la distance focale de......... 1,0000,
le rayon de la courbure *A*, de.. 1,0605;

On trouvera
- courbure *B* = 29d 20′ 0″,
- courbure *C* = 20. 35. 0,
- rayon de la courbure *B* = 0,7706,
- rayon de la courbure *C* = 1,0738,
- ouverture de l'objectif = 0,7248.

Cette détermination convient à une distance focale de 12 lignes, eu égard à une épaisseur de verre d'environ 2 lignes: d'ailleurs, ce rapport corrige dans l'objectif simple *AA* une aberration de réfrangibilité de 46′ 31″, & une de sphéricité de 3d 51′ 10″.

2.° Soit la courbure *A* de.......... 10d 0′ 0″.
La distance focale & le rayon de la courbure *A*, comme dans le 1.°

On trouvera
- courbure *B* = 19d 9′ 0″,
- courbure *C* = 13. 4. 6,
- rayon de la courbure *B* = 0,5696,
- rayon de la courbure *C* = 0,8263,
- ouverture de l'objectif = 0,3680.

Cette détermination convient à une distance focale de 42 lignes, & corrige dans l'objectif simple *AA* une aberration de réfrangibilité de 21′ 29″, & une de sphéricité de 33′ 11″.

3.° Soit la courbure *A* de.......... 5d 0′ 00″.
La distance focale ainsi que le rayon de la courbure *A*, comme dans le 1.°

On trouvera
- courbure *B* = 10d 25′ 43″,
- courbure *C* = 6. 55. 27,
- rayon de la courbure *B* = 0,5128,
- rayon de la courbure *C* = 0,7694,
- ouverture de l'objectif = 0,1847.

Fig. 12. Cette détermination convient à une distance focale de 12 pouces, & corrige dans l'objectif simple *AA* une aberration de réfrangibilité de 10′ 35″, & une de sphéricité de 6′ 17″.

4.° Soit la courbure *A* de....... 2d 30′ 0″.

La

La diſtance focale ainſi que le rayon de la courbure *A*, comme dans le 1.° Fig. 12.

On trouvera { courbure *B* = 5^d 15′ 43″, courbure *C* = 3. 30. 6, rayon de la courbure *B* = 0,5058, rayon de la courbure *C* = 0,7582, ouverture de l'objectif = 0,0924.

Cette détermination convient à une diſtance focale de 54 pouces, & corrige dans l'objectif ſimple *AA* une aberration de réfrangibilité de 5′ 12″, & une de ſphéricité de 1′ 52″.

D'après ces réſultats, on juge facilement que le rapport des courbures ne peut être conſtant ; que celui qui convient aux petites lunettes ne peut convenir aux grandes, & réciproquement ; on ne doit donc pas manquer d'avoir égard à l'ouverture qu'on ſe propoſe de donner à l'objectif ; on ſait auſſi que l'épaiſſeur des verres étant limitée, les ouvertures ne peuvent manquer de l'être, & que par cette raiſon, on eſt forcé de donner aux objectifs de long foyer, des ouvertures moindres qu'à ceux de court foyer.

C'eſt d'après les rapports de courbures qui viennent d'être déterminés, que j'ai dreſſé, *page 49*, les neuvième & dixième Tables, où l'on trouve les dimenſions d'oculaires achromatiques calculées depuis 9 lignes de foyer juſqu'à 7 pouces de foyer, & les objectifs, depuis 2 pouces juſqu'à 12 pieds. Un plus ample détail ſeroit ſuperflu ; & ſi les matières qu'on emploie n'ont pas préciſément le même degré de réfringence que celui que je leur ai ſuppoſé, on pourra en être averti d'avance par leur peſanteur ſpécifique ; alors on feroit ſoi-même le calcul qu'exigeroit la circonſtance du cas, d'un autre degré de réfringence que celui que j'ai adopté.

TABLE I.

Figure 3.

POUR LES OBJECTIFS À DOUBLE IMAGE.

Cas où deux surfaces sont planes & où les autres sont égales entr'elles, & doivent se travailler dans deux bassins formés l'un dans l'autre.

DISTANCE focale équivalente *DA* ou *Dc.*	RAYONS des courbures, supposant LA MATIÈRE du poids de 950 grains, LE POUCE CUBE.	DISTANCE relative ou totale *Da.*	DISTANCE *Aa* ou *Ca* entre LES LENTILLES.
pieds. pouces.	*pieds. pouces. lignes.*	*pieds. pouces.*	*pieds. pouces.*
0. 6	0. 6. 4	1. 6	1. 0
1. 0	1. 0. 9	3. 0	2. 0
2. 0	2. 1. 6	6. 0	4. 0
3. 0	3. 2. 2	9. 0	6. 0
4. 0	4. 2. 11	12. 0	8. 0
5. 0	5. 3. 7	15. 0	10. 0
6. 0	6. 4. 4	18. 0	12. 0

Cette construction a l'inconvénient de tripler la longueur de la Lunette, & d'employer des surfaces planes.

TABLE II.

Figure 4.

POUR LES OBJECTIFS À DOUBLE IMAGE.

Cas où les Lentilles a *&* A *ont des foyers égaux, & où la Lentille* c *à un foyer égal au quart des deux autres.*

DISTANCE focale équivalente *DA*, & FOYER des Lentilles *A* & *a*.	FOYER de LA LENTILLE *c*.	DISTANCE relative ou totale *Da*.	DISTANCE *DC*.
pieds. pouces.	*pieds. pouces. lignes.*	*pieds. pouces.*	*pieds. pouces.*
0. 6	0. 1. 6	1. 0	0. 3
1. 0	0. 3. 0	2. 0	0. 6
2. 0	0. 6. 0	4. 0	1. 0
3. 0	0. 9. 0	6. 0	1. 6
4. 0	1. 0. 0	8. 0	2. 0
5. 0	1. 3. 0	10. 0	2. 6
6. 0	1. 6. 0	12. 0	3. 0

Cette construction doublera la distance totale & relative *Da* à l'égard du foyer équivalent *DA*.

TABLE III.

Figure 5.

Pour les Objectifs à double image, construction diplantidienne plus avantageuse que les deux précédentes.

Ici la Lentille a *occupe le milieu de la Lentille percée* A, *& la Lentille* C *est placée au milieu de la distance totale* DA.

Dans ce cas, la condition des foyers est $\varphi = \frac{Ff(F-f)}{(F+f)^2}$.

$Da = F$ FOYER de la Lentille percée A, & aussi Foyer équivalent.	f FOYER de la Lentille a, placée dans le vide de la Lentille percée A.	φ FOYER de la Lentille C.	DC POSITION de la Lentille C.
pieds pouces	*pieds pouces*	*pieds pouc. lignes*	*pieds pouc.*
0. 6	0. 2	0. 0. 9	0. 3
1. 0	0. 4	0. 1. 6	0. 6
1. 6	0. 6	0. 2. 3	0. 9
2. 0	0. 8	0. 3. 0	1. 0
2. 6	0. 10	0. 3. 9	1. 3
3. 0	1. 0	0. 4. 6	1. 6
3. 6	1. 2	0. 5. 3	1. 9
4. 0	1. 4	0. 6. 0	2. 0
4. 6	1. 6	0. 6. 9	2. 3
5. 0	1. 8	0. 7. 6	2. 6
5. 6	1. 10	0. 8. 3	2. 9
6. 0	2. 0	0. 9. 0	3. 0
6. 6	2. 2	0. 9. 9	3. 3
7. 0	2. 4	0. 10. 6	3. 6
7. 6	2. 6	0. 11. 3	3. 9
8. 0	2. 8	1. 0. 0	4. 0
8. 6	2. 10	1. 0. 9	4. 3
9. 0	3. 0	1. 1. 6	4. 6
9. 6	3. 2	1. 2. 3	4. 9
10. 0	3. 4	1. 3. 0	5. 0
10. 6	3. 6	1. 3. 9	5. 3
11. 0	3. 8	1. 4. 6	5. 6
11. 6	3. 10	1. 5. 3	5. 9
12. 0	4. 0	1. 6. 0	6. 0
24. 0	8. 0	3. 0. 0	12. 0

TABLE IV.

Figure 6.

Pour les Objectifs à double image, construction diplantidienne qui a sur les trois précédentes, l'avantage d'avoir une distance focale relative D a, *moindre que la distance équivalente* DA.

Ici la Lentille a *a un foyer moitié de la Lentille percée* A, *&* *la Lentille* c *a un foyer qui est les quatre cinquièmes du foyer de la même Lentille* A.

DA = *F* FOYER de la Lentille percée *A*, & aussi Foyer équiv.	*f* FOYER de la Lentille *a*, savoir Distance *Ba*.	φ FOYER de la Lentille *C*.	*Da* POSITION de la Lentille *a*, ou Foyer relatif.	*DC* POSITION de la Lentille *C*.
pieds pouces	*pieds pouc.*	*pieds pouc. lign.*	*pieds pouc. lign.*	*pieds pouc. lign.*
0. 6	0. 3	0. 0. 4,8	0. 4. 9,6	0. 1. 2,4
1. 0	0. 6	0. 0. 9,6	0. 9. 7,2	0. 2. 4,8
1. 6	0. 9	0. 1. 2,4	1. 2. 4,8	0. 3. 7,2
2. 0	1. 0	0. 1. 7,2	1. 7. 2,4	0. 4. 9,6
2. 6	1. 3	0. 2. 0,0	2. 0. 0,0	0. 6. 0,0
3. 0	1. 6	0. 2. 4,8	2. 4. 9,6	0. 7. 2,4
3. 6	1. 9	0. 2. 9,6	2. 9. 7,2	0. 8. 4,8
4. 0	2. 0	0. 3. 2,4	3. 2. 4,8	0. 9. 7,2
4. 6	2. 3	0. 3. 7,2	3. 7. 2,4	0. 10. 9,6
5. 0	2. 6	0. 4. 0,0	4. 0. 0,0	1. 0. 0,0
5. 6	2. 9	0. 4. 4,8	4. 4. 9,6	1. 1. 2,4
6. 0	3. 0	0. 4. 9,6	4. 9. 7,2	1. 2. 4,8
6. 6	3. 3	0. 5. 2,4	5. 2. 4,8	1. 3. 7,2
7. 0	3. 6	0. 5. 7,2	5. 7. 2,4	1. 4. 9,6
7. 6	3. 9	0. 6. 0,0	6. 0. 0,0	1. 6. 0,0
8. 0	4. 0	0. 6. 4,8	6. 4. 9,6	1. 7. 2,4
8. 6	4. 3	0. 6. 9,6	6. 9. 7,2	1. 8. 4,8
9. 0	4. 6	0. 7. 2,4	7. 2. 4,8	1. 9. 7,2
9. 6	4. 9	0. 7. 7,2	7. 7. 2,4	1. 10. 9,6
10. 0	5. 0	0. 8. 0,0	8. 0. 0,0	2. 0. 0,0
10. 6	5. 3	0. 8. 4,8	8. 4. 9,6	2. 1. 2,4
11. 0	5. 6	0. 8. 9,6	8. 9. 7,2	2. 2. 4,8
11. 6	5. 9	0. 9. 2,4	9. 2. 4,8	2. 3. 7,2
12. 0	6. 0	0. 9. 7,2	9. 7. 2,4	2. 4. 9,6
24. 0	12. 0	1. 7. 2,4	19. 2. 4,8	4. 9. 7,2

TABLE V.

Voyez la page 32, *& aussi la* figure 7.

Dimensions communes aux Objectifs & aux Oculaires à double image.

Pour les oculaires, l'œil sera placé en *y;* alors *D* sera le foyer de l'oculaire.

Pour les objectifs, l'œil sera au contraire placé au-delà de *D*, & le point *D* sera le foyer de l'objectif.

DA = P FOYER de la Lentille percée *A*, & aussi Foyer équiv.	*f* FOYER de la Lentille *a*, & aussi distance *A a*.	*φ* FOYER de la Lentille *C*.	*D a* POSITION de la Lentille *a*, & aussi Foyer relatif total.	*DC* POSITION de la Lentille *c*.
pieds pouces	*pieds pouc. lign.*	*pieds pouc. lign.*	*pieds pouc. lign.*	*pieds pouc. lign.*
0. 1	0. 0. 6	0. 0. 2,6	0. 1. 6	0. 0. 8
0. 2	0. 1. 0	0. 0. 5,3	0. 3. 0	0. 1. 4
0. 4	0. 2. 0	0. 0. 10,7	0. 6. 0	0. 2. 8
0. 6	0. 3. 0	0. 1. 4,0	0. 9. 0	0. 4. 0
0. 8	0. 4. 0	0. 1. 9,3	1. 0. 0	0. 5. 4
0. 10	0. 5. 0	0. 2. 2,6	1. 3. 0	0. 6. 8
1. 0	0. 6. 0	0. 2. 8,0	1. 6. 0	0. 8. 0
1. 6	0. 9. 0	0. 4. 0,0	2. 3. 0	1. 0. 0
2. 0	1. 0. 0	0. 5. 4,0	3. 0. 0	1. 4. 0
2. 6	1. 3. 0	0. 6. 8,0	3. 9. 0	1. 8. 0
3. 0	1. 6. 0	0. 8. 0,0	4. 6. 0	2. 0. 0
3. 6	1. 9. 0	0. 9. 4,0	5. 3. 0	2. 4. 0
4. 0	2. 0. 0	0. 10. 8,0	6. 0. 0	2. 8. 0
4. 6	2. 3. 0	1. 0. 0,0	6. 9. 0	3. 0. 0
5. 0	2. 6. 0	1. 1. 4,0	7. 6. 0	3. 4. 0
5. 6	2. 9. 0	1. 2. 8,0	8. 3. 0	3. 8. 0
6. 0	3. 0. 0	1. 4. 0,0	9. 0. 0	4. 0. 0
6. 6	3. 3. 0	1. 5. 4,0	9. 9. 0	4. 4. 0
7. 0	3. 6. 0	1. 6. 8,0	10. 6. 0	4. 8. 0
7. 6	3. 9. 0	1. 8. 0,0	11. 3. 0	5. 0. 0
8. 0	4. 0. 0	1. 9. 4,0	12. 0. 0	5. 4. 0
9. 0	4. 6. 0	2. 0. 0,0	13. 6. 0	6. 0. 0
10. 0	5. 0. 0	2. 2. 8,0	15. 0. 0	6. 8. 0
11. 0	5. 6. 0	2. 5. 4,0	16. 6. 0	7. 4. 0
12. 0	6. 0. 0	2. 8. 0,0	18. 0. 0	8. 0. 0

TABLE VI.

Figure 8.

Dimensions communes aux Objectifs & aux Oculaires à double image.

Dans ce cas, & dans le précédent, $\varphi = \frac{2Ff(F-f)}{(F+f)^2}$.

Ici l'on a fait les foyers des Lentilles a & c égaux entr'eux, ce qui offre une facilité plus grande que celle de la Table précédente, mais ayant pour inconvénient celui d'avoir des foyers f & φ très-petits.

$DA = F$ FOYER de la Lentille percée A, & aussi Foyer équival.		$f = \varphi$ FOYER des Lentilles égales a & c.			Da POSITION de la Lentile a, & aussi Foyer relatif total.			DC POSITION de la Lentille C.		
pieds	pouces	pieds	pouces	lignes	pieds	pouces	lignes	pieds	pouces	lignes
0.	1	0.	0.	2,9	0.	1.	9,2	0.	1.	2,9
0.	2	0.	0.	5,7	0.	3.	6,4	0.	2.	5,7
0.	4	0.	0.	11,3	0.	7.	0,7	0.	4.	11,4
0.	6	0.	1.	5,0	0.	10.	7,0	0.	7.	5,0
0.	8	0.	1.	10,7	1.	2.	1,4	0.	9.	10,7
0.	10	0.	2.	4,4	1.	5.	7,7	1.	0.	4,4
1.	0	0.	2.	10,0	1.	9.	2,0	1.	2.	10,0
1.	6	0.	4.	3,0	2.	7.	9,0	1.	10.	3,0
2.	0	0.	5.	8,0	3.	6.	4,0	2.	5.	8,0
2.	6	0.	7.	1,0	4.	4.	11,0	3.	1.	1,0
3.	0	0.	8.	6,0	5.	3.	6,0	3.	8.	6,0
3.	6	0.	9.	11,0	6.	2.	1,0	4.	3.	11,0
4.	0	0.	11.	4,0	7.	0.	8,0	4.	11.	4,0
4.	6	1.	0.	9,0	7.	11.	3,0	5.	6.	9,0
5.	0	1.	2.	2,0	8.	9.	10,0	6.	2.	2,0
5.	6	1.	3.	7,0	9.	8.	5,0	6.	9.	7,0
6.	0	1.	5.	0,0	10.	7.	0,0	7.	5.	0,0
6.	6	1.	6.	5,0	11.	5.	7,0	8.	0.	5,0
7.	0	1.	7.	10,0	12.	4.	2,0	8.	7.	10,0
7.	6	1.	9.	3,0	13.	2.	9,0	9.	3.	3,0
8.	0	1.	10.	8,0	14.	1.	4,0	9.	10.	8,0
9.	0	2.	1.	6,0	15.	10.	6,0	11.	1.	6,0
10.	0	2.	4.	4,0	17.	7.	8,0	12.	4.	4,0
11.	0	2.	7.	2,0	19.	4.	10,0	13.	7.	2,0
12.	0	2.	10.	0,0	21.	2.	0,0	14.	10.	0,0

TABLE VII.

Figure 9.

Dimensions des Oculaires qui redressent l'image des objets.

Ici l'Oculaire composé de deux Lentilles, n'alonge pas plus la longueur de la Lunette, que si on y substituoit un seul Oculaire simple qui renverseroit les images, comme il a été dit *page 36 ;* mais la Lunette aura peu de champ, ce qui fait qu'ordinairement on préfère les Oculaires équivalens qui renversent les images, & qui grandissent le champ de la Lunette autant qu'il est possible.

F FOYER équivalent.	*f* FOYER de la Lentille *a.*	*φ* FOYER de la Lentille *c.*	*a c* DISTANCE des Lentilles.	*D a* LONGUEUR totale de l'Oculaire.
pouc. lign.	*lig. dix.*	*lign. dix.*	*lign. dix.*	*pouc. lign. dix.*
2. 0	1,3	2,3	3,7	3. 10,7
2. 2	1,4	2,4	4,0	4. 2,6
2. 4	1,5	2,6	4,3	4. 6,5
2. 6	1,6	2,8	4,6	4. 10,3
2. 8	1,8	3,0	4,9	5. 2,2
2. 10	1,9	3,2	5,2	5. 6,1
3. 0	2,0	3,4	5,6	5. 10,0
3. 2	2,1	3,6	5,9	6. 1,9
3. 4	2,2	3,7	6,2	6. 5,8
3. 6	2,3	3,9	6,5	6. 9,6
3. 8	2,4	4,1	6,8	7. 1,5
3. 10	2,6	4,3	7,1	7. 5,4
4. 0	2,7	4,5	7,5	7. 9,3
4. 4	2,9	4,9	8,1	8. 5,1
4. 8	3,1	5,3	8,7	9. 0,9
5. 0	3,3	5,7	9,3	9. 8,7
5. 4	3,5	6,1	9,9	10. 4,5
5. 8	3,8	6,5	10,5	11. 0,3
6. 0	4,0	6,8	11,2	11. 8,0

TABLE

DIMENSIONS DES :TS,

F FOYER équivalent	FOY: FOYERS DES LENTILLES *a* & *c* = 3 lign. *Da.*	FOYERS DES LENTILLES *a* & *c* = 3 lign. *Dc.*	FOYERS DES LENTILLES *a* & *c* = 6 lign. *Da.*	FOYERS DES LENTILLES *a* & *c* = 6 lign. *DC.*	:OYERS S LENTILLES & *c* = 24 lign. ᗡ *a.*	:OYERS S LENTILLES & *c* = 24 lign. *DC.*
lignes.	*pouc. lign.*	*pouc. lign.*	*pouc. lign.*	*pouc. lign.*	*lign*	*pouc. lign.*
3	1. 3,0	0. 6,0	2. 7,0	0. 9,0	3,0	2. 3,0
6	1. 4,5	0. 9,0	2. 6,0	1. 0,0	6,0	2. 6,0
9	1. 7,0	1. 0,0	2. 7,0	1. 3,0	1,0	2. 9,0
12	1. 9,7	1. 3,0	2. 9,0	1. 6,0	0,0	3. 0,0
15	2. 0,6	1. 6,0	2. 11,4	1. 9,0	5,4	3. 3,0
18	2. 3,5	1. 9,0	3. 2,0	2. 0,0	2,5	3. 6,0
21	2. 6,4	2. 0,0	3. 4,7	2. 3,0	0,4	3. 9,0
24	2. 9,4	2. 3,0	3. 7,5	2. 6,0	0,0	4. 0,0
27	3. 0,3	2. 6,0	3. 10,3	2. 9,0	0,4	4. 3,0
30	3. 3,3	2. 9,0	4. 1,2	3. 0,0	1,2	4. 6,0
33	3. 6,3	3. 0,0	4. 4,1	3. 3,0	2,5	4. 9,0
36	3. 9,2	3. 3,0	4. 7,0	3. 6,0	4,0	5. 0,0
42	4. 3,2	3. 9,0	5. 0,9	4. 0,0	7,7	5. 6,0
48	4. 9,2	4. 3,0	5. 6,7	4. 6,0	0,0	6. 0,0
60	5. 9,2	5. 3,0	6. 6,6	5. 6,0	9,6	7. 0,0
72	6. 9,1	6. 3,0	7. 6,5	6. 6,0	8,0	8. 0,0

TABLE VIII.

Figure 9.

Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1779, page 48.

DIMENSIONS DES OCULAIRES QUI REDRESSENT L'IMAGE DES OBJETS,

Et qui sont composés de deux Lentilles de foyers égaux.

FOYERS DES LENTILLES ÉGALES *A* ET *C*,

Dont le foyer équivalent est F, *& dont le foyer relatif ou total est* Da.

F FOYER equivalent	FOYERS DES LENTILLES *a* & *c* = 3 lign.		FOYERS DES LENTILLES *a* & *c* = 6 lign.		FOYERS DES LENTILLES *a* & *c* = 9 lign.		FOYERS DES LENTILLES *a* & *c* = 12 lign.		FOYERS DES LENTILLES *a* & *c* = 15 lign.		FOYERS DES LENTILLES *a* & *c* = 18 lign.		FOYERS DES LENTILLES *a* & *c* = 21 lign.		FOYERS DES LENTILLES *a* & *c* = 24 lign.	
	Da.	Dc.	Da.	DC.	Da.	Dc.	Da.	DC.	Da.	DC.	Da.	DC.	Da.	DC.	Da.	DC.
lignes.	pouc. lign	pouc. lign.	pouc. lign	pouc. lign.	pouc. lign	pouc. lign	pouc. lign	pouc. lign.	pouc. lign	pouc. lign.	pouc. lign.	pouc. lign.	pouc. lign	pouc. lign.	pouc. lign	pouc. lign.
3	1. 3,0	0. 6,0	2. 7,0	0. 9,0	4. 9,0	1. 0,0	7. 3,0	1. 3,0	10. 3,0	1. 6,0	13. 9,0	1. 9,0	17. 9,0	2. 0,0	22. 3,0	2. 3,0
6	1. 4,5	0. 9,0	2. 6,0	1. 0,0	3. 10,5	1. 3,0	5. 6,0	1. 6,0	9. 4,5	1. 9,0	9. 6,0	2. 0,0	11. 10,5	2. 3,0	14. 6,0	2. 6,0
9	1. 7,0	1. 0,0	2. 7,0	1. 3,0	3. 9,0	1. 6,0	5. 1,0	1. 9,0	6. 7,0	2. 0,0	8. 3,0	2. 3,0	10. 1,0	2. 6,0	12. 1,0	2. 9,0
12	1. 9,7	1. 3,0	2. 9,0	1. 6,0	3. 9,7	1. 9,0	5. 0,0	2. 0,0	6. 3,9	2. 3,0	7. 9,0	2. 6,0	9. 3,7	2. 9,0	11. 0,0	3. 0,0
15	2. 0,6	1. 6,0	2. 11,4	1. 9,0	3. 11,4	2. 0,0	5. 0,6	2. 3,0	6. 3,0	2. 6,0	7. 6,6	2. 9,0	8. 11,4	3. 0,0	10. 5,4	3. 3,0
18	2. 3,5	1. 9,0	3. 2,0	2. 0,0	4. 1,5	2. 3,0	5. 2,0	2. 6,0	6. 3,9	2. 9,0	7. 6,0	3. 0,0	8. 9,5	3. 3,0	10. 2,5	3. 6,0
21	2. 6,4	2. 0,0	3. 4,7	2. 3,0	4. 3,9	2. 6,0	5. 3,9	2. 9,0	6. 4,3	3. 0,0	7. 6,4	3. 3,0	8. 9,0	3. 6,0	10. 0,4	3. 9,0
24	2. 9,4	2. 3,0	3. 7,5	2. 6,0	4. 6,4	2. 9,0	5. 6,0	3. 0,0	6. 6,4	3. 3,0	7. 7,5	3. 6,0	8. 9,4	3. 9,0	10. 0,0	4. 0,0
27	3. 0,3	2. 6,0	3. 10,3	2. 9,0	4. 9,0	3. 0,0	5. 8,3	3. 3,0	6. 8,9	3. 6,0	7. 9,0	3. 9,0	8. 10,3	4. 0,0	10. 0,4	4. 3,0
30	3. 3,3	2. 9,0	4. 1,2	3. 0,0	4. 11,7	3. 3,0	5. 10,8	3. 6,0	6. 10,5	3. 9,0	7. 10,8	4. 0,0	8. 11,7	4. 3,0	10. 1,2	4. 6,0
33	3. 6,3	3. 0,0	4. 4,1	3. 3,0	5. 2,4	3. 6,0	6. 1,4	3. 9,0	7. 0,8	4. 0,0	8. 0,8	4. 3,0	9. 1,4	4. 6,0	10. 2,5	4. 9,0
36	3. 9,2	3. 3,0	4. 7,0	3. 6,0	5. 5,2	3. 9,0	6. 4,0	4. 0,0	7. 3,2	4. 3,0	8. 3,0	4. 6,0	9. 3,2	4. 9,0	10. 4,0	5. 0,0
42	4. 3,2	3. 9,0	5. 0,9	4. 0,0	5. 10,9	4. 3,0	6. 9,3	4. 6,0	7. 8,3	4. 9,0	8. 7,7	5. 0,0	9. 7,5	5. 3,0	10. 7,7	5. 6,0
48	4. 9,2	4. 3,0	5. 6,7	4. 6,0	6. 4,7	4. 9,0	7. 3,0	5. 0,0	8. 1,6	5. 3,0	9. 0,7	5. 6,0	10. 0,2	5. 9,0	11. 0,0	6. 0,0
60	5. 9,2	5. 3,0	6. 6,6	5. 6,0	7. 4,3	5. 9,0	8. 2,3	6. 0,0	9. 0,9	6. 3,0	9. 11,4	6. 6,0	10. 10,3	6. 9,0	11. 9,6	7. 0,0
72	6. 9,1	6. 3,0	7. 6,5	6. 6,0	8. 4,1	6. 9,0	9. 2,0	7. 0,0	10. 0,1	7. 3,0	10. 10,5	7. 6,0	11. 9,1	7. 9,0	12. 8,0	8. 0,0

TABLE IX.

Figure 12.

Dimensions des Objectifs achromatiques composés de trois Lentilles.

Le Verre de Venise pesant 950 grains le pouce cube.

Le Crystal d'Angleterre pesant 1215 grains le pouce cube.

FOYER de l'Objectif.	RAYONS A, A, A.	RAYONS B, B.	RAYON c.	DIAM. de l'ouverture.
pieds po.	*pieds pouc. lign*	*pieds po lig.*	*pieds pouc. lign.*	*pouc. lign.*
0. 2	0. 2. 1	0. 1. 3	0. 1. 10	0. 11
0. 4	0. 4. 3	0. 2. 3	0. 3. 4	1. 2
0. 6	0. 6. 4	0. 3. 3	0. 4. 9	1. 5
0. 8	0. 8. 6	0. 4. 2	0. 6. 3	1. 8
0. 10	0. 10. 7	0. 5. 2	0. 7. 9	1. 11
1. 0	1. 0. 9	0. 6. 2	0. 9. 3	2. 2
1. 6	1. 7. 2	0. 9. 2	1. 1. 9	2. 7
2. 0	2. 1. 6	1. 0. 3	1. 6. 4	3. 0
2. 6	2. 7. 10	1. 3. 3	1. 10. 10	3. 5
3. 0	3. 2. 2	1. 6. 3	2. 3. 4	3. 10
3. 6	3. 8. 7	1. 9. 3	2. 7. 10	4. 2
4. 0	4. 2. 11	2. 0. 4	3. 0. 5	4. 7
4. 6	4. 9. 3	2. 3. 4	3. 4. 11	5. 0
5. 0	5. 3. 7	2. 6. 4	3. 9. 5	5. 5
5. 6	5. 10. 0	2. 9. 5	4. 2. 0	5. 10
6. 0	6. 4. 4	3. 0. 5	4. 6. 6	6. 3
6. 6	6. 10. 8	3. 3. 5	4. 11. 0	6. 8
7. 0	7. 5. 0	3. 6. 6	5. 3. 6	7. 0
7. 6	7. 11. 4	3. 9. 6	5. 8. 0	7. 5
8. 0	8. 5. 9	4. 0. 6	6. 0. 7	7. 10
8. 6	9. 0. 1	4. 3. 6	6. 5. 1	8. 3
9. 0	9. 6. 5	4. 6. 7	6. 9. 8	8. 8
9. 6	10. 0. 9	4. 9. 7	7. 2. 2	9. 1
10. 0	10. 7. 2	5. 0. 7	7. 6. 8	9. 6
12. 0	12. 8. 8	6. 0. 10	9. 1. 0	9. 0

TABLE X.

Figure 13.

Dimensions des Oculaires achromatiques composés de trois Lentilles.

Le Verre de Venise pesant 950 grains le pouce cube.

Le Crystal d'Angleterre pesant 1215 grains le pouce cube.

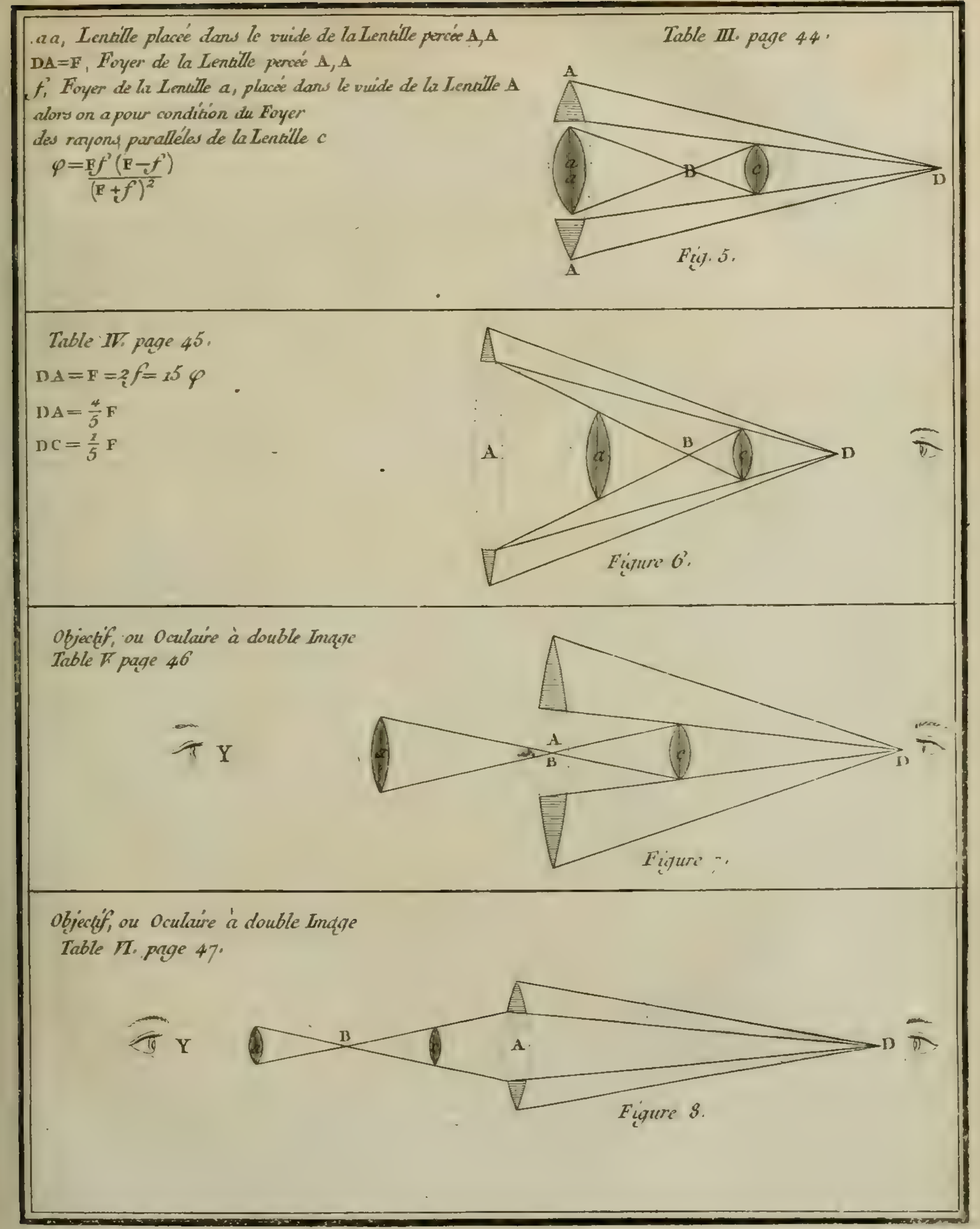
FOYER de l'Oculaire	RAYON a.	RAYONS b, b.	RAYONS c, c, c.	DIAM. de l'ouverture
po lig.	*po. lign*	*po. lign.*	*po. lign.*	*po. lign.*
0. 9	1. 3	0. 11	0. 9	0. 5
1. 0	1. 1	0. 9	1. 1	0. 8
1. 3	1. 3	0. 11	1. 4	0. 9
1. 6	1. 5	1. 0	1. 7	0. 18
1. 9	1. 7½	1. 2	1. 10	0. 11
2. 0	1. 10	1. 3	2. 1	0. 11
2. 3	2. 0	1. 5	2. 5	1. 0
2. 6	2. 2	1. 6	2. 8	1. 0
2. 9	2. 4	1. 8	2. 11	1. 1
3. 0	2. 6½	1. 9	3. 2	1. 2
3. 3	2. 9	1. 11	3. 5	1. 3
3. 6	2. 11	2. 0	3. 8½	1. 3
3. 9	3. 1	2. 1½	4. 0	1. 3
4. 0	3. 4	2. 3	4. 3	1. 3
4. 3	3. 6	2. 4	4. 6	1. 4
4. 6	3. 8	2. 6	4. 9	1. 4
4. 9	3. 10	2. 7	5. 0	1. 4
5. 0	4. 0	2. 9	5. 4	1. 4
5. 3	4. 3	2. 10	5. 7	1. 5
5. 6	4. 5	3. 0	5. 10	1. 5
5. 9	4. 7	3. 1	6. 1	1. 5
6. 0	4. 9½	3. 3	6. 4	1. 5
6. 3	5. 0	3. 4	6. 7½	1. 6
6, 6	5. 2	3. 5½	6. 11	1. 6
7. 0	5. 6	3. 8½	7. 5	1. 7

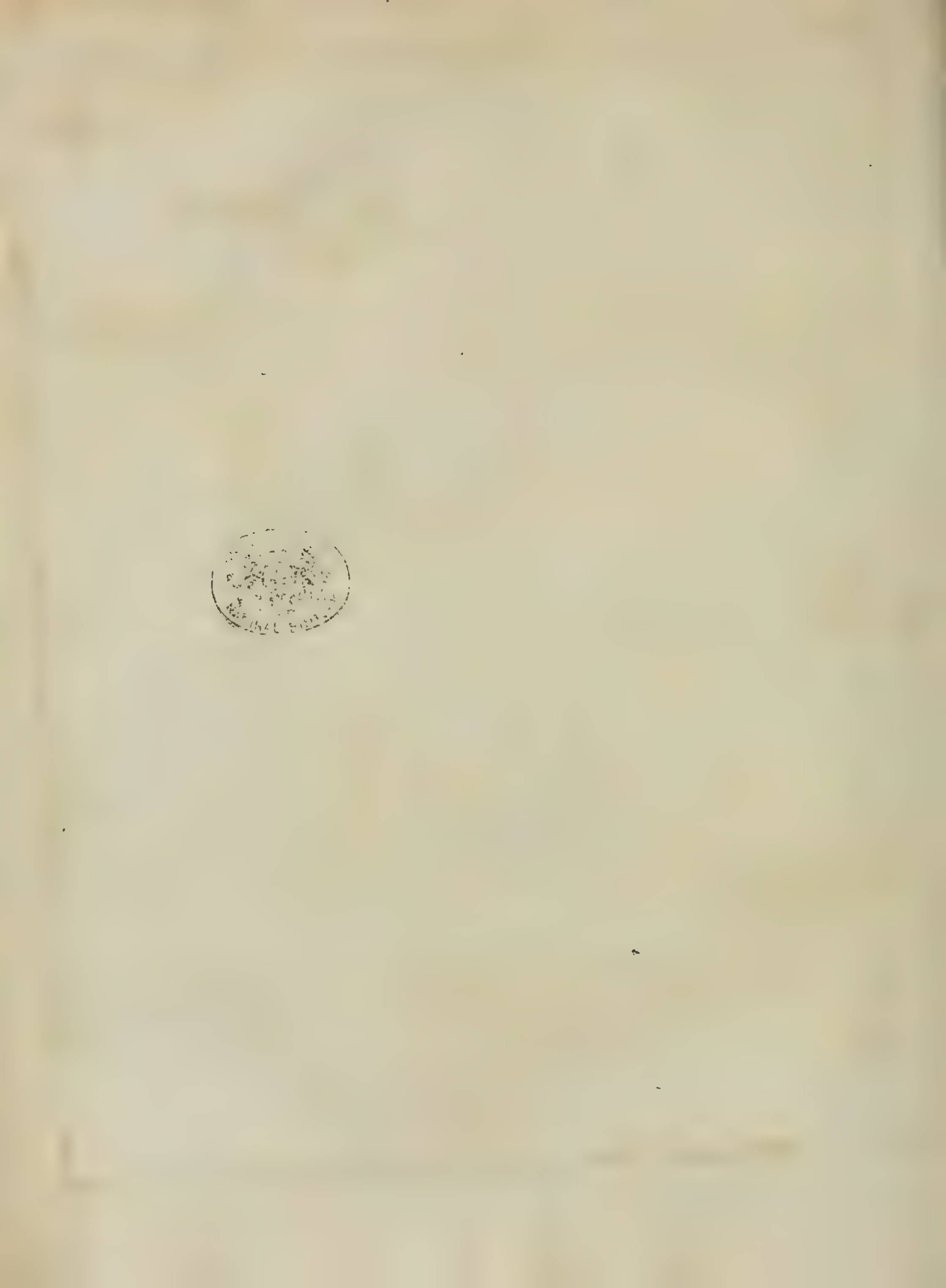
Évidemment, les dix Tables que je viens de donner procureront aux Artiſtes le moyen de réuſſir, tant pour les conſtructions *diplantidiennes*, ou à double image, que pour les objectifs & les oculaires achromatiques, & ſi, comme je l'ai dit, le ſuccès de mes Tables n'eſt pas toujours complet, au moins ſuis-je aſſuré que l'exécution ſera facilitée & abrégée pour les Opticiens éclairés & zélés pour le progrès de leur Art.

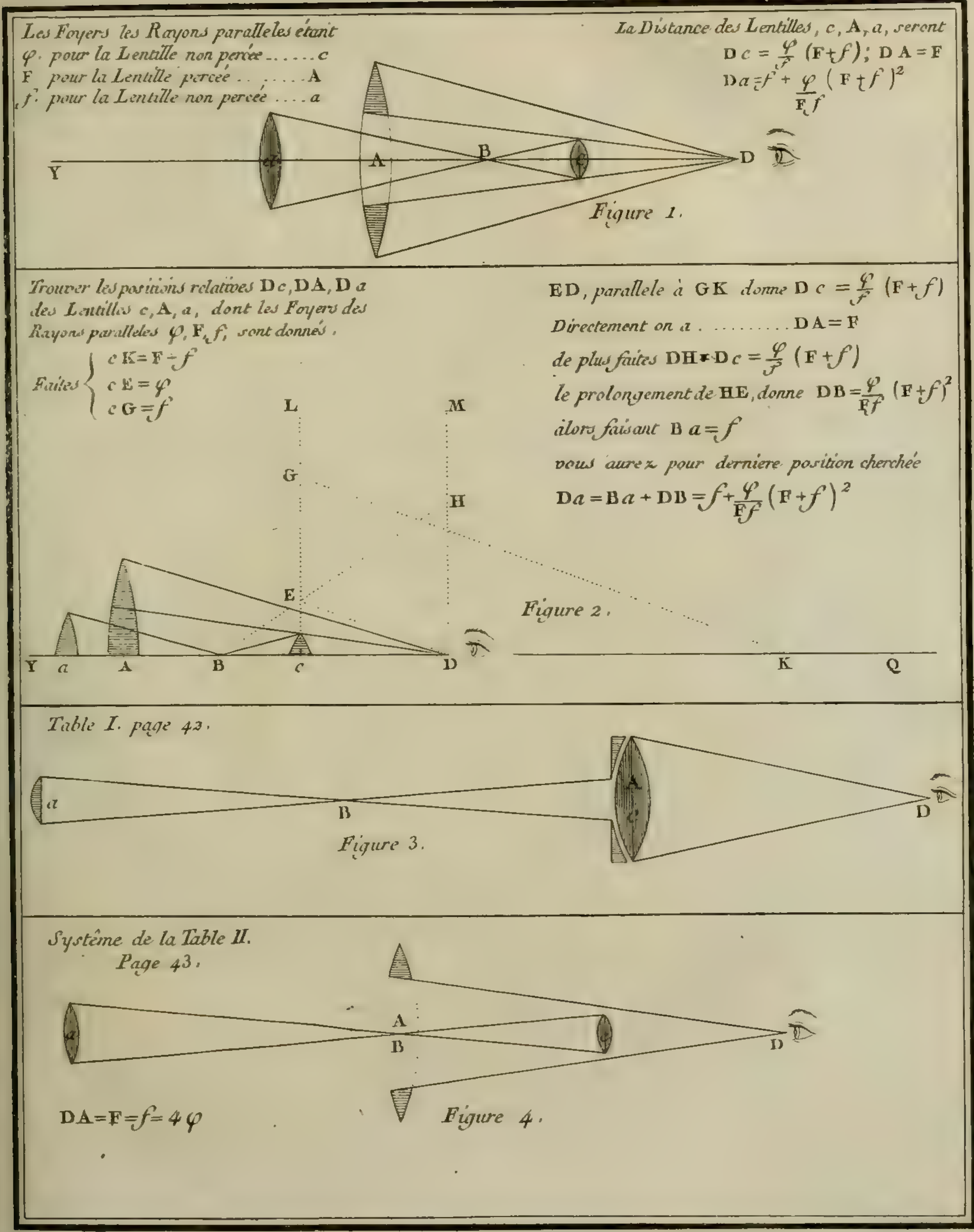
Pour les conſtructions *diplantidiennes*, la lentille percée doit néceſſairement être achromatique; le mieux ſeroit même qu'elles le fuſſent toutes trois, car l'ouverture totale de l'objectif étant partagé en deux fonctions différentes, il eſt clair que les lentilles ne peuvent ſéparément produire un grand effet qu'autant qu'elles ſeront auſſi bonnes qu'elles peuvent l'être.

Quant aux deux dernières Tables IX & X, qui ſont pour les objectifs & pour les oculaires achromatiques, il eſt ſous-entendu que les trois lentilles qui compoſent l'objectif ou l'oculaire total doivent ſeulement être écartées entr'elles de l'épaiſſeur d'une feuille de papier très-mince; car les lentilles, quoique ne devant pas ſe toucher, doivent cependant être le plus proche que faire ſe puiſſe les unes des autres.



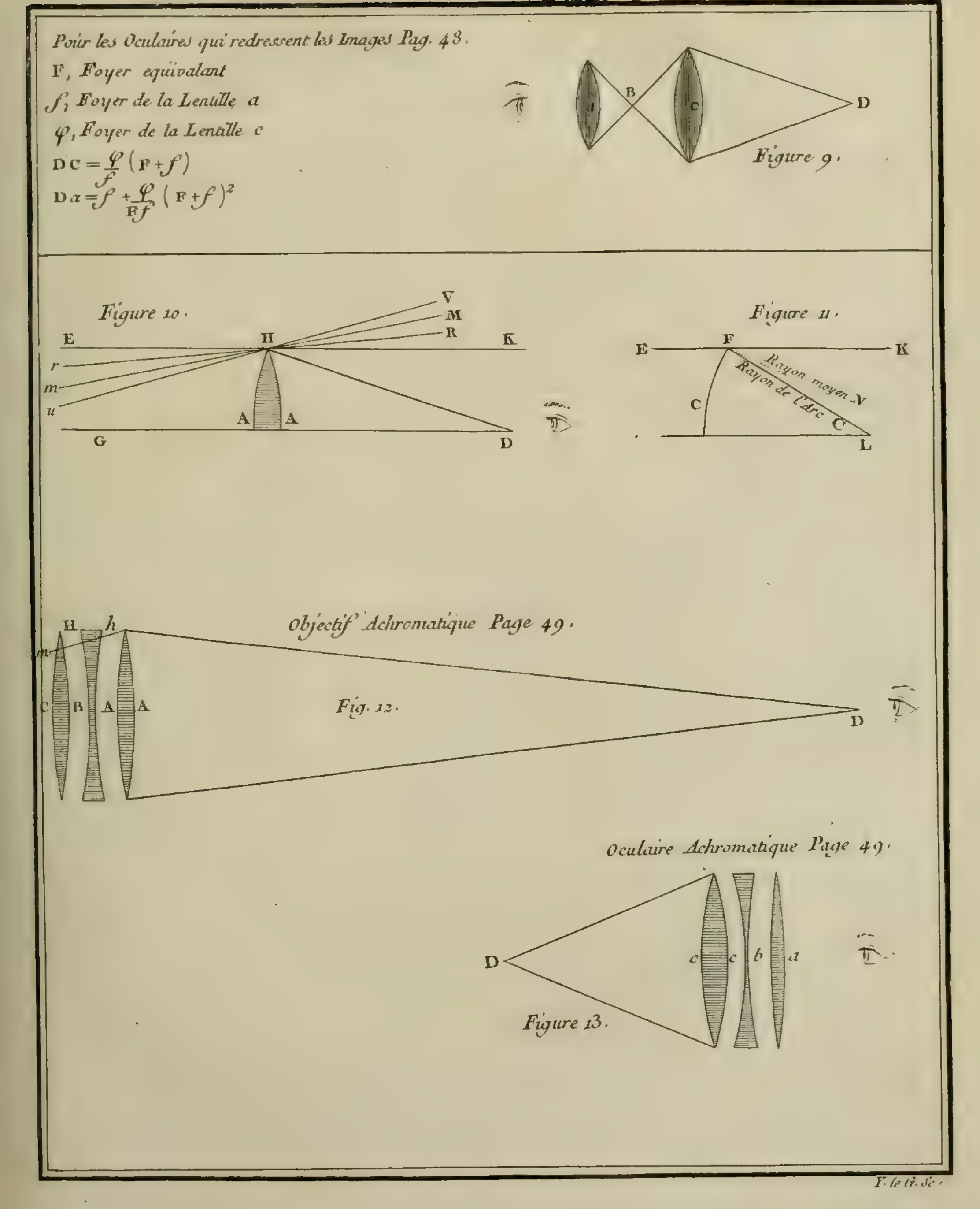

a a, Lentille placée dans le vuide de la Lentille percée A, A
DA=F, Foyer de la Lentille percée A, A
f, Foyer de la Lentille a, placée dans le vuide de la Lentille A
alors on a pour condition du Foyer
des rayons parallèles de la Lentille c
$\varphi = \frac{Ff'(F-f')}{(F+f')^2}$
Table III. page 44.
A
a
a
B
c
D
A
Fig. 5.
Table IV. page 45.
DA = F = 2f = 15 φ
DA = 4/5 F
DC = 1/5 F
A
a
B
c
D
Figure 6.
Objectif, ou Oculaire à double Image
Table V. page 46
Y
A
B
c
D
Figure 7.
Objectif, ou Oculaire à double Image
Table VI. page 47.
Y
B
A
D
Figure 8.
Y. le G. S.




Les Foyers les Rayons paralleles étant
φ. pour la Lentille non percée c
F pour la Lentille percée .... A
f. pour la Lentille non percée .... a
La Distance des Lentilles, c, A, a, seront
$Dc = \frac{\varphi}{f}(F+f)$; $DA = F$
$Da = f + \frac{\varphi}{Ff}(F+f)^2$
Y
A
B
D
Figure 1.
Trouver les positions relatives Dc, DA, Da
des Lentilles c, A, a, dont les Foyers des
Rayons paralleles φ, F, f, sont donnés.
Faites
$cK = F + f$
$cE = \varphi$
$cG = f$
ED, parallele à GK donne $Dc = \frac{\varphi}{f}(F+f)$
Directement on a .... $DA = F$
de plus faites $DH = Dc = \frac{\varphi}{f}(F+f)$
le prolongement de HE, donne $DB = \frac{\varphi}{Ff}(F+f)^2$
alors faisant $Ba = f$
vous aurez pour derniere position cherchée
$Da = Ba + DB = f + \frac{\varphi}{Ff}(F+f)^2$
L
M
G
H
E
Figure 2.
Y
a
A
B
c
D
K
Q
Table I. page 42.
a
B
A
D
Figure 3.
Système de la Table II.
Page 43.
A
B
D
$DA = F = f = 4\varphi$
Figure 4.

Y. le G. Sc.




Pour les Oculaires qui redressent les Images Pag. 48.
F, Foyer equivalant
f, Foyer de la Lentille a
φ, Foyer de la Lentille c
$DC = \frac{\varphi}{f}(F+f)$
$Da = f + \frac{\varphi}{Ff}(F+f)^2$
a
B
c
D
Figure 9.
Figure 10.
V
M
R
E
H
K
r
m
u
A
A
G
D
Figure 11.
E
F
K
Rayon moyen N
Rayon de l'Arc
C
C
L
Objectif Achromatique Page 49.
H
h
m
C
B
A
A
Fig. 12.
D
Oculaire Achromatique Page 49.
D
c
c
b
a
Figure 13.



NOUVELLES MÉTHODES ANALYTIQUES POUR RÉSOUDRE DIFFÉRENTES QUESTIONS ASTRONOMIQUES.

QUATORZIÈME MÉMOIRE,

Dans lequel on applique l'analyſe, à la détermination des orbites des Comètes.

Par M. DIONIS DU SÉJOUR.

Expoſition du Sujet.

(1.) DANS mes Eſſais ſur les Comètes, je me ſuis contenté de jeter un coup-d'œil rapide ſur les Méthodes en uſage pour déterminer les orbites de ces Aſtres: je me propoſois de revenir ſur ce ſujet & d'en faire l'objet d'un travail particulier; je le reprends aujourd'hui. Je vais donner l'analyſe qui m'a paru la plus ſimple & la plus directe pour calculer ces orbites.

On ſent aiſément que pour calculer la route d'une Comète, il faut ſatisfaire à deux conditions principales; la première, que les points de la trajectoire décrite par la Comète, quelle qu'elle ſoit, puiſſent tous appartenir à un ſeul & même plan, dont il s'agit de déterminer la poſition; la ſeconde, que cette trajectoire ſoit une ſection conique. Cette diſtinction ſimple entre la nature des queſtions qu'il s'agit de réſoudre, m'a paru mettre un ordre naturel dans les diſcuſſions auxquelles on doit ſe livrer. J'ai donc examiné s'il n'étoit pas poſſible de partager les équations qui réſolvent le Problème des Comètes en deux claſſes, les unes dépendantes uniquement de la poſition du plan, les autres au contraire dépendantes de la nature de la trajectoire; de manière que l'on pût réſoudre particulièrement les queſtions relatives

à la poſition du plan, ſans les compliquer des difficultés qui appartiennent à la nature des trajectoires.

La ſimplicité de cette idée m'avoit toujours frappé. Il m'avoit été aiſé de démontrer que ſi, par exemple, on pouvoit par une voie quelconque, déterminer le rapport entre trois diſtances ſucceſſives de la Comète à la Terre, correſpondantes à trois obſervations, & que ce rapport fût linéaire, la diſtinction précédente entre les équations du Problème, s'établiſſoit naturellement; & que la poſition du plan de l'orbite ſe concluoit facilement, ſans avoir à réſoudre des équations d'un degré ſupérieur au ſecond. J'avois vu pareillement qu'en faiſant uſage d'une propriété démontrée par Newton, ſur les cordes des trajectoires décrites en vertu de la force centrale, on n'avoit beſoin que de connoître le rapport de deux diſtances de la Comète. L'équation, il eſt vrai, eſt alors d'un degré ſupérieur au ſecond; mais la ſolution, preſque auſſi facile dans la pratique, attendu la forme de l'équation, acquert un degré d'exactitude que l'on ne peut regretter d'acheter par un peu plus de calculs. Je m'étois donc appliqué à chercher les rapports entre les diſtances ſucceſſives de la Comète à la Terre; j'étois même parvenu à un réſultat: je n'ai pas eu de peine à l'abandonner lorſque j'ai eu connoiſſance des ſavantes recherches de M. de la Grange ſur les Comètes. Il me ſuffit de dire qu'en adoptant ſon analyſe, la ſolution en devient plus ſimple, plus exacte & fondée ſur des principes plus lumineux.

Quoique les rapports linéaires entre les diſtances ſucceſſives de la Comète à la Terre, ne ſe trouvent pas directement dans le Mémoire de M. de la Grange, il eſt ſi aiſé de les déduire de ſes principes, que j'ai dû lui en faire hommage: je n'ai d'autre mérite que d'avoir aperçu, que ſi, au lieu d'employer les équations aux diſtances démontrées par ce ſavant Géomètre, l'on veut uniquement conclure le rapport de ces quantités, l'on parvient à des relations du premier degré; en un mot, je crois avoir réſolu la queſtion à laquelle me paroiſſoit

tenir le partage naturel des équations du Problème en deux classes distinctes & séparées.

Les rapports déduits du Mémoire de M. de la Grange, présentoient au premier coup-d'œil une difficulté que la suite des calculs pouvoit rendre plus sensible, celle d'exiger des observations trop prochaines entr'elles. En effet, si d'un côté l'exactitude de la méthode demande des observations peu éloignées, d'un autre côté, l'inconvénient d'avoir à déterminer de très-grands élémens par les différences de quantités, chacunes très-petites, pouvoit jeter beaucoup d'incertitude dans les résultats; j'ai donc cherché à parer à cet inconvénient. J'ai fait voir comment il étoit possible d'employer sans danger des observations notablement distantes, pourvu toutefois que l'on ait des observations intermédiaires qui lient ces observations éloignées; je serois même tenté de croire que cette manière d'envisager le Problème est préférable dans la pratique; que la méthode acquiert par-là le plus grand degré d'exactitude, & que d'ailleurs les erreurs des observations se compensent.

(2.) Après avoir exposé les équations qui peuvent servir à la détermination du plan de l'orbite, je passe à la détermination de la trajectoire: je suppose d'abord que cette trajectoire est une parabole, & je donne les équations pour calculer la parabole particulière qui satisfait aux observations. Les mêmes formules qui déterminent la parabole, peuvent également servir à rectifier la position du plan, s'il s'étoit glissé quelqu'erreur dans les premiers résultats.

Généralement parlant, ces calculs suffisent pour la totalité des Comètes: si cependant la Comète particulière que l'on calcule avoit parcouru un très-grand arc de sa trajectoire; si elle avoit été vue avant & après son passage par le périhélie, & sur-tout, si les observations se refusoient d'une manière sensible à pouvoir être représentées par une seule & même parabole, de manière, qu'en abandonnant le calcul dans l'hypothèse parabolique, on n'eût point à craindre de courir après une exactitude chimérique; alors il faudroit avoir recours au

calcul dans l'ellipſe. J'entre dans des détails ſur cette partie du Problème; en un mot j'applique aux Comètes les principes généraux de la détermination des orbites des Planètes.

Je fais voir enfin qu'il y a un cas particulier où le Problème rigoureux des Comètes ſe réſout ſans faire uſage des rapports des diſtances, & ſans néanmoins employer des équations d'un degré ſupérieur au quatrième; c'eſt celui où la Comète auroit été obſervée dans les deux nœuds.

PREMIÈRE PARTIE,

Dans laquelle on ſuppoſe que l'orbite des Comètes eſt parabolique.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

(3.) Le calcul des orbites des Comètes conſiſte à déterminer, d'après les obſervations, les élémens ſuivans:

Le lieu du nœud aſcendant ſur l'Écliptique;

La diſtance périhélie de la Comète;

L'inclinaiſon du plan de l'orbite ſur l'Écliptique;

Le ſens du mouvement de la Comète dans ſon orbite, relativement à l'ordre des ſignes;

La diſtance du périhélie au nœud aſcendant: cette diſtance ſe compte ſur l'orbite de la Comète;

L'inſtant du paſſage de la Comète par le périhélie.

Voyons comment ces élémens ſe déterminent, d'après les obſervations.

Équation à la trajectoire de la Comète ſur le plan de ſon orbite.

(4.) Puiſque l'équation à la trajectoire de la Comète eſt une parabole, il faut déterminer d'abord l'équation à la parabole par rapport au foyer.

Fig. 1. Soit AM une parabole; FAD ſon grand axe; F ſon foyer; FA la diſtance du foyer au ſommet de la parabole;

ſoit pris ſur FAD une ligne AD égale à FA, & par le point D, ſoit menée la ligne indéfinie DHE, perpendiculaire à la ligne FAD. Du point F, menons un rayon vecteur quelconque FM à la courbe ; & du point M, menons la ligne MH perpendiculaire à la ligne DHE. Fig. 1.

On démontre dans la parabole que quelque part que l'on prenne le point M, on a toujours $FM = HM$; d'où il ſuit, que $FA = AD$. Du point M, abaiſſons ſur la ligne FAD la perpendiculaire MN, on aura, en nommant 1 le ſinus total, $FN = FM \text{ coſ. } AFM$; d'ailleurs

$$HM = AF + AD - FN = 2AF - FN;$$

donc $$HM + FN = 2AF;$$

donc $$FM + FM \text{coſ.} AFM = 2AF;$$

donc $$FM(1 + \text{coſ. } AFM) = 2AF.$$

Il ſuit de-là, que ſi l'on nomme

R le rayon vecteur de la parabole,

v l'angle traverſé depuis le périhélie,

1 le ſinus total,

D la diſtance périhélie;

on a

$$(1)\ R(1 + \text{coſ. } v) - 2D = 0.$$

Expreſſion de l'aire de la parabole, & du temps employé par la Comète à parcourir un arc quelconque de ſon orbite.

(5.) Dans toute trajectoire décrite en vertu d'une force centrale, les aires ſont proportionnelles aux temps employés à décrire les arcs correſpondans; il faut donc, avant tout, avoir l'expreſſion de l'aire de la parabole.

On ſait généralement que l'aire d'une courbe dont le

rayon vecteur $= R$, & l'angle traversé $= v$, s'exprime par $\int \frac{R^2 dv}{2}$. Maintenant, si l'on différencie l'équation (1) du *paragraphe précédent*, l'on aura $\frac{2DdR}{R} - R\,\text{sin.}\,v\,dv = 0$, ou à cause de $R\,\text{sin.}\,v = 2D^{\frac{1}{2}}\sqrt{(R - D)}$,

$$D^{\frac{1}{2}}dR - R\sqrt{(R - D)}\,dv = 0.$$

Substituant cette valeur dans l'aire de la parabole, on aura

$$\text{Aire de la parabole} = \int \tfrac{1}{2} D^{\frac{1}{2}} \frac{R\,dR}{\sqrt{(R - D)}},$$

& cette dernière quantité, en ajoutant convenablement la constante, a pour intégrale $\frac{1}{3}D^{\frac{1}{2}}(R + 2D)\sqrt{(R - D)}$; donc

$$\text{Aire de la parabole} = \tfrac{1}{3}D^{\frac{1}{2}}(R + 2D)\sqrt{(R - D)}.$$

Cette expression sert à mesurer le temps écoulé depuis le passage de la Comète par le périhélie.

(6.) L'expression que nous venons de déterminer, est bien proportionnelle pour chaque parabole, au temps employé par la Comète à parcourir les différens arcs de cette parabole depuis le périhélie; mais si l'on veut comparer les temps employés par différentes Comètes, à parcourir les différens arcs respectifs de leurs différentes paraboles, afin d'avoir une expression générale qui convienne à toutes les paraboles, à tous les arcs & à tous les temps, il faut multiplier l'expression précédente de l'aire de la parabole, par un coëfficient qu'il s'agit de déterminer.

(7.) On démontre qu'une Comète dont la distance périhélie est égale à la moyenne distance du Soleil à la Terre, emploie $109^j\ 14^h\ 46'\frac{1}{3}$ ou $157846'\frac{1}{3}$ à décrire 90^d d'anomalie; que de plus les carrés des temps employés à parcourir une même anomalie dans les différentes paraboles, sont comme les cubes des distances périhélies; & qu'enfin le rayon

rayon vecteur qui répond à 90 degrés d'anomalie, est double de la distance périhélie.

Il suit de-là que si l'on nomme en général,

δ le nombre de minutes de temps employées dans chaque parabole à parcourir 90 degrés d'anomalie,

X le nombre de minutes de temps qui répond au temps employé à parcourir les différentes anomalies,

R le rayon vecteur de la Comète,

r la moyenne distance de la Terre au Soleil,

D la distance périhélie;

on a généralement

$$X = \frac{1}{4} \frac{(R + 2D)\sqrt{(R - D)}\,\delta}{D^{\frac{1}{2}}}.$$

Mais, par ce qui vient d'être remarqué précédemment,

$$\delta : 157846'\tfrac{1}{3} :: D^{\frac{3}{2}} : r^{\frac{3}{2}};$$

donc généralement

$$(1)\ X = \frac{1}{4} \frac{(R + 2D)\sqrt{(R - D)}\ 157846'\frac{1}{3}}{r^{\frac{3}{2}}}.$$

(8.) Nous remarquerons que si l'on suppose avec les Astronomes, $r = 100000$, dont le logarithme égale 10,0000000, l'on aura — 10,4038259 pour logarithme de $\frac{1}{4} \times \frac{157846'\frac{1}{3}}{r^{\frac{3}{2}}}$.

(9.) Au moyen des équations du *paragraphe précédent*, on peut connoître non-seulement le temps employé par la Comète à parcourir ses différentes anomalies, mais on peut encore déterminer le temps qu'elle emploie à parcourir les différens arcs de sa trajectoire. Soit en effet,

R' le rayon vecteur qui commence l'arc de la trajectoire;

R'' le rayon vecteur qui termine cet arc;

t le nombre de minutes employées à parcourir l'arc;

on aura évidemment

$$(1)\; t = [(R'' + 2D)\sqrt{(R'' - D)} \mp \sqrt{(R' + 2D)}\sqrt{(R' - D)}] \times \frac{157846'\frac{1}{7}}{4r^{\frac{1}{2}}};$$

& si l'on nommoit

- R''' un troisième rayon vecteur qui termine un nouvel arc,
- t' le nombre de minutes employées à parcourir ce nouvel arc,
- ϑ le nombre de minutes écoulées entre la première & la troisième observation;

l'on aura pareillement

$$(2)\; t' = [(R''' + 2D)\sqrt{(R''' - D)} \mp (R'' + 2D)\sqrt{(R'' - D)}] \times \frac{157846'\frac{1}{7}}{4r^{\frac{1}{2}}};$$

$$(3)\; \vartheta = [(R''' + 2D)\sqrt{(R''' - D)} \mp (R' + 2D)\sqrt{(R' - D)}] \times \frac{157846'\frac{1}{7}}{4r^{\frac{1}{2}}}.$$

Dans chacune de ces équations, on fera usage des signes inférieurs si, dans l'intervalle des observations, la Comète a passé par son périhélie; on fera usage des signes supérieurs dans le cas contraire.

Expression de la corde comprise entre deux rayons vecteurs R', R''.

(10.) Soit dans une courbe quelconque,

- R' un premier rayon vecteur;
- R'' un second rayon vecteur;
- v' l'angle compris entre le rayon vecteur R' & une ligne donnée de position, que l'on prend pour l'origine des angles traversés;
- v'' l'angle compris entre le rayon vecteur R'' & la même ligne origine des angles traversés;
- c la corde de la courbe comprise entre les rayons R', R'';

Il est évident que l'on a

$$c^2 = (R''\,\text{cos.}\,v'' - R'\,\text{cos.}\,v')^2 + (R''\,\text{sin.}\,v'' \mp R'\,\text{sin.}\,v')^2,$$

suivant que les angles v'', v', sont pris du même côté ou de côté différent, par rapport à l'origine des angles traversés;

donc

(1) $c^2 = R''^2 + R'^2 - 2\,R''R'\,(\text{cof.}\,v''\,\text{cof.}\,v' \pm \text{fin.}\,v''\,\text{fin.}\,v')$;

& comme cof. v'' cof. v' $\pm$ fin. v'' fin. v' eft toujours égal au cofinus de l'angle compris entre les deux rayons vecteurs,

(2) $c^2 = R''^2 + R'^2 - 2\,R''R'$ cof. (angle compris entre les deux rayons R'', R').

De la relation entre les Obfervations géocentriques & la longueur de la corde correfpondante de la Parabole.

(11.) Je fuppoferai dans ces recherches que l'on connoît avec précifion les élémens fuivans:

La longitude du Soleil;

La diftance du Soleil à la Terre;

La longitude géocentrique de la Comète; c'eft-à-dire fa diftance au premier point d'*Ariès*, comptée fur l'Écliptique & vue de la Terre;

La latitude géocentrique de la Comète.

Je nommerai

A la longitude du Soleil;

T la diftance du Soleil à la Terre;

B la longitude géocentrique de la Comète;

L la latitude géocentrique de la Comète.

Je fuppoferai que l'origine des angles A, B eft au premier point d'*Ariès*, & qu'ils font comptés de fuite depuis 0^d jufqu'à 360^d; je fuppoferai pareillement que la latitude géocentrique de la Comète eft boréale; de forte que fi elle étoit auftrale, le finus de cette latitude deviendroit négatif, le cofinus reftant toujours pofitif.

(12.) Soit ω un angle tel que

$$\text{cof.}\,\omega = \frac{\sqrt{[\text{cof.}^2 \tfrac{1}{2}(90^d + \text{afc. dr. Com.}) \times (\text{fin. obliq. Éclipt.})\ \text{cof. (décl. Com.)}]}}{\text{fin.} \tfrac{1}{2}\,(\text{obliq. de l'Éclipt.} + \text{dift. Comète au pôle boréal de l'Équateur})};$$

on a

(1) fin. $\frac{1}{2}$ (diftance de la Comète au pôle boréal de l'Écliptique) $=$ fin. $\frac{1}{2}$ (obliq. Éclipt. $+$ dift. Comète au pôle bor. de l'Équat.) fin. ω;

on a pareillement

(2) cof. (latitude de la Comète) $\times$ cof. (longitude de la Comète) $-$ cof. (décl. de la Comète) $\times$ cof. (afcenf. droite de la Comète) $= 0$,

On voit par-là comment les longitude & latitude géocentriques de la Comète, se déduisent de la déclinaison & de l'ascension droite, qui sont immédiatement données par les observations.

Fig. 2. (13.) Soit ♈ ♋ ♎ ♑ l'Écliptique rapportée à la sphère des fixes; S le Soleil; EeT l'orbite de la Terre; T le lieu de la Terre dans son orbite, éloigné de 180^d du lieu du Soleil; Ee le diamètre de l'orbite terrestre passant par le premier point d'*Ariès*; Tt une parallèle indéfinie à la ligne Ee; C' la projection de la Comète sur le plan de l'Écliptique; C le lieu de la Comète dans l'espace; CC' la distance perpendiculaire de la Comète au plan de l'Écliptique; TC la distance de la Terre à la Comète.

De la projection C' de la Comète, abaissons sur la ligne ESe, la droite $C'P$; & du lieu T de la Terre, abaissons sur la même ligne, la droite Tp. Nommons

x la distance SP du Soleil au point P;
y la distance PC' du point P, à la projection C' de la Comète;
z la distance CC' de la Comète au plan de l'Écliptique;
ξ la distance Sp du Soleil au point p;
v la distance pT du point p, à la Terre T;
Δ la distance TC de la Terre à la Comète;
T la distance TS de la Terre au Soleil;
A la longitude du Soleil, vue de la Terre;
B la longitude géocentrique de la Comète;
L la latitude géocentrique de la Comète.

Dans le triangle STp, l'on a $ST : Sp :: 1 : \text{cos}.\, TSp$; mais $TS = T$, angle $TSp = A$, & $Sp = \xi$; donc $\xi = T\, \text{cos}.\, A$; par une raison semblable, $v = T\, \text{sin}.\, A$. Dans le triangle TCC' rectangle en C', on a $TC : TC' :: 1 : \text{cos}.\, CTC'$; $TC : CC' :: 1 : \text{sin}.\, CTC'$; mais $TC = \Delta$, angle $CTC' = L$; donc $TC' = \Delta\, \text{cos}.\, L$; $CC' = \Delta\, \text{sin}.\, L$. Dans le triangle TtC', on a $TC' : C't :: 1 : \text{sin}.\, C'Tt$; $TC' : Tt :: 1 : \text{cos}.\, C'Tt$; mais $TC' = \Delta\, \text{cos}.\, L$; $C't = Pt - PC' = v - y$;

$Tt = Sp - SP = \xi - x$; angle $C'Tt = B$; donc Fig. 2.
$\nu - y = \Delta \text{ cof. } L \text{ fin. } B$; $\xi - x = \Delta \text{ cof. } L \text{ cof. } B$;
donc enfin, à cauſe de $\xi = T \text{ cof. } A$, de $\nu = T \text{ fin. } A$,
& de $z = CC'$,

$$(1)\ x = T \text{cof.} A - \Delta \text{cof.} B \text{cof.} L;$$

$$(2)\ y = T \text{fin.} A - \Delta \text{fin.} B \text{cof.} L;$$

$$(3)\ z = \Delta \text{fin.} L.$$

D'où l'on voit, que les trois coordonnées x, y, z, ne dépendent que d'une ſeule inconnue Δ.

(14.) Si l'on cherche maintenant l'expreſſion de la diſtance SC de la Comète au Soleil, & que l'on nomme

R la diſtance de la Comète au Soleil,

on aura évidemment $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$; donc

$$(1)\ R^2 = T^2 + \Delta^2 - 2\Delta T \text{ cof. } L \text{ cof. } (B - A).$$

(15.) Conſidérons maintenant deux obſervations, & nommons x', y', z', Δ', T', R', A', B', L' les quantités qui appartiennent à la première obſervation; x'', y'', z'', Δ'', T'', R'', A'', B'', L'' les quantités qui appartiennent à la ſeconde; on aura pour chacune des obſervations, des équations ſemblables à celles que nous venons de démontrer. De plus, ſi l'on nomme

c la corde compriſe entre les rayons vecteurs R'', R',

on aura

$$c^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2x'x'' - 2y'y'' - 2z'z'';$$

mais

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R'^2;\ x''^2 + y''^2 + z''^2 = R''^2;$$

donc

(1) $c^2 = R'^2 + R''^2 - 2[T'T'' \text{cof.} (A''-A') - T'\Delta'' \text{cof.} L'' \text{cof.} (B''-A') - T''\Delta' \text{cof.} L' \text{cof.} (B'-A'') + \Delta'\Delta'' \text{cof.} L' \text{cof.} L'' \text{cof.} (B''-B') + \Delta'\Delta'' \text{fin.} L' \text{fin.} L'']$;

bien entendu que l'on a d'ailleurs

(2) $R' = \sqrt{[T'^2 + \Delta'^2 - 2\Delta' T' \text{cof.} L' \text{cof.} (B' - A')]}$;

(3) $R'' = \sqrt{[T''^2 + \Delta''^2 - 2\Delta'' T'' \text{cof.} L'' \text{cof.} (B'' - A'')]}$.

Et la queftion propofée eft réfolue.

Détermination de l'angle compris entre les deux rayons vecteurs R'' R'.

(16.) Si l'on compare cette dernière valeur de c^2 avec celle que l'on tire de l'équation (2) du *§. 10,* & que l'on nomme

N l'angle compris entre les deux rayons vecteurs R' R'';

on aura

(1) $R'R'' \text{cof.} N - T'T'' \text{cof.} (A''-A') + T'\Delta'' \text{cof.} L'' \text{cof.} (B''-A') + T''\Delta' \text{cof.} L' \text{cof.} (B'-A'') - \Delta'\Delta'' \text{cof.} L' \text{cof.} L'' \text{cof.} (B''-B') - \Delta'\Delta'' \text{fin.} L' \text{fin.} L'' = 0$.

Quoique l'équation (1) donne deux valeurs de l'angle N, puifqu'un même cofinus appartient à deux angles différens; on ne peut cependant pas être en fufpend fur le choix de cet angle; & c'eft toujours le plus petit des deux angles qu'il faut choifir.

Suppofons en effet que cof. N foit pofitif, & qu'il réponde à 10 degrés; le même cofinus répondra auffi à 350 degrés: or on ne peut pas être en fufpend fur le choix de ces deux angles.

(17.) Il arrive fouvent, que dans l'équation du *paragraphe précédent*, l'angle N eft d'un petit nombre de degrés, ce qui rend cette équation peu commode dans fon ufage, à

cause de la très-grande précision qu'elle exige dans le calcul. Nous remarquerons alors, que puisqu'en général,

$$\text{cos.}\,N = \text{cos.}(\tfrac{1}{2}N + \tfrac{1}{2}N) = \text{cos.}^2\tfrac{1}{2}N - \text{sin.}^2\tfrac{1}{2}N = 1 - 2\,\text{sin.}^2\tfrac{1}{2}N,$$

l'équation devient

$$(1)\ R'R'' - T'T''\text{cos.}(A''-A') + T'\Delta''\text{cos.}\,L''\text{cos.}(B''-A') + T''\Delta'\text{cos.}\,L'\text{cos.}(B'-A'')$$
$$-\Delta'\Delta''[\text{cos.}\,L'\text{cos.}\,L''\text{cos.}(B''-B') + \text{sin.}\,L'\text{sin.}\,L''] - 2R'R''\text{sin.}^2\tfrac{1}{2}N = 0.$$

Par la même raison, l'équation (2) du *§. 10*, devient

$$(2)\ (R''-R')^2 - c^2 + 4R'R''\text{sin}^2\tfrac{1}{2}N = 0.$$

Expression de la corde de la parabole, en rayons vecteurs R', R'' *& en distance périhélie.*

(18.) Les recherches précédentes conduisent naturellement à avoir l'expression de la corde de la parabole, en rayons vecteurs R', R'', & en distance périhélie ; en effet, nous avons vu *(§. 10)* que l'on a l'équation suivante,

$$2R'R''\text{cos.}\,N - R'^2 - R''^2 + c^2 = 0.$$

Je remarque que l'angle N étant l'angle compris entre les rayons vecteurs R', R''; si l'on nomme v' & v'' les deux anomalies correspondantes de la Comète, l'on a

$$R'R''\text{cos.}\,N = R''R'\text{cos.}\,v''\,\text{cos.}\,v' + R''R'\text{sin.}\,v''\,\text{sin.}\,v';$$

mais, par la propriété de la parabole, si l'on nomme

D la distance périhélie,

à cause des deux équations,

$$R'(1+\text{cos.}\,v') - 2D = 0;\ R''(1+\text{cos.}\,v'') - 2D = 0;$$

l'on a

$$R'R''\,\text{cos.}\,v''\,\text{cos.}\,v' = 4D^2 - 2D(R'+R'') + R'R'';$$
$$R'R''\,\text{sin.}\,v''\,\text{sin.}\,v' = \pm 4D\sqrt{(R'-D)}\sqrt{(R''-D)};$$

donc

$$(1)\ c^2 - (R'-R'')^2 + 4D[2D \pm 2\sqrt{(R'-D)}\sqrt{(R''-D)} - R' - R''] = 0.$$

La valeur de c^2 a un double ſigne; la première a lieu lorſque la corde ne coupe point le grand axe de la parabole; la ſeconde valeur a lieu lorſque la corde coupe le grand axe.

Si l'on compare cette valeur de c^2 avec celle du §. 15, on aura la relation ſuivante entre les élémens de la parabole, & les obſervations priſes deux à deux,

$$(2)\ 2D[2D \pm 2\sqrt{(R'-D)}\sqrt{(R''-D)} - R' - R''] + R'R'' - T'T''\operatorname{cof.}(A''-A') + T'\Delta''\operatorname{cof.}L''\operatorname{cof.}(B''-A') + T''\Delta'\operatorname{cof.}L'\operatorname{cof.}(B'-A'') - \Delta'\Delta''[\operatorname{cof.}L'\operatorname{cof.}L''\operatorname{cof.}(B''-B') + \operatorname{fin.}L'\operatorname{fin.}L''] = 0.$$

Si l'on différencie cette dernière équation, & que l'on ſuppoſe

$$f = R'' - 2D \pm \frac{2D(R''-D)}{\sqrt{(R'-D)}\sqrt{(R''-D)}}$$

$$f' = R' - 2D \pm \frac{2D(R'-D)}{\sqrt{(R'-D)}\sqrt{(R''-D)}},$$

$$g = T''\operatorname{cof.}L'\operatorname{cof.}(B'-A'') - \Delta''[\operatorname{cof.}L'\operatorname{cof.}L''\operatorname{cof.}(B''-B') + \operatorname{fin.}L'\operatorname{fin.}L''];$$

$$g' = T'\operatorname{cof.}L''\operatorname{cof.}(B''-A') - \Delta'[\operatorname{cof.}L'\operatorname{cof.}L''\operatorname{cof.}(B''-B') + \operatorname{fin.}L'\operatorname{fin.}L''],$$

$$h = 8D - 2(R'+R'') \pm \frac{[8D^2 - 6D(R'+R'') + 4R'R'']}{\sqrt{(R'-D)}\sqrt{(R''-D)}},$$

l'on aura

$$(3)\ f\,dR' + g\,d\Delta' + f'\,dR'' + g'\,d\Delta'' + h\,dD = 0.$$

Il n'eſt pas même néceſſaire que l'équation (2) ſoit rigoureuſement ſatisfaite par la ſubſtitution des différentes valeurs de R', R'', Δ', Δ'', D, pour que l'on puiſſe employer une équation de la forme précédente; & ſi l'on nomme

γ ce que devient l'équation (2) par les ſubſtitutions des valeurs particulières de R', R'', Δ', Δ'', D,

l'on aura

$$(4)\ f\,dR' + g\,d\Delta' + f'\,dR'' + g'\,d\Delta'' + h\,dD - \gamma = 0.$$

Détermination

Détermination des Équations qui sont indépendantes de la nature de la trajectoire des Comètes.

(19.) J'ai annoncé que les équations qui résolvent le Problème des Comètes, se partagent naturellement en deux classes. Les unes sont indépendantes de la nature de la trajectoire particulière que décrit la Comète & de la force centrale qui l'anime; elles supposent uniquement que la Comète se meut dans un même plan. Les autres équations au contraire, sont dépendantes de la nature de la trajectoire spécifique de la Comète. Comme cette distinction m'a paru jeter beaucoup de jour sur les questions que je me propose d'examiner, & mettre un ordre naturel dans les discussions auxquelles je dois me livrer, j'ai cru devoir l'adopter. Je vais donc m'occuper d'abord des équations indépendantes de la nature des trajectoires des Comètes, & des questions qui en sont les corollaires.

De la relation entre l'inclinaison du plan de l'orbite de la Comète sur l'Écliptique, la position du nœud ascendant & la distance de la Comète à la Terre, à l'instant de l'observation.

(20.) Soit

R le rayon vecteur de la Comète;

I l'angle d'inclinaison du plan de l'orbite sur l'Écliptique;

u l'angle du rayon vecteur de la Comète avec la ligne des nœuds; cet angle est compté sur le plan de l'orbite de la Comète, en partant du nœud ascendant, & en suivant le sens du mouvement de cet astre dans son orbite;

ζ la longitude du nœud ascendant de la Comète;

T la distance du Soleil à la Terre;

Δ la distance de la Comète à la Terre;

A la longitude du Soleil;

B la longitude géocentrique de la Comète;

L la latitude géocentrique de la Comète.

Fig. 3. Soit ♈ ♋ ♎ ♑ l'Écliptique rapportée à la ſphère des fixes; S le Soleil; EeT l'orbite de la Terre; T le lieu de la Terre dans ſon orbite; NSn la ligne des nœuds; N le nœud aſcendant; C le lieu de la Comète dans ſon orbite; SC le rayon vecteur de la Comète; C' la projection de la Comète ſur l'Écliptique; CC' la diſtance perpendiculaire de la Comète au plan de l'Écliptique; CM la perpendiculaire abaiſſée de la Comète ſur la ligne des nœuds dans le plan de ſon orbite; $C'M$ la perpendiculaire abaiſſée de la projection C' de la Comète ſur la ligne des nœuds dans le plan de l'Écliptique; Tm la perpendiculaire abaiſſée de la Terre ſur la ligne des nœuds; TC la diſtance de la Comète à la Terre, ESe le diamètre de l'orbite terreſtre paſſant par le premier point d'*Ariès*. Par la Terre T, menons une parallèle indéfinie Tt' au diamètre ESe de l'orbite de la Terre, paſſant par le premier point d'*Ariès*, & une autre parallèle Tt à la ligne NSn des nœuds de la Comète. Prenons le point t tel que Mt ſoit le prolongement de $C'M$, & que par conſéquent $C'Mt$ ſoit une droite perpendiculaire à la ligne Tt.

Il eſt clair que puiſque l'angle $MSC = u$, & que $SC = R$, l'on a $CM = R \sin. u$; $MS = R \operatorname{cof.} u$; d'ailleurs puiſque l'angle $CMC' = I$, & que le triangle CMC' eſt rectangle en C', l'on a $CC' = R \sin. u \sin. I$; $C'M = R \sin. u \operatorname{cof.} I$; enfin puiſque $TC = \Delta$, que l'angle $CTC' = L$, & que le triangle CTC' eſt rectangle en C', l'on a $CC' = \Delta \sin. L$; comparant les deux valeurs de CC', l'on aura

$$(1) \quad R \sin. u \sin. I - \Delta \sin. L = 0.$$

Maintenant, puiſque les droites Tt, NSn ſont parallèles, on a

$$Mt = mT = T \sin. (TSm);$$

$$tC' = Mt + MC' = T \sin. (TSm) + R \sin. u \operatorname{cof.} I.$$

De plus, l'angle tTC' eſt évidemment égal à la longitude

géocentrique de la Comète moins la longitude du nœud ascendant, puisqu'en effet il est égal à l'angle $C'Tt'$ moins l'angle tTt'. Par une raison semblable, l'angle STt est égal à la longitude du Soleil moins la longitude du nœud ascendant de la Comète; donc angle STt = angle $TSm = A - \zeta$; donc T sin. $(TSm) = T$ sin. $(A - \zeta$; donc $tC' = T$ sin. $(A - \zeta) + R$ sin. u cos. I. De plus, à cause du triangle tTC' rectangle en t, on a Fig. 3.

$$TC' \text{ sin. } (C'Tt) - Ct = 0;$$

d'ailleurs l'angle $(C'Tt) = B - \zeta$, & $TC' = \Delta$ cos. L; donc

$$(2)\ \Delta \text{ cos. } L \text{ sin. } (B - \zeta) - T \text{sin. } (A - \zeta) - R \text{ sin. } u \text{ cos. } I = 0;$$

ou enfin, à cause de R sin. $u = \frac{\Delta \text{ sin. } L}{\text{sin. } I}$,

$$(3)\ \text{tang. } I [\Delta \text{ cos. } L \text{ sin. } (B - \zeta) - T \text{sin. } (A - \zeta)] - \Delta \text{sin. } L = 0.$$

Au moyen de cette dernière équation, lorsque l'on connoîtra la distance de la Comète à la Terre & la position du nœud, l'on déterminera l'inclinaison de l'orbite; & réciproquement, si l'on connoissoit l'inclinaison de l'orbite & la position du nœud, l'on détermineroit la distance de la Comète à la Terre.

Détermination de l'inclinaison de l'orbite & de la position du nœud ascendant, lorsque l'on connoît les distances de la Comète à la Terre à l'instant de deux observations.

(21.) Il est évident que, pour chaque observation, l'on a des équations de la forme précédente. Supposons donc que l'on ait trois observations, & que l'on nomme

Δ', A', B', T', L', les quantités qui appartiennent à la 1.re observation,
Δ'', A'', B'', T'', L'', les quantités qui appartiennent à la 2.e observation,
Δ''', A''', B''', T''', L''', les quantités qui appartiennent à la 3.e observation,

l'on aura les trois équations suivantes,

$$(1)\ \text{tang } I [\Delta' \text{ cos. } L' \text{ sin. } (B' - \zeta) - T' \text{sin. } (A' - \zeta)] - \Delta' \text{ sin. } L' = 0;$$
$$(2)\ \text{tang. } I [\Delta'' \text{cos. } L'' \text{ sin. } (B'' - \zeta) - T'' \text{sin. } (A'' - \zeta)] - \Delta'' \text{sin. } L'' = 0;$$
$$(3)\ \text{tang. } I [\Delta''' \text{cos. } L''' \text{sin. } (B''' - \zeta) - T''' \text{ sin. } (A''' - \zeta)] - \Delta''' \text{sin. } L''' = 0;$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4)\ \text{tang.}\, I\,[(\Delta' \cos. L' \sin. B' - T' \sin. A') \cos. \zeta - (\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A') \sin. \zeta] - \Delta' \sin. L' = 0;$$

$$(5)\ \text{tang.}\, I\,[(\Delta'' \cos. L'' \sin. B'' - T'' \sin. A'') \cos. \zeta - (\Delta'' \cos. L'' \cos. B'' - T'' \cos. A'') \sin. \zeta] - \Delta'' \sin. L'' = 0;$$

$$(6)\ \text{tang.}\, I\,[(\Delta''' \cos. L''' \sin. B''' - T''' \sin. A''') \cos. \zeta - (\Delta''' \cos. L''' \cos. B''' - T''' \cos. A''') \sin. \zeta] - \Delta''' \sin. L''' = 0.$$

Combinons maintenant ces équations deux à deux; c'est-à-dire, la quatrième avec la cinquième, & cette même quatrième avec la sixième, l'on aura

$$\begin{aligned}(7)\ [\Delta'' \sin. L''\, (\Delta' \cos. L' \sin. B' - T' \sin. A') \\ - \Delta' \sin. L' (\Delta'' \cos. L'' \sin. B'' - T'' \sin. A'')] \cos. \zeta \\ - [\Delta'' \sin. L'' (\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A') \\ - \Delta' \sin. L' (\Delta'' \cos. L'' \cos. B'' - T'' \cos. A'')] \sin. \zeta = 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8)\ [\Delta''' \sin. L'''\, (\Delta' \cos. L' \sin. B' - T' \sin. A') \\ - \Delta' \sin. L' (\Delta''' \cos. L''' \sin. B''' - T''' \sin. A''')] \cos. \zeta \\ - [\Delta''' \sin. L''' (\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A') \\ - \Delta' \sin. L' (\Delta''' \cos. L''' \cos. B''' - T''' \cos. A''')] \sin. \zeta = 0;\end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(9)\ \text{tang.}\, \zeta = \frac{\Delta'' \sin L'' (\Delta' \cos. L' \sin. B' - T' \sin. A') - \Delta' \sin. L' (\Delta'' \cos. L'' \sin. B'' - T'' \sin. A'')}{\Delta'' \sin. L'' (\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A') - \Delta' \sin. L' (\Delta'' \cos. L'' \cos. B'' - T'' \cos. A'')};$$

$$(10)\ \text{tang.}\, \zeta = \frac{\Delta''' \sin. L''' (\Delta' \cos. L' \sin. B' - T' \sin. A') - \Delta' \sin. L' (\Delta''' \cos. L''' \sin. B''' - T''' \sin. A''')}{\Delta''' \sin. L''' (\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A') - \Delta' \sin. L' (\Delta''' \cos. L''' \cos. B''' - T''' \cos. A''')}.$$

Au moyen des équations précédentes, si l'on connoît les distances de la Comète à la Terre à l'instant de deux observations, on déterminera tout de suite la position du plan de son orbite, quelle que soit la nature de sa trajectoire: en effet, les équations donneront la position du nœud ascendant & l'inclinaison du plan de l'orbite.

(22.) L'espèce de l'angle ζ n'est point arbitraire, & cet angle est donné spécifiquement par les équations du §. 21. Il doit être employé tel qu'il est donné par l'analyse;

c'eſt-à-dire, qu'il eſt compris entre 0^d & 90^d, ſi le numérateur & le dénominateur de ſon expreſſion ſont tous deux poſitifs ; il eſt compris entre 90^d & 180^d, ſi le numérateur eſt poſitif & le dénominateur négatif ; il eſt compris entre 180^d & 270^d, ſi le numérateur & le dénominateur ſont tous deux négatifs ; il eſt compris entre 270^d & 360^d, ſi le numérateur eſt négatif & le dénominateur poſitif. Cette remarque s'applique en général à tous les angles donnés par une tangente dont l'expreſſion renferme un numérateur & un dénominateur.

Nous ferons une exception à la règle précédente, relativement à l'inclinaiſon du plan de l'orbite : en effet, cette inclinaiſon étant déterminée par ſa tangente, il s'enſuivroit, d'après la règle précédente, que cette inclinaiſon pourroit avoir toutes les valeurs depuis 0^d juſqu'à 360^d. Si cependant l'on fait attention qu'un plan qui fait, par exemple, avec un ſecond plan, un angle de 200^d, n'eſt que le prolongement du plan qui fait avec ce même ſecond plan, un angle de 20^d ; on pourra ne ſuppoſer à l'inclinaiſon du plan de l'orbite, que des valeurs plus petites que 180^d. Si donc tang. I eſt poſitive, l'inclinaiſon ſera entre 0^d & 90^d, & la Comète ſera directe ; ſi tang. I eſt négative, l'inclinaiſon ſera entre 90^d & 180^d, & la Comète ſera rétrograde. Continuons nos recherches.

(23.) Il eſt évident qu'il y a un nombre infini de valeurs de Δ', Δ'', Δ''', qui rendent nulles les équations (7) & (8) du *§. 21*, puiſque ces équations renfermant chacune deux variables, il faudroit avoir deux nouvelles équations pour parvenir à une ſolution déterminée ; on peut donc demander, lorſqu'une fois ces équations ſont ſatisfaites par des valeurs particulières de Δ', Δ'', Δ''', quelle doit être la relation entre les variations de Δ', Δ'', Δ''', pour que les équations demeurent toujours ſatisfaites. Rien n'eſt plus ſimple que la ſolution de ce Problème : en effet,

ſi l'on différencie les équations (7) & (8) du §. 21, l'on aura

$$(1)\ [\Delta'' \text{cof.} L' \text{fin.} L'' \text{fin.} (B' - \zeta) - \Delta'' \text{fin.} L' \text{cof.} L'' \text{fin.} (B'' - \zeta) + T'' \text{fin.} L' \text{fin.} (A'' - \zeta)]\, d\Delta' - [\Delta' \text{fin.} L' \text{cof.} L'' \text{fin.} (B'' - \zeta) - \Delta' \text{cof.} L' \text{fin.} L'' \text{fin.} (B' - \zeta) + T' \text{fin.} L'' \text{fin.} (A' - \zeta)]\, d\Delta'' = 0;$$

$$(2)\ [\Delta''' \text{cof.} L' \text{fin.} L''' \text{fin.} (B' - \zeta) - \Delta''' \text{fin.} L' \text{cof.} L''' \text{fin.} (B''' - \zeta) + T''' \text{fin.} L' \text{fin.} (A''' - \zeta)]\, d\Delta' - [\Delta' \text{fin.} L' \text{cof.} L''' \text{fin.} (B''' - \zeta) - \Delta' \text{cof.} L' \text{fin.} L''' \text{fin.} (B' - \zeta) + T' \text{fin.} L''' \text{fin.} (A' - \zeta)]\, d\Delta''' = 0.$$

Il n'eſt pas néceſſaire que les équations (7) & (8) du §. 21, ſoient rigoureuſement ſatisfaites par la ſubſtitution des différentes valeurs de Δ', Δ'', Δ''', pour que l'on puiſſe employer des équations de la forme précédente; l'on peut même ſuppoſer quelqu'erreur dans la poſition du nœud. En en mot, ſi l'on nomme

$d\zeta$ l'erreur ſur la poſition du nœud exprimée en ſecondes de degrés,

π' ce que devient l'équation (7) du §. 21, par les ſubſtitutions des valeurs de Δ', Δ'', ζ,

π'' ce que devient l'équation (8) du §. 21, par les ſubſtitutions des valeurs de Δ', Δ''', ζ,

l'on aura

$$(3)\ [\Delta'' \text{cof.} L' \text{fin.} L'' \text{fin.} (B' - \zeta) - \Delta'' \text{fin.} L' \text{cof.} L'' \text{fin.} (B'' - \zeta) + T'' \text{fin.} L' \text{fin.} (A'' - \zeta)]\, d\Delta' - [\Delta' \text{fin.} L' \text{cof.} L'' \text{fin.} (B'' - \zeta) - \Delta' \text{cof.} L' \text{fin.} L'' \text{fin.} (B' - \zeta) + T' \text{fin.} L'' \text{fin.} (A' - \zeta)]\, d\Delta'' + [\Delta'' T' \text{fin.} L'' \text{cof.} (A' - \zeta) - \Delta' T'' \text{fin.} L' \text{cof.} (A'' - \zeta) - \Delta'\Delta'' (\text{cof.} L' \text{fin.} L'' \text{cof.} (B' - \zeta) - \text{fin.} L' \text{cof.} L'' \text{cof.} (B'' - \zeta))]\, \frac{d\zeta}{206265''} - \pi' = 0;$$

$$(4)\ [\Delta''' \text{cof.} L' \text{fin.} L''' \text{fin.} (B' - \zeta) - \Delta''' \text{fin.} L' \text{cof.} L''' \text{fin.} (B''' - \zeta) + T''' \text{fin.} L' \text{fin.} (A''' - \zeta)]\, d\Delta' - [\Delta' \text{fin.} L' \text{cof.} L''' \text{fin.} (B''' - \zeta) - \Delta' \text{cof.} L' \text{fin.} L''' \text{fin.} (B' - \zeta) + T' \text{fin.} L''' \text{fin.} (A' - \zeta)]\, d\Delta''' + [\Delta''' T' \text{fin.} L''' \text{cof.} (A' - \zeta) - \Delta' T''' \text{fin.} L' \text{cof.} (A''' - \zeta) - \Delta'\Delta''' (\text{cof.} L' \text{fin.} L''' \text{cof.} (B' - \zeta) - \text{fin.} L' \text{cof.} L''' \text{cof.} (B''' - \zeta))]\, \frac{d\zeta}{206265''} - \pi'' = 0.$$

De la relation entre les distances de la Comète à la Terre, correspondantes aux Observations prises trois à trois.

(24.) Si l'on combine les équations (9) & (10) du §. 21, l'on aura

$$\left.\begin{array}{l}
[\Delta'' \sin. L'' (\Delta' \cos. L' \sin. B' - T' \sin. A') \\
- \Delta' \sin. L' (\Delta'' \cos. L'' \sin. B'' - T'' \sin. A'')] \\
\times [\Delta''' \sin. L''' (\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A') \\
- \Delta' \sin. L' (\Delta''' \cos. L''' \cos. B''' - T''' \cos. A''')] \\
- [\Delta''' \sin. L''' (\Delta' \cos. L' \sin. B' - T' \sin. A') \\
- \Delta' \sin. L' (\Delta''' \cos. L''' \sin. B''' - T''' \sin. A''')] \\
\times [\Delta'' \sin. L'' (\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A') \\
- \Delta' \sin. L' (\Delta'' \cos. L'' \cos. B'' - T'' \cos. A'')]
\end{array}\right\} = 0.$$

Cette dernière équation peut être mise sous la forme suivante,

$$\left.\begin{array}{l}
\Delta' \sin. L' [(\Delta'' \cos. L'' \sin. B'' - T'' \sin. A'') \times (\Delta''' \cos. L''' \cos. B''' - T''' \cos. A''') \\
- (\Delta''' \cos. L''' \sin. B''' - T''' \sin. A''') \times (\Delta'' \cos. L'' \cos. B'' - T'' \cos. A'')] \\
+ \Delta'' \sin. L'' [(\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A') \times (\Delta''' \cos. L''' \sin. B''' - T''' \sin. A''') \\
- (\Delta' \cos. L' \sin. B' - T' \sin. A') \times (\Delta''' \cos. L''' \cos. B''' - T''' \cos. A''')] \\
+ \Delta''' \sin. L''' [(\Delta' \cos. L' \sin. B' - T' \sin. A') \times (\Delta'' \cos. L'' \cos. B'' - T'' \cos. A'') \\
- (\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A') \times (\Delta'' \cos. L'' \sin. B'' - T'' \sin. A'')]
\end{array}\right\} = 0;$$

ou enfin,

$$\left.\begin{array}{l}
\Delta' \sin. L' [\Delta'' \Delta''' \cos. L'' \cos. L''' \sin. (B'' - B''') - \Delta'' \cos. L'' T''' \sin. (B'' - A''') \\
- \Delta''' \cos. L''' T'' \sin. (A'' - B''') + T'' T''' \sin. (A'' - A''')] \\
+ \Delta'' \sin. L'' [\Delta' \Delta''' \cos. L' \cos. L''' \sin. (B''' - B') - \Delta' \cos. L' T''' \sin. (A''' - B') \\
- \Delta''' \cos. L''' T' \sin. (B''' - A') + T' T''' \sin. (A''' - A')] \\
+ \Delta''' \sin. L''' [\Delta' \Delta'' \cos. L' \cos. L'' \sin. (B' - B'') - \Delta' \cos. L' T'' \sin. (B' - A'') \\
- \Delta'' \cos. L'' T' \sin. (A' - B'') + T' T'' \sin. (A' - A'')]
\end{array}\right\} = 0.$$

Si donc l'on suppose

$$C = \sin. L' \cos. L'' \cos. L''' \sin. (B'' - B''') + \sin. L'' \cos. L' \cos. L''' \sin. (B''' - B') \\ + \sin. L''' \cos. L' \cos. L'' \sin. (B' - B''),$$

$$D' = T''' [\sin. L' \cos. L'' \sin. (B'' - A''') + \sin. L'' \cos. L' \sin. (A''' - B')],$$

$$E' = T'' [\sin. L' \cos. L''' \sin. (A'' - B''') + \sin. L''' \cos. L' \sin. (B' - A'')],$$

$$F = T' [\sin. L'' \cos. L''' \sin. (B''' - A') + \sin. L''' \cos. L'' \sin. (A' - B'')],$$

$$G = T''T''' \text{ fin. } L' \text{ fin. } (A'' - A'''),$$
$$H = T'T''' \text{ fin. } L'' \text{ fin. } (A''' - A'),$$
$$K = T'T'' \text{ fin. } L''' \text{ fin. } (A' - A''),$$

l'on aura

$$(1)\ C\Delta'\Delta''\Delta''' - D'\Delta'\Delta'' - E'\Delta'\Delta''' - F\Delta''\Delta''' + G\Delta' + H\Delta'' + K\Delta''' = 0.$$

Que l'équation qui réſout le Problème des Comètes ſe rabaiſſe au ſecond degré, lorſque l'on connoît d'ailleurs les rapports des diſtances de la Comète à la Terre, correſpondantes à trois obſervations.

(25.) Au moyen de l'équation (1) du *paragraphe précédent,* on voit que dans tous les cas, l'équation qui réſout le Problème des Comètes ſe rabaiſſe au ſecond degré, lorſque l'on a d'ailleurs des équations de la forme ſuivante,

$$\Delta''' = P\Delta',\ \Delta'' = P'\Delta',$$

P, P' étant des quantités connues. En effet, ſi dans l'équation du *paragraphe précédent* l'on ſubſtitue $P\Delta'$ à Δ''', $P'\Delta'$ à Δ'', elle deviendra, à cauſe de la diviſion par Δ',

$$(1)\ PP'C\Delta'^2 - (P'D' + PE' + PP'F)\Delta' + G + P'H + PK = 0.$$

Des uſages de l'Équation (1) du §. 24.

(26.) L'équation du *§. 24* eſt une des plus importantes de cette théorie; & l'on ne doit employer dans le calcul, aucunes diſtances de la Comète à la Terre qui ne ſatisferoient point à cette équation. En effet, une des conditions principales à remplir, eſt que la Comète ſe meuve dans un même plan; or cette condition n'auroit pas lieu, ſi les diſtances employées ne rendoient pas nulle l'équation dont il s'agit. Comme cette équation eſt rigoureuſe, qu'elle s'applique à toutes les diſtances, & qu'elle eſt indépendante de la nature de la trajectoire de la Comète, on doit ſentir l'utilité de la méthode. Suppoſons, en effet, que l'on calcule des obſervations très-éloignées, & que l'on ſoit en doute ſur la nature

de

de la trajectoire; il faut avant tout, constater si les distances que l'on emploie, donnent un plan unique pour le plan de l'orbite.

Un second usage, non moins utile de l'équation précédente, est la facilité de connoître la distance intermédiaire Δ'', lorsque l'on connoît les distances extrêmes Δ', Δ'''. Les Astronomes qui ont calculé des orbites de Comètes, savent combien, en général, il est utile d'avoir exactement cette seconde distance intermédiaire: or il est évident qu'elle se déduit avec la plus grande facilité de l'équation (1) du *§. 24.* En effet, on tire de cette équation,

$$(1)\quad \Delta'' = \frac{E'\Delta'\Delta''' - G\Delta' - K\Delta'''}{C\Delta'\Delta''' - D'\Delta' - F\Delta''' + H}.$$

(27.) Indépendamment des usages précédens, les équations dont nous nous occupons, peuvent résoudre beaucoup d'autres questions importantes. Nous avons vu, par exemple *(§. 25)* que lorsque l'on connoît le rapport des distances de la Comète à la Terre, lors de trois observations, l'on peut déterminer l'une quelconque de ces distances par une équation du second degré; & nous avons donné cette équation. On peut être curieux maintenant de voir combien les erreurs sur les rapports des distances peuvent faire varier les résultats.

Pour y parvenir, je différencie l'équation (1) du *§. 25;* & j'ai, en conservant toutes les définitions des *paragraphes précédens*,

$$\begin{aligned}(1)\quad &(2PP'C\Delta' - P'D' - PE' - PP'F)\,d\Delta'\\ &+ (P'C\Delta'^2 - E'\Delta' - P'F\Delta' + K)\,dP\\ &+ (PC\Delta'^2 - D'\Delta' - PF\Delta' + H)\,dP' = 0.\end{aligned}$$

L'on a donc la relation entre les variations des rapports des distances, & la variation de la distance conclue par l'équation (1) du *§. 25.*

(28.) Il est évident qu'il y a un nombre infini de valeurs de Δ', Δ'', Δ''' qui rendent nulle l'équation (1) du *§. 24*, puisque cette équation renfermant trois variables, il faudroit

avoir deux nouvelles équations, pour parvenir à une ſolution déterminée; lors donc que cette équation eſt ſatisfaite par des valeurs particulières de Δ', Δ'', Δ''', on peut demander, quelle doit être la relation entre les variations de Δ', Δ'', Δ''', pour que l'équation demeure toujours ſatisfaite? Rien n'eſt plus ſimple que la ſolution de ce Problème. En effet, ſi l'on différencie l'équation (1) du §. 24, l'on aura

$$\begin{aligned}(1)\quad &(C\Delta''\Delta''' - E'\Delta''' - D'\Delta'' + G)\,d\Delta' \\ &+ (C\Delta'\Delta''' - F\Delta''' - D'\Delta' + H)\,d\Delta'' \\ &+ (C\Delta'\Delta'' - E'\Delta' - F\Delta'' + K)\,d\Delta''' = 0.\end{aligned}$$

Il n'eſt pas même néceſſaire que l'équation (1) du §. 24, ſoit rigoureuſement ſatisfaite par la ſubſtitution des différentes valeurs de Δ', Δ'', Δ''', pour que l'on puiſſe employer une équation de la forme précédente; & ſi l'on nomme

α ce qui devient l'équation (1) du §. 24 par les ſubſtitutions des valeurs de Δ', Δ'', Δ''',

l'on aura

$$\begin{aligned}(2)\quad &(C\Delta''\Delta''' - E'\Delta''' - D'\Delta'' + G)\,d\Delta' \\ &+ (C\Delta'\Delta''' - F\Delta''' - D'\Delta' + H)\,d\Delta'' \\ &+ (C\Delta'\Delta'' - E'\Delta' - F\Delta'' + K)\,d\Delta''' - \alpha = 0.\end{aligned}$$

Remarque ſur les Équations du §. 21.

(29.) Si, par exemple, dans l'équation (8) du §. 21, l'on ſubſtitue à Δ''', ſa valeur $P\Delta'$, elle deviendra

$$\begin{aligned}(1)\quad &[P\,\text{ſin.}\,L'''(\Delta'\,\text{coſ.}\,L'\,\text{ſin.}\,B' - T'\,\text{ſin.}\,A') \\ &- \text{ſin.}\,L'(P\Delta'\,\text{coſ.}\,L'''\,\text{ſin.}\,B''' - T'''\,\text{ſin.}\,A''')]\,\text{coſ.}\,\zeta \\ &- [P\,\text{ſin.}\,L'''(\Delta'\,\text{coſ.}\,L'\,\text{coſ.}\,B' - T'\,\text{coſ.}\,A') \\ &- \text{ſin.}\,L'(P\Delta'\,\text{coſ.}\,L'''\,\text{coſ.}\,B''' - T'''\,\text{coſ.}\,A''')]\,\text{ſin.}\,\zeta = 0.\end{aligned}$$

On voit donc que ſi l'on connoiſſoit d'avance la poſition du nœud, & le rapport des diſtances de la Comète à la Terre correſpondantes à deux obſervations, l'on connoîtroit la première diſtance par une ſimple équation du premier degré. En général, les relations entre les quantités P, Δ', ζ, qui entrent dans l'équation (1), ſont du premier degré, & par conſéquent faciles à réſoudre.

Si l'on différencie cette dernière équation, & que l'on nomme

ϖ ce qu'elle devient par les ſubſtitutions des valeurs hypothétiques de Δ', ζ, P,

$d\zeta$ l'erreur ſur la poſition du nœud exprimée en ſecondes de degrés,

dP l'erreur du rapport des diſtances Δ', Δ''',

l'on aura

$$(2)\ \{P\Delta' \text{coſ.} L' \text{ſin.} L''' \text{ſin.} (B' - \zeta) - P\Delta' \text{ſin.} L' \text{coſ.} L''' \text{ſin.} (B''' - \zeta) + T''' \text{ſin.} L' \text{ſin.} (A''' - \zeta) - P[\Delta' \text{ſin.} L' \text{coſ.} L''' \text{ſin.} (B''' - \zeta) - \Delta' \text{coſ.} L' \text{ſin.} L''' \text{ſin.} (B' - \zeta) + T' \text{ſin.} L''' \text{ſin.} (A' - \zeta)]\} d\Delta' - [\Delta' \text{ſin.} L' \text{coſ.} L''' \text{ſin.} (B''' - \zeta) - \Delta' \text{coſ.} L' \text{ſin.} L''' \text{ſin.} (B' - \zeta) + T' \text{ſin.} L''' \text{ſin.} (A' - \zeta)]\,\Delta' dP + \{P\Delta' T' \text{ſin.} L''' \text{coſ.} (A' - \zeta) - \Delta' T''' \text{ſin.} L' \text{coſ.} (A''' - \zeta) - P\Delta'^2 [\text{coſ.} L' \text{ſin.} L''' \text{coſ.} (B' - \zeta) - \text{ſin.} L' \text{coſ.} L''' \text{coſ.} (B''' - \zeta)]\} \frac{d\zeta}{206265''} - \varpi = 0.$$

Ces équations trouveront leur application par la ſuite. J'ai cru ne pouvoir trop les multiplier, attendu leur uſage pour faciliter la détermination de la poſition du plan des Comètes.

De la forme la plus générale que l'on peut donner à l'Équation (2) du §. 28.

(30.) On pourroit donner une forme plus générale à l'équation (2) du *ſ. 28*, & faire entrer dans le calcul, les erreurs des obſervations; c'eſt-à-dire, que ſuppoſant ſatisfaite l'équation (1) du *ſ. 24*, on peut demander quelle doit être la relation entre les variations de Δ', Δ'', Δ''', & les erreurs des obſervations pour que l'équation demeure toujours ſatisfaite?

Pour réſoudre cette queſtion, je reprends l'équation (1) du *ſ. 24*, & je la différencie de toutes les manières; il eſt aiſé de voir que l'on parviendra à l'équation ſuivante,

$$(1)\quad (C\Delta'\Delta'' - E'\Delta' - F\Delta'' + K)\,d\Delta'''$$
$$+ (C\Delta''\Delta''' - E'\Delta''' - D'\Delta'' + G)\,d\Delta'$$
$$+ (C\Delta'\Delta''' - F\Delta''' - D'\Delta' + H)\,d\Delta''$$
$$+ \Delta'\Delta''\Delta'''\,dC - \Delta'\Delta''\,dD' - \Delta'\Delta'''\,dE'$$
$$- \Delta''\Delta'''\,dF + \Delta'\,dG + \Delta''\,dH + \Delta'''\,dK - \alpha = 0;$$

mais

$$dC = [\text{cof.}\,L'\,\text{cof.}\,L''\,\text{cof.}\,L'''\,\text{fin.}\,(B'' - B''')$$
$$- \text{fin.}\,L'\,\text{fin.}\,L''\,\text{cof.}\,L'''\,\text{fin.}\,(B''' - B')$$
$$- \text{fin.}\,L'\,\text{cof.}\,L''\,\text{fin.}\,L'''\,\text{fin.}\,(B' - B'')]\,\frac{dL'}{206265''}$$
$$- [\text{fin.}\,L'\,\text{fin.}\,L''\,\text{cof.}\,L'''\,\text{fin.}\,(B'' - B''')$$
$$- \text{cof.}\,L'\,\text{cof.}\,L''\,\text{cof.}\,L'''\,\text{fin.}\,(B''' - B')$$
$$+ \text{cof.}\,L'\,\text{fin.}\,L''\,\text{fin.}\,L'''\,\text{fin.}\,(B' - B'')]\,\frac{dL''}{206265''}$$
$$- [\text{fin.}\,L'\,\text{cof.}\,L''\,\text{fin.}\,L'''\,\text{fin.}\,(B'' - B''')$$
$$+ \text{cof.}\,L'\,\text{fin.}\,L''\,\text{fin.}\,L'''\,\text{fin.}\,(B''' - B')$$
$$- \text{cof.}\,L'\,\text{cof.}\,L''\,\text{cof.}\,L'''\,\text{fin.}\,(B' - B'')]\,\frac{dL'''}{206265''}$$
$$+ [\text{fin.}\,L'\,\text{cof.}\,L''\,\text{cof.}\,L'''\,\text{cof.}\,(B'' - B''')$$
$$- \text{fin.}\,L'''\,\text{cof.}\,L'\,\text{cof.}\,L''\,\text{cof.}\,(B' - B'')]\,\frac{dB''}{206265''}$$
$$+ [\text{fin.}\,L'''\,\text{cof.}\,L'\,\text{cof.}\,L''\,\text{cof.}\,(B' - B'')$$
$$- \text{fin.}\,L''\,\text{cof.}\,L'\,\text{cof.}\,L'''\,\text{cof.}\,(B''' - B')]\,\frac{dB'}{206265''}$$
$$+ [\text{fin.}\,L''\,\text{cof.}\,L'\,\text{cof.}\,L'''\,\text{cof.}\,(B''' - B')$$
$$- \text{fin.}\,L'\,\text{cof.}\,L''\,\text{cof.}\,L'''\,\text{cof.}\,(B'' - B''')]\,\frac{dB'''}{206265''},$$

$$dD' = T'''\,[\text{cof.}\,L'\,\text{cof.}\,L''\,\text{fin.}\,(B'' - A''') - \text{fin.}\,L'\,\text{fin.}\,L''\,\text{fin.}\,(A''' - B')]\,\frac{dL'}{206265''}$$
$$+ T'''\,[\text{cof.}\,L'\,\text{cof.}\,L''\,\text{fin.}\,(A''' - B') - \text{fin.}\,L'\,\text{fin.}\,L''\,\text{fin.}\,(B'' - A''')]\,\frac{dL''}{206265''}$$
$$+ T'''\,\text{fin.}\,L'\,\text{cof.}\,L''\,\text{cof.}\,(B'' - A''')\,\frac{dB''}{206265''}$$
$$- T'''\,\text{fin.}\,L''\,\text{cof.}\,L'\,\text{cof.}\,(A''' - B')\,\frac{dB'}{206265''},$$

$$dE' = T'' \left[\text{cof. } L' \text{ cof. } L''' \text{fin. } (A'' - B''') - \text{fin. } L' \text{ fin. } L''' \text{fin. } (B' - A'')\right] \frac{dL'}{206265''}$$

$$+ T'' \left[\text{cof. } L''' \text{cof. } L' \text{ fin. } (B' - A'') - \text{fin. } L' \text{ fin. } L''' \text{fin. } (A'' - B''')\right] \frac{dL'''}{206265''}$$

$$+ T'' \left[\text{fin. } L''' \text{ cof. } L' \text{ cof. } (B' - A'')\right] \frac{dB'}{206265''}$$

$$- T'' \text{ fin. } L' \text{ cof. } L''' \text{cof. } (A'' - B''') \frac{dB'''}{206265''},$$

$$dF = T' \left[\text{cof. } L'' \text{cof. } L''' \text{fin. } (B''' - A') - \text{fin. } L'' \text{fin. } L''' \text{fin. } (A' - B'')\right] \frac{dL''}{206265''}$$

$$+ T' \left[\text{cof. } L'' \text{ cof. } L''' \text{fin. } (A' - B'') - \text{fin. } L'' \text{fin. } L''' \text{fin. } (B''' - A')\right] \frac{dL'''}{206265''}$$

$$+ T' \left[\text{fin. } L'' \text{ cof. } L''' \text{ cof. } (B''' - A')\right] \frac{dB'''}{206265''}$$

$$- T' \text{ cof. } L'' \text{ fin. } L''' \text{ cof. } (A' - B'') \frac{dB''}{206265''},$$

$$dG = T'' T''' \text{ cof. } L' \text{ fin. } (A'' - A''') \frac{dL'}{206265''},$$

$$dH = T' \; T''' \text{ cof. } L'' \text{ fin. } (A''' - A') \frac{dL''}{206265''},$$

$$dK = T' \; T'' \text{ cof. } L''' \text{ fin. } (A' - A'') \frac{dL'''}{206265''}.$$

Au moyen de ces équations, l'on pourra apprécier l'influence des obſervations ſur les réſultats. Il eſt ſuperflu d'avertir que dL', dL'', dL''', dB', dB'', dB''', ſont les erreurs des obſervations évaluées en ſecondes de degré.

Qu'il exiſte entre les diſtances ſucceſſives de la Comète à la Terre, des équations de la forme de celles dont il a été queſtion dans le §. 25.

(31.) Si l'on conſidère trois obſervations ſucceſſives, je vais faire voir qu'il exiſte entre les diſtances correſpondantes de la Comète à la Terre, des équations de la forme ſuivante,

$$\Delta'' = P' \Delta', \qquad \Delta''' = P \Delta',$$

P & P' étant des quantités connues. Il n'eſt pas même indiſpenſable que les obſervations aient été faites dans des

intervalles très-prochains, pourvu toutefois que l'on puisse lier les observations éloignées par des observations prochaines. Je ne m'astreindrai donc pas pour résoudre le Problème des Comètes, à ne considérer rigoureusement que trois observations; j'en emploîrai réellement quatre ou même un plus grand nombre; je combinerai les observations successives trois à trois; j'en conclurai les distances correspondantes de la Comète à la Terre; en un mot, je ferai résulter de ces premières observations un système de deux observations, & je les comparerai à une observation éloignée pour rectifier les élémens.

Dans le calcul des élémens de l'orbite, j'emploîrai toujours la première & la dernière observation faite dans des intervalles proches, lorsqu'il s'agira de la comparer à l'observation éloignée dont il vient d'être question; j'appellerai

Δ', R', T', A', B', L', les quantités qui appartiennent à la première observation;

Δ''', R''', T''', A''', B''', L''', les quantités qui appartiennent à la dernière des observations faites dans des intervalles proches.

Je nommerai

Δ'', R'', T'', A'', B'', L'', les quantités analogues de l'observation qu'il est nécessaire d'introduire pour déterminer les rapports de Δ' à Δ'', de Δ' à Δ'''.

Je nommerai enfin

Δ'''', R'''', T'''', A'''', B'''', L'''', les quantités qui appartiennent à la quatrième observation éloignée;

t le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observation Δ' & Δ'';

t' le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observation Δ'' & Δ''';

ϑ le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observation Δ' & Δ'''.

Dans ces dernières définitions, j'ai désigné chacune des observations par la valeur de Δ correspondante; ainsi, par exemple, j'ai nommé observation Δ', la première observation; observation Δ'', la seconde observation; & ainsi de suite. J'emploîrai toujours cette désignation.

(32.) Soit

$$\mu' = \text{ſin. } L''' \text{ coſ. } L'' \text{ ſin. } (B'' - A'') - \text{ſin. } L'' \text{ coſ. } L''' \text{ ſin. } (B''' - A'');$$
$$\mu'' = \text{ſin. } L''' \text{ coſ. } L' \text{ ſin. } (B' - A'') - \text{ſin. } L' \text{ coſ. } L''' \text{ ſin. } (B''' - A'');$$
$$\mu''' = \text{ſin. } L'' \text{ coſ. } L' \text{ ſin. } (B' - A'') - \text{ſin. } L' \text{ coſ. } L'' \text{ ſin. } (B'' - A'');$$

on conclura facilement de la ſavante analyſe de M. de la Grange, les équations ſuivantes,

$$(1)\ t'\mu''\Delta' - \vartheta\mu'\Delta'' = 0,$$
$$(2)\ t'\mu'''\Delta' - t\,\mu'\Delta''' = 0,$$
$$(3)\ t\,\mu''\Delta''' - \vartheta\mu'''\Delta'' = 0.$$

Si donc l'on ſuppoſe

$$(4)\ P = \frac{t'\mu'''}{t\,\mu'},$$
$$(5)\ P' = \frac{t'\mu''}{\vartheta\mu'},$$

l'on aura

$$(6)\ \Delta'' = P'\Delta';$$
$$(7)\ \Delta''' = P\Delta'.$$

J'aurois pu renvoyer pour la démonſtration de ces propoſitions, à l'Ouvrage même de M. de la Grange; mais comme l'énoncé ne ſe trouve pas précisément dans l'Ouvrage dont il s'agit, qui d'ailleurs pourroit n'être pas entre les mains du Lecteur, j'ai cru que l'on verroit avec plaiſir un abrégé de ſon analyſe; j'ai penſé auſſi, que pour ne pas interrompre la ſuite des propoſitions relatives à la détermination des orbites des Comètes, il convenoit de renvoyer cette diſcuſſion à la fin du Mémoire.

On peut donc, quant à préſent, regarder les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) comme autant de Lemmes dont on aura la démonſtration.

(33.) Quoique les déterminations précédentes ſoient fondées ſur des conſidérations qui ſuppoſent des obſervations peu éloignées entr'elles, il eſt cependant poſſible d'employer ſans danger des obſervations notablement diſtantes, pourvu

toutefois que l'on ait des obſervations intermédiaires qui lient enſemble ces obſervations éloignées. Je ſerois même tenté de croire que cette manière d'enviſager le Problème eſt préférable dans la pratique, attendu que la méthode acquiert par-là le plus grand degré d'exactitude qu'elle puiſſe avoir, & que d'ailleurs les erreurs des obſervations ſe compenſent.

Pour me faire entendre, je ſuppoſe que l'obſervation Δ''' ſoit notablement éloignée de l'obſervation Δ'; & qu'il en eſt de même de l'obſervation Δ''; j'imagine d'ailleurs que l'on a des obſervations intermédiaires. Je remarque qu'en général ſi des quantités Δ', ε, ε', ε'', ε''', &c. ſont telles que l'on ait $\Delta' : \varepsilon :: m : n$; $\varepsilon : \varepsilon' :: m' : n'$; $\varepsilon' : \varepsilon'' :: m'' : n''$; $\varepsilon'' : \varepsilon''' :: m''' : n'''$, & ainſi de ſuite; l'on aura $\Delta' n = \varepsilon m$; $\Delta' n n' = \varepsilon' m m'$; $\Delta' n n' n'' = \varepsilon'' m m' m''$, & ainſi de ſuite. Soient donc

Δ', ε, ε', ε'', ε''', &c. Δ''' les obſervations que je déſigne par les diſtances Δ', ε, ε', ε'', ε''' &c. Δ''' de la Comète à la Terre, lors de ces obſervations;

ε, ε', ε'', ε''', &c. les diſtances correſpondantes aux obſervations intermédiaires entre l'obſerv. Δ' & l'obſerv. Δ'''.

Par les équations du *paragraphe précédent,* je détermine les rapports entre les diſtances Δ', ε; ε', ε'', &c. Δ''; ε''', ε'''', &c. Δ''', & j'ai, en nommant $\frac{n}{m}$, $\frac{n'}{m'}$, $\frac{n''}{m''}$, &c. ces rapports ſucceſſifs,

$$(1)\ \Delta''' = \frac{n\,n'\,n''\,n''', \&c.}{m\,m'\,m''\,m''', \&c.}\,\Delta', \qquad (2)\ \Delta'' = \frac{n\,n'\,n'', \&c.}{m\,m'\,m'', \&c.}\,\Delta'.$$

On voit par-là que quoique les obſervations Δ', Δ'', Δ''' ſoient éloignées entr'elles, le véritable eſprit de la méthode eſt conſervé ſans augmenter infiniment le calcul.

En général, ſoit que l'on ſe contente d'évaluer les quantités P, P' au moyen des équations (4) & (5) du *§. 32,* ce qui peut être inexact, ſoit que l'on ſuppoſe

$$(3)\ P' = \frac{n\,n'\,n''}{m\,m'\,m''}, \&c. \qquad (4)\ P = \frac{n\,n'\,n''\,n'''\,n''''}{m\,m'\,m''\,m'''\,m''''}, \&c.$$

je

je ſuppoſerai toujours que l'on a

$$(5)\ \Delta'' = P'\Delta', \qquad (6)\ \Delta''' = P\Delta'.$$

Détermination des valeurs de Δ', Δ'', Δ'''.

Première Méthode pour avoir ces valeurs.

(34.) Le but que nous nous ſommes propoſés dans les dernières recherches, a été de connoître les valeurs de Δ', Δ'', Δ'''; & ſi nous avons donné les rapports entre ces quantités, nous n'avons regardé ces déterminations que comme un acheminement à la connoiſſance de ces valeurs ; il faut donc nous occuper plus particulièrement de ce dernier objet. Nous remarquerons ici, qu'il ſuffira de connoître la valeur de Δ', puiſque quand cette valeur ſera connue, on concluera facilement les valeurs de Δ'' & Δ''', au moyen des équations (5) & (6) du *ſ. 33*.

(35.) J'emprunterai la première valeur de Δ' de l'équation (1) du *ſ. 25*. Comme l'équation dont elle ſe déduit eſt rigoureuſe, quels que ſoient les intervalles entre les obſervations, elle peut s'appliquer à des obſervations éloignées entr'elles, pourvu toutefois, que l'on évalue les quantités P, P', au moyen des équations du *ſ. 33* ; & dans tous les cas, les réſultats préſentent le même degré d'exactitude que les évaluations des quantités P, P'. Si donc l'on conſerve les définitions du *ſ. 24*, l'on aura l'équation ſuivante,

$$(1)\ PP'C\Delta'^2 - (P'D' + PE' + PP'F)\Delta' + G + P'H + PK = 0.$$

Cette équation n'eſt que du ſecond degré, & par-là, elle a l'avantage de pouvoir être réſolue par les méthodes ordinaires; mais en même temps elle préſente une difficulté qu'il s'agit d'éclaircir. Voici comment on peut préſenter la queſtion.

Les deux racines de l'équation ſatisfont-elles au Problème des Comètes !

Pour réſoudre cette difficulté, on ſe rappellera que pour

déterminer l'orbite des Comètes, il faut ſatisfaire à deux conditions ; la première, que la trajectoire ſoit dans un même plan ; la ſeconde, que la corde compriſe entre les deux rayons vecteurs extrêmes ſoutende un arc qui puiſſe être décrit en vertu des forces centrales qui animent la Comète. L'équation (1) eſt abſolument indépendante de la nature des forces centrales, puiſque l'équation (1) du *§. 24* ne dépend nullement de ces forces, & que les valeurs de *P*, *P'*, en ſont également indépendantes. Lors donc que l'on a ſatisfait à cette équation, l'on n'a encore rempli qu'une des conditions, celle que la trajectoire ſoit dans un même plan, & cette condition admet deux ſolutions. Mais ſi l'on veut que la corde compriſe entre les deux rayons vecteurs extrêmes, ſoutende un arc qui puiſſe être décrit en vertu des forces centrales; il faut que cette corde puiſſe avoir pour expreſſion celle que je vais développer dans les paragraphes ſuivans. Ce ne ſont donc que les valeurs communes entre l'équation (1) du *préſent paragraphe*, & une nouvelle équation que je vais déterminer, qui réſolvent véritablement le Problème, puiſque ces valeurs ſont les ſeules qui réuniſſent toutes les conditions néceſſaires. Cette propoſition demande cependant quelqu'explication, ainſi que nous le ferons voir dans le *§. 42*.

Seconde Méthode.

(36.) Voici une ſeconde approximation de Δ', tirée des propriétés de la parabole, & qui eſt analogue à la *Méthode des Principes mathématiques*. Cette méthode eſt le complément de la précédente; & elle me paroît préférable dans la pratique, en ce qu'elle permet d'employer des obſervations plus éloignées entr'elles, pourvu toutefois, que l'on ait l'attention d'évaluer les quantités *P'*, *P*, au moyen des équations (3) & (4) du *§. 33*.

Il ſuit du *§. 15*, que ſi l'on nomme

c la corde interceptée entre les rayons vecteurs *R'*, *R'''*,

on a

$$(1)\ \Delta'^2 + \Delta'''^2 - 2\,\Delta'\Delta''' [\text{cos}.\,L'\,\text{cos}.\,L'''\,\text{cos}.\,(B''' - B') + \text{sin}.\,L'\,\text{sin}.\,L''']$$
$$- 2\,\Delta'\ \text{cos}.\,L'\ [T'\ \text{cos}.\,(B' - A') - T'''\,\text{cos}.\,(B' - A''')]$$
$$- 2\,\Delta'''\ \text{cos}.\,L'''\ [T'''\ \text{cos}.\,(B''' - A''') - T'\ \text{cos}.\,(B''' - A')]$$
$$+ T'^2 + T'''^2 - 2\,T'\,T'''\,\text{cos}.\,(A''' - A') - c^2 = 0.$$

Mais $\Delta''' = P\,\Delta'$; donc, si l'on suppose

$$F = 1 + P^2 - 2\,P[\text{cos}.\,L'\,\text{cos}.\,L'''\,\text{cos}.\,(B''' - B') + \text{sin}.\,L'\,\text{sin}.\,L''],$$
$$G = \text{cos}.\,L'\ [T'\ \text{cos}.\ (B' - A') - T'''\,\text{cos}.\ (B' - A''')]$$
$$+ P\,\text{cos}.\,L'''\ [T'''\,\text{cos}.\,(B''' - A''') - T'\,\text{cos}.\,(B''' - A')],$$
$$H = T'^2 - 2\,T'\,T'''\,\text{cos}.\,(A''' - A') + T'''^2,$$

l'on aura

$$(2)\ \Delta'\left(\Delta' - \frac{2}{F}G\right) + \frac{1}{F}\,(H - c^2) = 0.$$

Maintenant, si l'on suppose

$$R' = \sqrt{[\Delta'\,[\Delta' - 2\,T'\ \text{cos}.\ L'\,\text{cos}.\,(B' - A')] + T'^2]},$$
$$R''' = \sqrt{[\Delta'[P^2\,\Delta' - 2\,P\,T'''\ \text{cos}.\ L'''\,\text{cos}.\,(B''' - A''')] + T'''^2]},$$

ϑ = le nombre de minutes de temps écoulées entre les observations,

r la moyenne distance du Soleil à la Terre,

s l'espace que la Terre décrit dans son orbite, pendant une minute de temps, lorsqu'elle est à sa moyenne distance du Soleil,

& que l'on détermine convenablement une quantité Ω, que j'introduis dans le calcul, pour l'éliminer ensuite, l'on aura

$$(3)\ c^2 = \frac{4\,\vartheta^2\,s^2\,r}{R' + R'''}\ (1 + \Omega);$$

donc

$$(4)\ \Delta'\left(\Delta' - \frac{2}{F}G\right) + \frac{1}{F}\left[H - \frac{4\,\vartheta^2 s^2 r}{R' + R'''}(1 + \Omega)\right] = 0.$$

Il ne s'agit plus que d'évaluer convenablement la quantité Ω.

(37.) Si l'on nomme

c la corde de la parabole,

R', R''' les rayons vecteurs extrêmes,

ρ le rayon vecteur correspondant au sommet du diamètre qui coupe la corde en deux parties égales,

x la flèche comprise sur le rayon vecteur ρ, entre la corde & le sommet du diamètre,

l'on a, d'après Newton,

$$(1)\ x = \frac{c^2}{16\rho}; \qquad (2)\ \rho = \tfrac{1}{2}(R' + R''') - x;$$

$$(3)\ c = \frac{\vartheta s \sqrt{2}\sqrt{r}}{\sqrt{\left(\frac{R' + R'''}{2} - \frac{1}{3}x\right)}}.$$

Des équations (1) & (2), l'on tire

$$x = \frac{R' + R''' - \sqrt{[(R' + R''')^2 - c^2]}}{4};$$

& si l'on porte cette valeur de x dans l'équation (3), l'on aura

$$c^2 = \frac{24\,\vartheta^2 s^2 r}{5(R' + R''') + \sqrt{[(R' + R''')^2 - c^2]}};$$

donc en réduisant en série, l'on aura

$$(4)\ c^2 = \frac{4\,\vartheta^2 s^2 r}{R' + R'''}\left(1 + \frac{1}{3}\,\frac{\vartheta^2 s^2 r}{(R' + R''')^3}\right);$$

& cette approximation est très-grande, même pour une corde assez considérable.

Si l'on suppose que les intervalles entre les observations, sont assez petits pour que dans les équations (2) & (3) du *présent paragraphe*, l'on puisse négliger la quantité x, vis-à-vis de la quantité $\frac{R' + R'''}{2}$, l'on aura $c^2 = \frac{2\,\vartheta^2 s^2 r}{\rho}$; mais

$$\rho = \sqrt{\{\Delta'[P'^2\Delta' - 2P'T''\,\text{cos.}\,L''\,\text{cos.}\,(B'' - A'')] + T''^2\}}$$

l'équation (4) du *§. 36* deviendra donc

$$(5)\ \Delta'\left(\Delta' - \frac{2}{F}G\right) + \frac{1}{F}\left\{H - \frac{2\,\vartheta^2 s^2 r}{\sqrt{[\Delta'[P'^2\Delta' - 2P'T''\,\text{cos.}\,L''\,\text{cos.}\,(B'' - A'')] + T''^2]}}\right\} = 0.$$

Nous remarquerons seulement que dans ce cas, la formule perd l'avantage de pouvoir être appliquée à des observations éloignées entr'elles.

Nous remarquerons enfin, que comme la révolution fidérale de la Terre eſt de $365^j\,6^h\,9'\,11''$, on a

$$\text{Log. } s = 5{,}0772198; \qquad \text{Log. } s^2 r = 20{,}1544396.$$

(38.) Si dans l'équation (1) du *ſ. 36*, l'on ſubſtitue à c^2 ſa valeur tirée de l'équation (4) du *ſ. 37*, elle deviendra

$$(1)\ \Delta'^2 + \Delta'''^2 - 2\Delta'\Delta'''[\text{coſ.} L' \text{coſ.} L''' \text{coſ.} (B''' - B') + \text{ſin.} L' \text{ſin.} L''']$$
$$- 2\Delta' \text{coſ.} L' \,[T' \text{coſ.} (B' - A') - T''' \text{coſ.} (B' - A''')]$$
$$- 2\Delta''' \text{coſ.} L''' \,[T''' \text{coſ.} (B''' - A''') - T' \text{coſ.} (B''' - A')]$$
$$+ T'^2 + T'''^2 - 2T'T''' \text{coſ.} (A''' - A')$$
$$- \frac{4\vartheta^2 s^2 r}{R' + R'''} \left[1 + \frac{1}{3}\frac{\vartheta^2 s^2 r}{(R' + R''')^3}\right] = 0.$$

Si l'on différencie cette équation, & que l'on ſuppoſe

$$f = \text{coſ.} L' \text{coſ.} L''' \text{coſ.} (B''' - B') + \text{ſin.} L' \text{ſin.} L''',$$
$$g = \text{coſ.} L' \,[T' \text{coſ.} (B' - A') - T''' \text{coſ.}(B' - A''')],$$
$$g' = \text{coſ.} L''' \,[T''' \text{coſ.} (B''' - A''') - T' \text{coſ.} (B''' - A')],$$
$$h = \frac{2\vartheta^2 s^2 r}{(R' + R''')^2}\left[1 + \frac{4}{3}\frac{\vartheta^2 s^2 r}{(R' + R''')^3}\right],$$

l'on aura

$$(2)\ (\Delta' - f\Delta''' - g)\,d\Delta' + (\Delta''' - f\Delta' - g')\,d\Delta''' + h\,dR' + h\,dR''' = 0.$$

Il n'eſt pas même néceſſaire que l'équation (1) ſoit rigoureuſement ſatisfaite par la ſubſtitution des différentes valeurs de Δ', Δ''', R', R''', &c, pour que l'on puiſſe employer une équation de la forme précédente; & ſi l'on nomme

γ' ce que devient l'équation (1) par les ſubſtitutions des valeurs particulières de R', R''', Δ', Δ''', &c,

l'on aura

$$(3)\ (\Delta' - f\Delta''' - g)\,d\Delta' + (\Delta''' - f\Delta' - g')\,d\Delta''' + h\,dR' + h\,dR''' - \gamma' = 0.$$

Détermination des rayons vecteurs R′, R″, R‴, R⁗, *&c. correſpondans aux diſtances* Δ', Δ'', Δ''', Δ'''', *&c. de la Comète à la Terre.*

(39.) Lorſque l'on connoît les diſtances Δ', Δ'', Δ''', &c.

de la Comète à la Terre, il eſt facile de déterminer les rayons vecteurs correſpondans.

Soient

R' le rayon vecteur de la Comète correſpondant à la diſtance Δ';
R'' le rayon vecteur de la Comète correſpondant à la diſtance Δ'';
R''' le rayon vecteur de la Comète correſpondant à la diſtance Δ''';
R'''' le rayon vecteur de la Comète correſpondant à la diſtance Δ'''';

& conſervons les définitions précédentes de T', T'', T''', T'''', &c. l'on a

$$(1)\quad R' = \sqrt{[T'^2 + \Delta'^2 - 2\Delta' T' \text{ cof. } L' \text{ cof. } (B' - A')]};$$
$$(2)\quad R'' = \sqrt{[T''^2 + \Delta''^2 - 2\Delta'' T'' \text{ cof. } L'' \text{ cof. } (B'' - A'')]};$$
$$(3)\quad R''' = \sqrt{[T'''^2 + \Delta'''^2 - 2\Delta''' T''' \text{ cof. } L''' \text{ cof. } (B''' - A''')]};$$
$$(4)\quad R'''' = \sqrt{[T''''^2 + \Delta''''^2 - 2\Delta'''' T'''' \text{ cof. } L'''' \text{ cof. } (B'''' - A'''')]}.$$

Maintenant ſi l'on différencie ces équations, & que l'on ſuppoſe

$$m' = \Delta' - T' \text{ cof. } L' \text{ cof. } (B' - A'),$$
$$m'' = \Delta'' - T'' \text{ cof. } L'' \text{ cof. } (B'' - A''),$$
$$m''' = \Delta''' - T''' \text{ cof. } L''' \text{ cof. } (B''' - A'''),$$
$$m'''' = \Delta'''' - T'''' \text{ cof. } L'''' \text{ cof. } (B'''' - A''''),$$

l'on aura

$$(5)\quad R'\, dR' - m'\, d\Delta' = 0;$$
$$(6)\quad R''\, dR'' - m''\, d\Delta'' = 0;$$
$$(7)\quad R'''\, dR''' - m'''\, d\Delta''' = 0;$$
$$(8)\quad R''''\, dR'''' - m''''\, d\Delta'''' = 0.$$

Méthode pour faciliter la réſolution de l'équation (4) du paragraphe 36.

(40.) L'équation (4) du *§. 36* préſente quelques difficultés dans la pratique. En effet, quoique ſous la forme du ſecond degré, elle eſt néanmoins d'un degré plus élevé; ce

qui peut faire naître quelques embarras dans l'ufage de cette équation. Il eſt donc à propos d'avoir une méthode qui faſſe trouver tout de ſuite la véritable valeur de Δ', lorſque cette valeur ſera à peu-près connue.

Pour y parvenir, je reprends l'équation (3) du *§. 38;* je ſubſtitue à Δ''' & à $d\Delta'''$ leurs valeurs $P\Delta'$, $Pd\Delta'$; je ſubſtitue pareillement à dR' & à dR''', leurs valeurs $\frac{m' d\Delta'}{R'}$, $\frac{m''' P d\Delta'}{R'''}$; bien entendu que l'on ſuppoſera, comme dans le *§. 36,*

$$R' = \surd[\Delta'[\Delta' - 2T' \text{ coſ. } L' \text{ coſ. } (B' - A')] + T'^2],$$
$$R''' = \surd[\Delta'[P^2\Delta' - 2PT''' \text{ coſ. } L''' \text{ coſ. } (B''' - A''')] + T'''^2],$$

& que dans ces dernières expreſſions, l'on prendra pour Δ' ſa valeur approchée, déjà connue par la ſuppoſition. Au moyen de ces ſubſtitutions, l'équation (3) du *§. 38* deviendra

$$(1)\ [(1 + P^2 - 2fP)\Delta' - g - Pg' + h(\frac{m'}{R'} + \frac{m'''P}{R'''})]d\Delta' - \gamma' = 0;$$

d'où l'on conclura tout de ſuite la valeur de $d\Delta'$, & par conſéquent la véritable valeur de Δ'.

On pourroit même donner à cette dernière équation une forme plus générale, en faiſant varier le rapport P; l'on auroit alors $d\Delta''' = Pd\Delta' + \Delta'dP$, $dR''' = \frac{m'''}{R'''}(Pd\Delta' + \Delta'dP)$; & l'équation (1) deviendroit

$$(2)\ [(1 + P^2 - 2fP)\Delta' - g - Pg' + h(\frac{m'}{R'} + \frac{m'''}{R'''}P)]d\Delta'$$
$$+ [(P - f + \frac{hm'''}{R'''})\Delta' - g']\Delta'dP - \gamma' = 0.$$

De l'angle compris ſur le plan de la trajectoire, entre les rayons vecteurs extrêmes R', R'''.

(41.) Si l'on nomme

N' l'angle compris entre les rayons vecteurs extrêmes R', R''',

on aura (*§. 17*);

$$(1)\ 4\,R'R'''\ \text{fin.}^2\tfrac{1}{2}N + (R''' - R')^2 - c^2 = 0;$$

bien entendu que ſi les intervalles entre les obſervations ne ſont pas fort grands, on pourra ſuppoſer ſans erreur ſenſible,

$$(2)\ c^2 = \frac{4\vartheta^2 s^2 r^2}{R' + R'''}\left(1 + \tfrac{1}{3}\,\frac{\vartheta^2 s^2 r}{(R' + R''')^3}\right).$$

Cette dernière équation eſt fondée ſur une approximation de la corde, & par conſéquent la valeur de $\text{fin.}^2\tfrac{1}{2}N$ n'eſt elle-même qu'approchée. Voici une expreſſion rigoureuſe du même angle N, & qui eſt indépendante de la nature de la trajectoire,

$$\begin{aligned}(3)\ \ & 2\,R'R'''\ \text{finus}^2\tfrac{1}{2}N - R'R''' + T'T'''\ \text{cofinus}\,(A''' - A') \\ & - T'\Delta'''\ \text{cof.}\,L'''\ \text{cof.}\,(B''' - A') - T'''\Delta'\ \text{cof.}\,L'\ \text{cof.}\,(B' - A''') \\ & + \Delta'\Delta'''\,[\text{cof.}\,L'\ \text{cof.}\,L'''\ \text{cof.}\,(B''' - B') + \text{fin.}\,L'\ \text{fin.}\,L'''] = 0.\end{aligned}$$

(42.) Il ſuit de ce qui vient d'être démontré dans les *paragraphes précédens*, qu'il eſt poſſible que les équations (1) du *§. 35*, & (4) du *§. 36*, n'ayent pas, rigoureuſement parlant, des valeurs communes. En effet, l'équation (4) du *§. 36* eſt fondée ſur des propriétés de la parabole; elle ſuppoſe donc que l'arc décrit par la Comète, s'identifie ſenſiblement avec un arc de parabole; l'équation (1) du *§. 35*, au contraire, eſt abſolument indépendante de la trajectoire. De plus, cette dernière équation dépend beaucoup plus de l'exactitude des valeurs de P, P', que l'équation du *§. 36*: enfin les erreurs des latitudes de la Lune influent d'une manière bien plus ſenſible ſur l'équation (1) du *§. 35*, que ſur l'équation (4) du *§. 36*. Ces raiſons réunies doivent donc modifier la propoſition qui termine le *§. 35*, & tendent toutes à faire préférer l'équation (4) du *§. 36*.

Des Équations dépendantes de la nature de la trajectoire parabolique des Comètes; & des Queſtions qui en ſont les Corollaires.

(43.) Dans les paragraphes précédens, nous avons diſtingué les équations indépendantes de la nature de la

trajectoire

trajectoire des Comètes, d'avec celles qui ſont dépendantes de cette trajectoire, & nous nous ſommes occupés particulièrement des queſtions qui ſuppoſent uniquement que le mouvement des Comètes ſe fait dans un même plan; nous devons maintenant réſoudre celles dans leſquelles on doit faire entrer la conſidération particulière de la trajectoire.

Dans cette partie du Mémoire, nous donnerons des méthodes pour réſoudre quelques queſtions que nous avons déjà réſolues par d'autres méthodes; nous n'avons pas cru cependant devoir négliger ces ſolutions, & nous avons penſé que l'on verroit avec plaiſir les différentes manières d'enviſager les mêmes Problèmes.

De l'anomalie de la Comète à l'inſtant des obſervations; de la diſtance périhélie; & de l'inſtant du paſſage par le périhélie.

(44.) Si l'on nomme

R' le rayon vecteur de la Comète,

D la diſtance périhélie,

v' l'angle traverſé depuis le périhélie juſqu'à l'inſtant de la première obſervation,

R''' le rayon vecteur de la Comète à l'inſtant de la troiſième obſervation,

v''' l'angle traverſé depuis le périhélie juſqu'à l'inſtant de la troiſième obſervation,

N l'angle compris entre les deux rayons R', R''';

il eſt évident que l'on a (§. 4)

(1) $R'(1 + \text{coſ.}\, v') - 2D = 0$,

(2) $R'''(1 + \text{coſ.}\, v''') - 2D = 0$,

(3) $v''' = v' + N$.

Si l'on compare les équations (1) & (2), l'on aura

$$R'(1 + \text{coſ.}\, v') - R'''(1 + \text{coſ.}\, v''') = 0,$$

ou, à cauſe de $v''' = v' + N$,

$$R'(1 + \text{coſ.}\, v') - R'''[1 + \text{coſ.}(v' + N)] = 0;$$

ou, enfin

$$R' - R''' + R''' \text{ſin.} N \text{ſin.} v' + (R' - R''' \text{coſ.} N) \text{coſ.} v' = 0.$$

Soit maintenant

M un angle tel que l'on ait (4) $\text{tang.} M = \frac{R' - R''' \text{coſ.} N}{R''' \text{ſin.} N}$;

l'équation précédente deviendra

$$(5) \text{ ſin.} (v' + M) = \frac{(R''' - R') \text{coſ.} M}{R''' \text{ſin.} N}.$$

Cette équation fera connoître l'anomalie de la Comète à l'inſtant de la première obſervation.

L'eſpèce de l'angle M n'eſt point arbitraire, & cet angle eſt déterminé ſpécifiquement par l'équation (4) du *préſent paragraphe;* il doit être employé tel qu'il eſt donné par l'analyſe. Il faut relire, au ſurplus, ce que nous avons dit à ce ſujet dans le *§. 22.*

La détermination de la diſtance périhélie ne préſente plus maintenant aucune difficulté; en effet, puiſque l'on connoît le rayon vecteur de la Comète & ſon anomalie, à l'inſtant de la première obſervation, l'on conclura tout de ſuite la diſtance périhélie, au moyen de l'équation (1)

On déterminera pareillement l'inſtant du paſſage de la Comète par le périhélie, au moyen de l'équation ſuivante,

(6) Nombre de minutes de temps écoulées entre l'inſtant du paſſage de la Comète par le périhélie & la première obſervation

$$= \tfrac{1}{4} (R' + 2 D) \sqrt{(R' - D)} \frac{157846'^{\frac{1}{3}}}{r^{\frac{3}{2}}};$$

Quoique cette dernière équation ne donne par elle-même aucune lumière ſur la queſtion de ſavoir ſi, à l'inſtant de la première obſervation, la Comète tend à ſon périhélie, ou ſi elle s'en éloigne, puiſque la forme de l'équation eſt abſolument la même dans les deux cas, il eſt cependant évident que l'on ne peut point être embarraſſé ſur la ſolution de cette difficulté. En effet, puiſque l'on connoît l'anomalie de

la Comète lors de la première obſervation, on ſait ſi la Comète s'éloignoit du périhélie, ou ſi elle s'en approchoit lors de la première obſervation.

(45.) Dans l'équation (5) du ſ. 44, l'expreſſion de ſin. $(v' + M)$ appartient également à deux angles. Géométriquement parlant, il n'y a aucune raiſon pour exclure l'un plutôt que l'autre ; toutes les deux anomalies commencent deux arcs terminés par des rayons vecteurs de même longueur, & éloignés entr'eux d'un même angle N pris dans le même ſens. Ces deux ſuppoſitions donnent à la vérité des diſtances périhélies différentes, & par conſéquent des paraboles également différentes. Mais quoique les deux paraboles ſatisfaſſent géométriquement aux deux conditions d'où l'on a déduit l'anomalie, il n'eſt pourtant pas exact de dire qu'elles ſatisfont aſtronomiquement au Problème ; en effet, des deux anomalies données par l'équation du ſecond degré, l'une eſt toujours telle que l'angle v' étant moindre que 180 degrés, l'angle $v' + N$ eſt plus grand que 180 degrés; il faudroit donc pour que cette ſolution eût lieu, que la Comète pût paſſer d'une branche de la parabole à l'autre branche, par l'aphélie; ce qui eſt impoſſible.

Examen de la légitimité de la première ſuppoſition ſur la valeur de Δ' employée dans le Calcul.

(46.) Pour prononcer ſur la légitimité de la valeur de Δ' employée dans les calculs, il faut avoir une méthode qui puiſſe faire juger ſi la parabole que l'on vient de déterminer, a pu être décrite dans l'intervalle des obſervations. Rien n'eſt plus ſimple que cette méthode : voici en quoi elle conſiſte.

Soit

ϑ le nombre de minutes de temps écoulées entre la première & la dernière obſervation.

Nous avons vu que l'on a

$$(1)\quad \vartheta = [(R''' + 2D)\sqrt{(R''' - D)} \mp (R' + 2D)\sqrt{(R' - D)}]\,\frac{157846'\frac{1}{3}}{4r^{\frac{3}{2}}};$$

on verra donc si, substituant dans cette équation les valeurs de R''', R', D trouvées précédemment, l'équation est satisfaite. Dans le premier cas, le Problème est complètement résolu; la double condition que la trajectoire de la Comète soit dans un même plan, & que ce soit une parabole, est remplie, & il n'y a plus rien à chercher; dans le second cas, les deux conditions ne sont pas encore satisfaites, & il faut chercher à les remplir.

Nous avons vu §. 9 ce que signifient les deux suites de signes de l'équation (1); je ne répéterai point ce que j'ai dit à ce sujet.

Détermination de la longitude héliocentrique de la Comète, & du sens de son mouvement.

(47.) Nous connoissons à peu-près les véritables distances de la Comète à la Terre, lors des observations calculées; nous devons maintenant donner une méthode pour connoître le sens du mouvement de la Comète, vu du Soleil; ainsi que sa longitude héliocentrique.

Fig. 2. Pour y parvenir, du Soleil S & par la projection C''' de la Comète sur le plan de l'Écliptique, menons le rayon vecteur accourci SC', & conservons les constructions du §. 13; il est évident que si de la projection C' de la Comète sur l'Écliptique, nous abaissons sur le diamètre Ee de l'orbite de la Terre, passant par le premier point d'*Ariès*, la perpendiculaire $C'P$; la ligne SP est celle que nous avons nommée x, & la droite PC' est celle que nous avons nommée y. De plus, l'angle PSC' est égal à la longitude de la Comète, vue du Soleil, augmentée de 180^d; donc

$$\text{Tangente (long. héliocent. de la Comète} + 180^d) = \frac{y}{x};$$

donc

$$\text{Tangente (longitude héliocentrique de la Comète)} = \frac{-y}{-x}.$$

Si, dans cette dernière expression, l'on substitue à $-x$ &

à $-y$, leurs valeurs tirées des équations (1) & (2) du §. 13, l'on aura

$$\text{Tangente (long. héliocent. de la Comète)} = \frac{\Delta \operatorname{cof.} L \operatorname{fin.} B - T \operatorname{fin.} A}{\Delta \operatorname{cof.} L \operatorname{cof.} B - T \operatorname{cof.} A}.$$

Cette équation a lieu pour toutes les obſervations ; ſi donc l'on a deux obſervations conſécutives de la Comète, & que l'on déſigne par Δ', B', L', T', A', les quantités qui appartiennent à la première obſervation ; par Δ'', B'', L'', T'', A'', les quantités qui appartiennent à la ſeconde obſervation, l'on aura

$$(1)\ \text{Tang. (long. héliocent. de la Comète)} = \frac{\Delta' \operatorname{cof.} L' \operatorname{fin.} B' - T' \operatorname{fin.} A'}{\Delta' \operatorname{cof.} L' \operatorname{cof.} B' - T' \operatorname{cof.} A'};$$

$$(2)\ \text{Tang. (long. héliocent. de la Comète)} = \frac{\Delta'' \operatorname{cof.} L'' \operatorname{fin.} B'' - T'' \operatorname{fin.} A''}{\Delta'' \operatorname{cof.} L'' \operatorname{cof.} B'' - T'' \operatorname{cof.} A''}.$$

Il ne s'agit que de vérifier ſi la ſeconde équation donne une longitude plus grande ou plus petite que la première. Dans le premier cas, la Comète eſt directe ; dans le ſecond cas, elle eſt rétrograde.

De la diſtance du périhélie de la Comète au nœud aſcendant, comptée ſur l'orbite.

(48.) Soit

R le rayon vecteur de la Comète ;

I l'angle d'inclinaiſon du plan de l'orbite ſur l'Écliptique ;

u l'angle du rayon vecteur de la Comète avec la ligne des nœuds ; cet angle eſt compté ſur le plan de l'orbite de la Comète, en partant du nœud aſcendant, & en ſuivant le ſens du mouvement de cet Aſtre dans ſon orbite ;

Ω la diſtance du périhélie de la Comète au nœud aſcendant ; cet angle eſt compté ſur le plan de l'orbite, en ſuivant le ſens du mouvement de la Comète ;

Δ la diſtance de la Comète à la Terre ;

A la longitude du Soleil ;

B la longitude géocentrique de la Comète ;

L la latitude géocentrique de la Comète ;

il eſt évident que pour chaque obſervation, on a d'abord une équation de la forme ſuivante,

$$R\,[1 + \text{cof.}\,(u - \Omega)] - 2\,D = 0.$$

De plus, on a (§. 20 équation (1))

$$R\ \text{fin.}\ u\ \text{fin.}\ I - \Delta\ \text{fin.}\ L = 0.$$

Si donc l'on compare la première & la troiſième obſervations, on aura les équations ſuivantes,

$$(1)\quad R'\,[1 + \text{cof.}\,(u' - \Omega)] - 2\,D = 0;$$

$$(2)\quad R'''\,[1 + \text{cof.}\,(u''' - \Omega)] - 2\,D = 0;$$

$$(3)\quad R'\ \text{fin.}\ u'\ \text{fin.}\ I - \Delta'\ \text{fin.}\ L' = 0;$$

$$(4)\quad R'''\ \text{fin.}\ u'''\ \text{fin.}\ I - \Delta'''\ \text{fin.}\ L''' = 0.$$

Des équations (3) & (4), l'on tire

$$\Delta' R'''\ \text{fin.}\ L'\ \text{fin.}\ u''' - \Delta''' R'\ \text{fin.}\ L'''\ \text{fin.}\ u' = 0.$$

Maintenant ſi l'on nomme

v' l'anomalie de la Comète lors de la 1.re obſervation,
v''' l'anomalie de la Comète lors de la 2.e obſervation,
N l'angle compris entre les deux rayons vecteurs R', R''',

il eſt évident qu'il y a la même différence entre u''' & u' qu'entre v''' & v', & l'on aura

$$(5)\quad u''' = u' + N.$$

Donc

$$(6)\quad \Delta' R'''\ \text{fin.}\ L'\ \text{fin.}\ (u' + N) - \Delta''' R'\ \text{fin.}\ L'''\ \text{fin.}\ u' = 0;$$

mais $\text{fin.}\ (u' + N) = \text{fin.}\ u'\ \text{cof.}\ N + \text{fin.}\ N\ \text{cof.}\ u'$; donc

$$(7)\quad \text{tangente}\ u' = \frac{R'''\Delta'\ \text{fin.}\ L'\ \text{fin.}\ N}{R'\Delta'''\ \text{fin.}\ L''' - R'''\Delta'\ \text{fin.}\ L'\ \text{cof.}\ N}.$$

Nous connoiſſons maintenant la valeur de u' qui répond à la première obſervation; on conclura donc la poſition du périhélie au moyen de l'équation

$$(8)\quad \text{cof.}\ (u' - \Omega) = \frac{2\,D}{R'} - 1,$$

ou plus ſimplement, au moyen de l'équation

$$(9)\ \Omega = u' - \nu'.$$

De l'inclinaiſon du plan de l'orbite de la Comète ſur l'Écliptique.

(49.) Quoique nous ayons déjà donné une méthode pour conclure l'inclinaiſon de l'orbite de la Comète ſur l'Écliptique, on ne ſera pas fâché de voir avec quelle facilité elle ſe déduit des équations précédentes : en effet, de l'équation (3) du *§. 48,* l'on tire tout de ſuite

$$(1)\ \text{ſin.}\ I = \frac{\Delta'\ \text{ſin.}\ L'}{R'\ \text{ſin.}\ u'}.$$

Nous remarquerons que ſin. I appartient à deux angles; on choiſira le plus petit de ces angles, ſi la Comète eſt directe; on choiſira le plus grand, ſi la Comète eſt rétrograde.

Du lieu du Nœud aſcendant de la Comète ſur l'Écliptique, & de la longitude du Périhélie.

(50.) Nous avons déjà donné une méthode pour déterminer le lieu du nœud aſcendant de la Comète ſur l'Écliptique; voici une ſeconde ſolution du même Problème.

Par la Terre T menons une parallèle indéfinie Tt' au diamètre ESe de l'orbite de la Terre, paſſant par le premier point d'*Ariès;* & une autre parallèle Tt à la ligne des nœuds. Prenons le point t tel que Mt ſoit le prolongement de $C'M$, & que par conſéquent $C'Mt$ ſoit perpendiculaire à la ligne Tt; on aura *(§. 20)* Fig. 3.

$$MC' = R\ \text{ſin.}\ u\ \text{coſ.}\ I;$$
$$Mt = mT = T\ \text{ſin.}\ (TSm);$$
$$C't = Mt + MC' = T\ \text{ſin.}\ (TSm) + R\ \text{ſin.}\ u\ \text{coſ.}\ I.$$
$$TC' = \Delta\ \text{coſ.}\ L;$$
$$TC'\ \text{ſin.}\ (C'Tt) - C't = 0.$$

De plus, l'angle $C'Tt$ eſt évidemment égal à la longitude

géocentrique de la Comète moins la longitude du nœud ascendant, puisqu'en effet, il est égal à l'angle $C'Tt'$ moins l'angle tTt'; par la même raison, l'angle STt est égal à la longitude du Soleil moins la longitude du nœud ascendant de la Comète. Si donc l'on nomme

ζ la longitude du nœud ascendant de la Comète,
A la longitude du Soleil,
B la longitude géocentrique de la Comète,

l'on aura

angle STt = angle $TSm = A - \zeta$; angle $C'Tt = B - \zeta$;

donc

$$T \text{ sin.} (TSm) = T \text{ sin.} (A - \zeta);$$

donc

$$C't = T \text{ sin.} (A - \zeta) + R \text{ sin.} u \text{ cos.} I;$$

donc en rapportant l'équation à la première observation,

(1) $R' \text{ sin.} u' \text{ cos.} I + T' \text{ sin.} (A' - \zeta) - \Delta' \text{ cos.} L' \text{ sin.} (B' - \zeta) = 0$;

ou enfin, à cause de $R' \text{ sin.} u' = \dfrac{\Delta' \text{ sin.} L'}{\text{sin.} I}$,

(2) $\Delta' \text{ sin.} L' \text{ cotang.} I + T' \text{ sin.} (A' - \zeta) - \Delta' \text{ cos.} L' \text{ sin.} (B' - \zeta) = 0$.

(51.) L'équation (2) du *paragraphe précédent* peut être mise sous la forme suivante,

$$\Delta' \text{ sin.} L' \text{ cotang.} I + (T' \text{ sin.} A' - \Delta' \text{ cos.} L' \text{ sin.} B') \text{ cos.} \zeta - (T' \text{ cos.} A' - \Delta' \text{ cos.} L' \text{ cos.} B') \text{ sin.} \zeta = 0.$$

Soit maintenant

M un angle tel que l'on ait (1) $\text{tang.} M = \dfrac{\Delta' \text{ cos.} L' \text{ sin.} B' - T' \text{ sin.} A'}{\Delta' \text{ cos.} L' \text{ cos.} B' - T' \text{ cos.} A'}$;

l'équation précédente deviendra

$$(2) \quad \text{sin.} (\zeta - M) = \frac{\Delta' \text{ sin.} L' \text{ cotang.} I \text{ sin.} M}{T' \text{ sin.} A' - \Delta' \text{ cos.} L' \text{ sin.} B'}.$$

Nous remarquerons que l'angle M est égal à la longitude héliocentrique de la Comète, que nous avons déterminée (§. 47).

(52.) Lorsque l'on connoîtra la longitude du nœud ascendant sur l'Écliptique, il sera facile de déterminer la longitude du

du périhélie. En effet, nous avons déterminé *(§. 48)* la diſtance du périhélie de la Comète à ſon nœud, comptée ſur l'orbite & priſe dans le ſens du mouvement de la Comète. On ajoutera cette diſtance à la longitude du nœud aſcendant, ſi la Comète eſt directe; on ſouſtraira cette diſtance de la longitude du nœud aſcendant, ſi la Comète eſt rétrograde; & l'on aura ce que l'on appelle la *longitude du périhélie.*

(53.) Dans l'équation (2) du *§. 51*, l'expreſſion de ſin. $(\zeta - M)$ appartient à deux angles, & il ne paroît d'abord aucune raiſon pour exclure l'un de ces angles. Si cependant l'on fait réflexion que l'une des deux latitudes géocentriques de la Comète n'entre point dans la formule qui détermine la poſition du nœud, on verra que les deux angles ne ſatisfont point aſtronomiquement au Problème; & l'on ne ſera point embarraſſé ſur le choix. On exclura celui des deux angles qui ſuppoſeroit, par exemple, que la ſeconde latitude géocentrique ſeroit plus grande que la première, tandis que les obſervations la donneroient plus petite; & réciproquement.

Examen de ce qui a lieu lorſque l'on combine une Obſervation éloignée avec les premières Obſervations.

(54.) Par les méthodes précédentes, nous avons déterminé les élémens qui repréſentent les premières obſervations; & ces élémens ne peuvent manquer, par la manière dont ils ſont déduits, de convenir à peu-près à la véritable parabole; il s'agit maintenant de vérifier ſi ces élémens ſatisfont à une obſervation éloignée.

Pour y parvenir, on remarquera que relativement à cette obſervation éloignée, l'on a toutes les mêmes équations qui ont lieu pour les premières obſervations; l'on a donc, les équations ſuivantes,

(1) $R''''^2 = T''''^2 + \Delta''''^2 - 2\Delta'''' T'''' \text{ coſ. } L'''' \text{ coſ. } (B'''' - A'''');$

(2) $R'''' \text{ ſin. } u'''' \text{ ſin. } I - \Delta'''' \text{ ſin. } L'''' = 0;$

(3) $R'''' \text{ ſin. } u'''' \text{ coſ. } I + T'''' \text{ ſin. } (A'''' - \zeta) - \Delta'''' \text{ coſ. } L'''' \text{ ſin. } (B'''' - \zeta) = 0.$

Dans ces équations, I & ζ ſont des quantités connues, puiſqu'elles ont été déterminées précédemment; de plus, les angles A'''', B'''', L'''' & le rayon T'''' dépendent de la dernière obſervation.

Des équations (2) & (3), l'on tire

$$(4)\ \Delta'''' \text{ſin.}\ L'''' \text{cotang.}\ I + T'''' \text{ſin.}\ (A'''' - \zeta) - \Delta'''' \text{coſ.}\ L'''' \text{ſin.}\ (B'''' - \zeta) = 0;$$

on déterminera donc Δ'''' au moyen de cette dernière équation, & l'on connoîtra R'''' au moyen de l'équation (1).

(55.) L'équation (4) du *paragraphe précédent*, renferme la latitude & la longitude de la Comète à l'inſtant de la dernière obſervation. On ſait cependant qu'un ſeul de ces élémens doit déterminer le rayon vecteur de la Comète, & ſa diſtance à la Terre, de ſorte que l'équation (4) introduit dans le Problème plus de conditions qu'il n'eſt néceſſaire; il eſt vrai que ſi les obſervations ſont exactes, cette condition ſuperflue ne préſente aucun inconvénient. Quoi qu'il en ſoit, je vais donner les formules qui réſoudront la queſtion en n'employant qu'une des deux obſervations.

Fig. 3. Pour parvenir à ce but, je remarque que l'angle tTC' eſt égal à la longitude géocentrique de la Comète moins la longitude du nœud; cet angle eſt donc égal à $B'''' - \zeta$. De plus, à cauſe du triangle tTC' rectangle en t,

$$Tt\ \text{tang.}\ (tTC') - C't = 0;$$

donc $$Tt\ \text{tang.}\ (B'''' - \zeta) - C't = 0;$$

mais (§. 50)

$$C't = T''''\ \text{ſin.}\ (A'''' - \zeta) + R''''\ \text{ſin.}\ u''''\ \text{coſ.}\ I.$$

De plus, $$Tt = MS + Sm;$$

$$MS = R''''\ \text{coſ.}\ u''''; \quad Sm = T''''\ \text{coſ.}\ (A'''' - \zeta);$$

donc $$Tt = R''''\ \text{coſ.}\ u'''' + T''''\ \text{coſ.}\ (A'''' - \zeta);$$

donc

$$[R'''' \text{cos.}\, u'''' + T'''' \text{cos.}\,(A'''' - \zeta)]\, \text{tang.}\,(B'''' - \zeta) - T''''\, \text{sin.}\,(A'''' - \zeta) - R''''\, \text{sin.}\, u''''\, \text{cos.}\, I = 0.$$

Mais $\text{tang.}\,(B'''' - \zeta) = \frac{\text{sin.}\,(B'''' - \zeta)}{\text{cosin.}\,(B'''' - \zeta)}$; donc

$$R''''[\text{cos.}\,u''''\,\text{sin.}\,(B'''' - \zeta) - \text{sin.}\,u''''\,\text{cos.}\,I\,\text{cos.}\,(B'''' - \zeta)] + T''''[\text{cos.}\,(A'''' - \zeta)\,\text{sin.}\,(B'''' - \zeta) - \text{sin.}\,(A'''' - \zeta)\,\text{cos.}\,(B'''' - \zeta)] = 0.$$

De plus,

$$\text{cos.}\,(A'''' - \zeta)\,\text{sin.}\,(B'''' - \zeta) - \text{sin.}\,(A'''' - \zeta)\,\text{cos.}\,(B'''' - \zeta) = \text{sin.}\,(B'''' - A'''');$$

donc

$$(1)\quad R''''[\text{cos.}\,u''''\,\text{sin.}\,(B'''' - \zeta) - \text{sin.}\,u''''\,\text{cos.}\,I\,\text{cos.}\,(B'''' - \zeta)] + T''''\,\text{sin.}\,(B'''' - A'''') = 0.$$

D'ailleurs,

$$(2)\quad R''''[1 + \text{cos.}\,(u'''' - \Omega)] - 2D = 0;$$

donc $R'''' = \frac{2D}{1 + \text{cos.}\,\Omega\,\text{cos.}\,u'''' + \text{sin.}\,\Omega\,\text{sin.}\,u''''}$.

Donc enfin, si l'on nomme

M un angle tel que l'on ait $(3)\ \text{tang.}\,M = \frac{2D\,\text{sin.}\,(B'''' - \zeta) + T''''\,\text{sin.}\,(B'''' - A'''')\,\text{cos.}\,\Omega}{2D\,\text{cos.}\,I\,\text{cos.}\,(B'''' - \zeta) - T''''\,\text{sin.}\,(B'''' - A'''')\,\text{sin.}\,\Omega}$,

l'on aura

$$(4)\quad \text{sin.}\,(u'''' - M) = \frac{T''''\,\text{sin.}\,(B'''' - A'''')\,\text{sin.}\,M}{2D\,\text{sin.}\,(B'''' - \zeta) + T''''\,\text{cos.}\,\Omega\,\text{sin.}\,(B'''' - A'''')}.$$

L'on connoîtra donc la valeur de u'''', d'où l'on conclura la valeur de R'''', au moyen de l'équation (1).

(56.) L'équation précédente donne deux valeurs de u''''; on ne peut jamais être embarrassé sur le choix de ces valeurs; on prendra celle qui rend nulle l'équation (2) du *§. 54*; on sent aisément la raison de ce procédé. En effet, la dernière équation que nous avons résolue étant indépendante de la latitude de la Comète, appartient indifféremment aux

deux cas de la latitude auſtrale & de la latitude boréale : il faut donc une nouvelle conſidération pour exclure l'une des deux ſolutions.

(57.) Si toutes les obſervations dont on a fait uſage dans le cours de ces calculs, étoient également exactes, la valeur de R'''' déduite par la méthode précédente, ſeroit égale à celle que l'on conclut des équations du *§. 54;* mais s'il s'eſt gliſſé quelqu'inexactitude dans ces obſervations, les deux équations ne peuvent pas être à la fois rigoureuſement ſatisfaites : la comparaiſon des deux réſultats apprendra donc quelle foi l'on doit ajouter aux obſervations.

(58.) Indépendamment des méthodes précédentes, on peut déterminer la diſtance de la Comète à la Terre, lors de la dernière obſervation, par la formule du *§. 24.*

Comme dans les recherches ſuivantes, je ne conſidérerai plus que trois obſervations, 1.° la première de toutes les obſervations; 2.° celle qui réſulte de la comparaiſon des obſervations prochaines *(§. 31);* 3.° l'obſervation éloignée dont il vient d'être queſtion; pour éviter la multiplicité des accens, je nommerai

R', Δ' T', A', B', L', &c. les quantités relatives à la première obſervation;

R'', Δ'', T'', A'', B'', L'', &c. les quantités relatives à la ſeconde obſervation; c'eſt-à-dire à celle qui réſulte de la comparaiſon des obſervations prochaines, & que je laiſſe dans le calcul;

R''', Δ''', T''', A''', B''', L''', &c. les quantités relatives à la troiſième obſervation éloignée.

On déterminera donc facilement la diſtance de la Comète à la Terre, correſpondante à la dernière obſervation, au moyen de l'équation ſuivante *(§. 24),*

$$(1)\ \Delta''' = \frac{D'\Delta'\Delta'' - G\Delta' - H\Delta''}{C\Delta'\Delta'' - E'\Delta' - F\Delta'' + K},$$

Cette manière de déterminer les diſtances de la Comète à la Terre, a l'avantage de rendre nulles les équations de la forme de celles du *§. 24.*

Détermination des véritables élémens de la Comète.

(59.) Les élémens déduits des calculs précédens, ne peuvent manquer d'être approchés; mais il eſt très-probable qu'ils ne ſont point rigoureuſement exacts; il faut donc d'abord s'aſſurer de la légitimité des premières ſuppoſitions.

Si l'on nomme

D la diſtance périhélie de la Comète,

R', Δ', T', A', B', L', &c. les quantités relatives à la première obſervation,

R'', Δ'', T'', A'', B'', L'', &c. les quantités relatives à la ſeconde obſervation,

R''', Δ''', T''', A''', B''', L''', &c. les quantités relatives à la troiſième obſervation,

t le nombre de minutes de temps écoulées entre la première & la ſeconde obſervation,

t' le nombre de minutes écoulées entre la ſeconde & la troiſième obſervation,

τ le nombre de minutes que l'on conclut de l'équation ſuivante,

$$(1)\ \tau = [(R''+2D)\sqrt{(R''-D)} \mp (R'+2D)\sqrt{(R'-D)}]\,\frac{157846'\frac{1}{3}}{4r^{\frac{3}{2}}},$$

τ' le nombre de minutes que l'on conclut de l'équation ſuivante,

$$(2)\ \tau' = [(R'''+2D)\sqrt{(R'''-D)} \mp (R''+2D)\sqrt{(R''-D)}]\,\frac{157846'\frac{1}{3}}{4r^{\frac{3}{2}}},$$

les déterminations ne ſeront rigoureuſes qu'autant que l'on aura $\tau = t$, $\tau' = t'$. Dans tout autre cas, les élémens ne ſeront qu'approchés; il eſt alors néceſſaire d'avoir une méthode pour parvenir à la connoiſſance des véritables élémens.

Nous avons vu, *§. 9*, ce que ſignifient les deux ſuites de ſignes; je ne répéterai point ce que j'ai dit à ce ſujet.

(60.) Puiſque l'on connoît à peu-près les valeurs de D, R', R'', R'''; ſi l'on différencie les équations (1) & (2) du *paragraphe précédent*, & que l'on ſuppoſe

$$(1)\ d\tau = t - \tau; \qquad (2)\ d\tau' = t' - \tau';$$

il eſt évident que l'on aura les relations entre les quantités dD, dR', dR'', dR''', $d\tau$, $d\tau'$, qui ſatisfont au Problème. Soit donc

$$a = \pm \frac{R' \sqrt{(R''' - D)}}{r^{\frac{1}{2}}};$$

$$a' = \pm \frac{R'' \sqrt{(R''' - D)}}{r^{\frac{1}{2}}};$$

$$b = - \frac{R'' \sqrt{(R' - D)}}{r^{\frac{1}{2}}};$$

$$b' = - \frac{R''' \sqrt{(R'' - D)}}{r^{\frac{1}{2}}};$$

$$c = - \frac{(R'' - 2D)\sqrt{(R' - D)} \mp (R' - 2D)\sqrt{(R'' - D)}}{r^{\frac{1}{2}}};$$

$$c' = - \frac{(R''' - 2D)\sqrt{(R'' - D)} \mp (R'' - 2D)\sqrt{(R''' - D)}}{r^{\frac{1}{2}}};$$

$$\varepsilon = \tfrac{2}{3}\ \frac{4\sqrt{(R' - D)}\sqrt{(R'' - D)}}{157846' \frac{1}{7}}$$

$$\varepsilon' = \tfrac{2}{3}\ \frac{4\sqrt{(R'' - D)}\sqrt{(R''' - D)}}{157846' \frac{1}{7}};$$

l'on aura

$$(3)\ a\,dR' + b\,dR'' + c\,dD + \varepsilon r\,d\tau = 0,$$

$$(4)\ a'\,dR'' + b'\,dR''' + c'\,dD + \varepsilon' r\,d\tau' = 0.$$

L'équation (3) réſulte de la comparaiſon du véritable temps écoulé entre les deux premières obſervations, & celui que l'on détermine par l'équation (1) du *§. 59*; l'équation (4)

résulte de la comparaison du véritable temps écoulé entre la seconde & la troisième observation, & celui que l'on détermine par l'équation (2) du §. 59.

Les valeurs de a & de c, de a' & de c', ont un double signe; on emploîra les signes supérieurs, lorsque dans l'intervalle des deux observations que l'on combine, la Comète n'aura point passé par le périhélie; on emploîra les signes inférieurs dans le cas contraire.

(61.) Des équations (3) & (4) du §. 60, l'on tire

$$(1)\ ac'dR' + (bc' - a'c)dR'' - b'cdR''' + \varepsilon c'rd\tau - \varepsilon' crd\tau' = 0.$$

Mais si l'on conserve les définitions de m', m'', m''' du §. 39, l'on a

$$dR' = \frac{m'd\Delta'}{R'};\quad dR'' = \frac{m''d\Delta''}{R''};\quad dR''' = \frac{m'''d\Delta'''}{R'''};$$

donc

$$(2)\ \frac{ac'm'}{R'}d\Delta' + (bc' - a'c)\frac{m''d\Delta''}{R''} - \frac{b'cm'''d\Delta'''}{R'''} + \varepsilon c'rd\tau - \varepsilon' crd\tau' = 0.$$

Cette équation est une de celles qu'il faut satisfaire pour avoir les véritables élémens; il n'est plus question maintenant que d'avoir les relations entre $d\Delta'$, $d\Delta''$, $d\Delta'''$.

(62.) Pour avoir la relation entre $d\Delta'$ & $d\Delta''$, je fais usage de l'équation (3) du §. 38, dans laquelle je change Δ''', R''', A''', B''', L''', T''' en Δ'', R'', A'', B'', L'', T'', &c; j'ai donc

$$(1)\ (\Delta' - f\Delta'' - g)d\Delta' + (\Delta'' - f\Delta' - g')d\Delta'' + hdR' + hdR'' - \gamma' = 0;$$

mais $dR' = \frac{m'd\Delta'}{R'}$; $dR'' = \frac{m''d\Delta''}{R''}$;

donc, si l'on suppose

$$M = \Delta' - f\Delta'' - g + \frac{m'h}{R'},$$

$$M' = \Delta'' - f\Delta' - g' + \frac{m''h}{R''},$$

l'on aura

$$(2)\ Md\Delta' + M'd\Delta'' - \gamma' = 0.$$

Quant à la relation entre $d\Delta'''$ & $d\Delta'$, je la tirerai de

l'équation (2) du §. 28, dans laquelle je supposerai

$$d\Delta'' = -\frac{M}{M'}\,d\Delta' + \frac{\gamma'}{M'}.$$

Si donc l'on suppose

$$l = C\Delta'\Delta'' - E'\Delta' - F\Delta'' + K,$$
$$\lambda = C\Delta''\Delta''' - E'\Delta''' - D'\Delta'' + G,$$
$$\lambda' = C\Delta'\Delta''' - F\Delta''' - D'\Delta' + H,$$

l'on aura

$$(3)\quad l\,d\Delta''' + \left(\lambda - \frac{\lambda' M}{M'}\right) d\Delta' + \frac{\lambda'\gamma'}{M'} - a = 0.$$

Il est superflu d'avertir que si les équations (1) des §§. 24 & 38, étoient satisfaites, par les suppositions particulières, sur Δ', Δ'', Δ'''; R', R'', R''', &c. les quantités γ' & α disparoîtroient dans les résultats.

(63.) Maintenant si l'on substitue ces valeurs de $d\Delta''$ & de $d\Delta'''$ dans l'équation (2) du §. 61, elle deviendra

$$(1)\quad \left[\frac{ac'm'}{R'} - (bc' - a'c)\,\frac{Mm''}{M'R''} + \frac{b'cm'''}{lR'''}\left(\lambda - \frac{\lambda' M}{M'}\right)\right] d\Delta'$$
$$+ (bc' - a'c)\,\frac{\gamma' m''}{M'R''} + \frac{b'cm'''}{lR'''}\left(\frac{\lambda'\gamma'}{M'} - \alpha\right) + \epsilon c' r\,d\tau - \epsilon' c r\,d\tau' = 0;$$

& le Problème est résolu. En effet, si l'on nomme

∂', ∂'', ∂''', ρ', ρ'', ρ''' les trois distances de la Terre à la Comète, & les trois rayons vecteurs trouvés précédemment, que l'on ne doit plus regarder que comme des approximations,

Δ', Δ'', Δ''', R', R'', R''' les trois véritables distances de la Terre à la Comète, & les trois véritables rayons vecteurs,

l'on aura

$$(2)\quad \Delta' = \partial' + d\Delta';$$

$$(3)\quad \Delta'' = \partial'' - \frac{M}{M'}\,d\Delta' + \frac{\gamma'}{M'};$$

$$(4)\quad \Delta''' = \partial''' - \left\{\frac{\lambda - \frac{\lambda' M}{M'}}{l}\right\} d\Delta' - \frac{\lambda'\gamma'}{lM'} + \frac{\alpha}{l};$$

$$(5)\ R' = \rho' + \frac{m' d\Delta'}{\rho'};$$

$$(6)\ R'' = \rho'' - \frac{m''}{\rho''}\,\frac{M}{M'}\,d\Delta' + \frac{m''}{\rho''}\,\frac{\gamma'}{M};$$

$$(7)\ R''' = \rho''' - \frac{m'''}{l\rho'''}\left(\lambda - \frac{\lambda' M}{M'}\right)d\Delta' - \frac{m'''}{l\rho'''}\left(\frac{\lambda'\gamma'}{M'} - \alpha\right).$$

& comme $d\Delta'$ eſt connu par la première équation, on connoîtra les trois véritables diſtances de la Comète à la Terre, & les trois rayons vecteurs correſpondans aux trois obſervations.

(64.) On connoîtra pareillement la véritable diſtance périhélie, au moyen de l'équation ſuivante,

$$(6)\ D = \delta' - \left(\frac{a}{c}\,\frac{m'}{\rho'} - \frac{b\,m''\,M}{c\,\rho''\,M'}\right)d\Delta' - \frac{b\,m''\,\gamma'}{c\,\rho''\,M''} - \frac{\varepsilon\,\tau\,d\tau}{c}.$$

Dans cette équation,

δ' eſt l'ancienne expreſſion de la diſtance périhélie.

Cette équation ſe conclut facilement de l'équation (1) du *§. 60*, dans laquelle on a ſubſtitué à dR' & à dR'' leurs valeurs en $d\Delta'$.

(65.) La détermination des véritables élémens n'a plus aucune difficulté; la diſtance en temps de la première obſervation au paſſage par le périhélie, ſera donnée par l'équation (6) du *§. 44;* l'inclinaiſon du plan de l'orbite de la Comète ſur l'Écliptique, & la diſtance du périhélie de la Comète au nœud aſcendant, comptée ſur l'Écliptique, ſeront données par les équations (8) & (1) des *§§. 48* & *49;* on pourra même ſe paſſer de l'équation (1) du *§. 17* pour déterminer l'angle N, que l'on ſera réſulter, ſi l'on veut, de la différence des angles v'', v', calculés par les équations ſuivantes,

$$(1)\ R'\,(1 + \text{coſ.}\,v') - 2D = 0;$$

$$(2)\ R''\,(1 + \text{coſ.}\,v'') - 2D = 0.$$

On déterminera enfin la longitude du nœud aſcendant de la Comète, par les équations du *§. 51*.

(66.) Dans ces dernières recherches, pour avoir la relation entre $d\Delta'$ & $d\Delta''$, j'ai comparé la première & la feconde obfervation, & j'y ai appliqué l'équation (3) du *§. 38;* dans les premières recherches, au contraire, j'ai appliqué la même analyfe à la première & à la troifième obfervation. J'ai cru devoir faire cette permutation. En effet, l'équation du *§. 38,* quoique précife dans un grand intervalle de temps, n'eft pas abfolument rigoureufe; fi donc l'intervalle entre la première & la dernière obfervation, eft confidérable, ainfi qu'on peut le fuppofer dans les dernières recherches, il a été à propos d'appliquer l'équation du *§. 38* à des intervalles moins confidérables, c'eft-à-dire à la première & à la feconde obfervation. Dans nos premières recherches, au contraire, comme les rapports des diftances de la Comète à la Terre, exigeoient que les intervalles entre les obfervations ne fuffent pas très-longs, & que d'ailleurs il falloit éviter, autant qu'il étoit poffible, d'avoir à conclure de très-grandes quantités, par la comparaifon de petits élémens, j'ai cru devoir préférer de comparer entr'elles la première & la troifième obfervation.

De l'influence des Erreurs des Obfervations fur les Réfultats.

(67.) Il eft poffible que les obfervations ne foient pas rigoureufement exactes; & l'on peut demander l'influence des erreurs des obfervations fur les réfultats. Rien n'eft plus fimple que ce Problème; il fe réfout par l'équation (1) du *§. 30.*

Détermination de la latitude & de la longitude géocentriques de la Comète à un inftant quelconque, lorfque l'on connoît les Élémens.

(68.) La détermination de la latitude & de la longitude géocentriques de la Comète à un inftant quelconque, ne préfente aucune difficulté, lorfque l'on connoît les élémens. Je vais terminer ce qui regarde le calcul des Comètes dans la parabole, par l'application de mes formules à ces queftions.

Nous appellerons

R' le rayon vecteur de la Comète à l'inſtant dont il s'agit;

v' l'anomalie de la Comète à cet inſtant;

Δ' la diſtance de la Comète à la Terre;

A' la longitude du Soleil;

T' le rayon vecteur de la Terre;

ζ la longitude du nœud aſcendant;

I l'inclinaiſon de l'orbite;

D la diſtance périhélie;

Ω la diſtance du périhélie de la Comète au nœud aſcendant, comptée ſur le plan de l'orbite de la Comète, en ſuivant le ſens du mouvement de la Comète;

u' l'angle du rayon vecteur de la Comète avec la ligne des nœuds; cet angle eſt compté ſur le plan de l'orbite, en partant du nœud aſcendant, & en ſuivant le ſens du mouvement de la Comète;

B' la longitude géocentrique de la Comète qu'il s'agit de déterminer;

L' la latitude géocentrique;

X le nombre de minutes écoulées depuis le paſſage de la Comète par ſon périhélie.

(69.) Il ſuit des conſtructions du ſ. 55, que l'on a l'équation ſuivante,

$$(1)\quad R'\left[\text{coſ.}\, u' \,\text{ſin.}\, (B' - \zeta) - \text{ſin.}\, u' \,\text{coſ.}\, I \,\text{coſ.}\, (B' - \zeta)\right] + T' \,\text{ſin.}\, (B' - A') = 0;$$

mais

$$\text{ſin.}\, (B' - \zeta) = \text{ſin.}\, B' \,\text{coſ.}\, \zeta - \text{coſ.}\, B' \,\text{ſin.}\, \zeta;$$
$$\text{coſ.}\, (B' - \zeta) = \text{coſ.}\, B' \,\text{coſ.}\, \zeta + \text{ſin.}\, B' \,\text{ſin.}\, \zeta;$$
$$\text{ſin.}\, (B' - A') = \text{ſin.}\, B' \,\text{coſ.}\, A' - \text{coſ.}\, B' \,\text{ſin.}\, A';$$

donc

$$(2)\quad \text{tang.}\, B' = \frac{R'\,(\text{coſ.}\, u' \,\text{ſin.}\, \zeta + \text{ſin.}\, u' \,\text{coſ.}\, I \,\text{coſ.}\, \zeta) + T' \,\text{ſin.}\, A'}{R'\,(\text{coſ.}\, u' \,\text{coſ.}\, \zeta - \text{ſin.}\, u' \,\text{coſ.}\, I \,\text{ſin.}\, \zeta) + T' \,\text{coſ.}\, A'};$$

on connoîtra donc la longitude demandée, lorſque l'on aura déterminé R' & u'.

(70.) On connoîtra pareillement la latitude demandée. En effet, il suit des §§. 49 & 50, que l'on a les équations suivantes,

$$R' \text{fin.} u' \text{fin.} I - \Delta' \text{fin.} L' = 0;$$

$$R' \text{fin.} u' \text{cof.} I + T' \text{fin.} (A' - \zeta) - \Delta' \text{cof.} L' \text{fin.} (B' - \zeta) = 0.$$

Si dans ces équations, l'on élimine la quantité Δ', l'on aura

$$(1)\ \text{tang.}\ L' = \frac{R' \text{fin.} u' \text{fin.} I \text{fin.} (B' - \zeta)}{R' \text{fin.} u' \text{cof.} I + T' \text{fin.} (A' - \zeta)}.$$

Quant à la distance de la Comète à la Terre, on la déterminera par l'équation suivante,

$$(2)\ \Delta' = \frac{R' \text{fin.} u' \text{fin.} I}{\text{fin.} L'}.$$

Dans l'usage de ces formules, les angles A', B', ζ, sont comptés depuis 0^d jusqu'à 360^d, à commencer du premier point d'*Ariès*; l'angle u' est compté sur le plan de l'orbite de la Comète, en partant du nœud ascendant, & en suivant le sens du mouvement de cet Astre; fin. I est toujours positif; mais cof. I est négatif si la Comète est rétrograde; enfin, tang. L' négative indique que la latitude de la Comète est australe.

Il ne s'agit plus maintenant que de déterminer l'angle u' & le rayon vecteur R'.

(71.) Pour déterminer maintenant l'angle u' & le rayon vecteur R', je remarque que l'on a [§. 48, *équation (9)*],

$$(1)\ u' - \Omega - v' = 0;$$

l'on connoîtra donc u' lorsque l'on aura déterminé v'.

Nous avons vu [§. 44, *équations (1) & (6)*] que

$$(2)\ R' (1 + \text{cof.} v') - 2D = 0,$$

$$(3)\ X = (R' + 2D) \sqrt{(R' - D)}\ \frac{157846'\tfrac{1}{3}}{4 r^{\frac{3}{2}}}.$$

Au moyen de cette dernière équation, dans laquelle tout est connu, à l'exception de R', on déterminera facilement R', par la résolution d'une équation du troisième degré. En

effet, si l'on suppose $\sqrt{(R' - D)} = y$, l'équation (3) deviendra

$$(4)\ y^3 + 3Dy - \frac{4r^{\frac{3}{2}}X}{157846'\frac{1}{7}} = 0.$$

L'on déterminera ensuite l'angle v' au moyen de l'équation (2), l'angle u' au moyen de l'équation (1), & les questions proposées seront résolues.

Nous remarquerons ici, que l'équation (4) conduit facilement à l'équation connue,

$$(5)\ \text{tang.}^3 \frac{v'}{2} + 3\ \text{tang.} \frac{v'}{2} - \frac{4r^{\frac{3}{2}}}{D^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{X}{157846'\frac{1}{7}} = 0.$$

En effet, puisque $1 + \text{cos.}\, v' = 2\,\text{cos.}^2 \frac{v'}{2}$, l'équation (2) devient

$$(6)\ R'.\text{cos.}^2 \frac{v'}{2} - D = 0;$$

donc

$$y = \sqrt{(R' - D)} = D^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{(1 - \text{cos.}^2 \frac{v'}{2})}}{\text{cos.} \frac{v'}{2}} = \frac{D^{\frac{1}{2}}\ \text{sin.} \frac{v'}{2}}{\text{cos.} \frac{v'}{2}} = D^{\frac{1}{2}}\, \text{tang.} \frac{v'}{2};$$

l'équation (5) est donc démontrée.

(72.) On peut s'épargner la résolution de l'équation (5) du *§. 71*, au moyen de la Table connue en Astronomie, sous le nom de *Table générale du mouvement des Comètes*, & qui se trouve dans l'Astronomie de M. de la Lande, *IIIe Volume, page 335*. Au moyen de cette Table, on trouvera facilement l'anomalie v' d'une Comète, lorsque l'on connoîtra le temps écoulé depuis son passage par le périhélie; l'on conclura ensuite R' par le moyen de l'équation (2) du *paragraphe précédent*, & la valeur de u' au moyen de l'équation (1) du même paragraphe. On pourra même s'assurer si la Table ne renferme point quelqu'inexactitude, en reportant dans l'équation (5) la valeur de $\text{tang.} \frac{v'}{2}$ trouvée précédemment.

Si l'équation eſt ſatisfaite, les calculs ſont exacts. Si l'équation n'eſt pas ſatisfaite; comme on ne peut manquer d'être très-près de la ſolution, on trouvera facilement la véritable valeur qui ſatisfait à la queſtion. En effet, ſi l'on nomme

v l'angle conclu de la Table générale du mouvement des Comètes,

dv l'erreur ſur l'angle exprimée en ſecondes de degré,

x le nombre de minutes que l'on conclut de l'équation (5) en y ſubſtituant la tangente de l'angle $\frac{v}{2}$ déduit de la Table générale du mouvement des Comètes,

X le véritable nombre de minutes écoulées depuis le paſſage par le périhélie juſqu'à l'inſtant pour lequel on calcule,

on aura

$$(1)\ v' = v + dv,$$

dv ayant d'ailleurs pour expreſſion,

$$(2)\ dv = \frac{8\,r^{\frac{3}{2}}}{3\,D^{\frac{1}{2}}}\ \text{coſ.}^4\ \frac{v}{2}\ \frac{(X-x)}{157846'\frac{1}{3}}\ 206265''.$$

Sur un cas particulier où le Problème rigoureux ſe réſout ſans faire uſage des rapports des §§. 31 & ſuivans, *& ſans néanmoins employer des équations d'un degré ſupérieur au quatrième.*

(73.) Je dois parler ici d'un cas ſingulier, lorſque duquel le Problème général ſe réſout rigoureuſement, ſans faire uſage des rapports des *§§. 31 & ſuivans*, & ſans employer des équations d'un degré ſupérieur au quatrième; c'eſt celui où la Comète auroit été obſervée dans les deux nœuds. En voici l'analyſe, d'après mes formules.

Soit

R' le rayon vecteur, lors de la première obſervation;

v' l'anomalie de la Comète;

A' la longitude du Soleil;

B' la longitude géocentrique de la Comète;

T' le rayon vecteur de la Terre;

R'' le rayon vecteur, lors de la seconde observation;

v'' l'anomalie de la Comète;

A'' la longitude du Soleil;

B'' la longitude géocentrique de la Comète;

T'' le rayon vecteur de la Terre;

ζ la longitude du nœud ascendant;

I l'inclinaison de l'orbite;

t le nombre de minutes écoulées entre les deux observations;

D la distance périhélie;

r la distance moyenne du Soleil à la Terre.

Il suit de nos recherches, que l'on a les équations suivantes,

(1) $R'(1 + \text{cos.}\, v') - 2D = 0$,

(2) $R''(1 + \text{cos.}\, v'') - 2D = 0$,

(3) $t = [(R'' + 2D)\surd(R'' - D) + (R' + 2D)\surd(R' - D)]\ \dfrac{157846'\frac{1}{7}}{4r^{\frac{3}{2}}}$;

(4) $\pm R'\,\text{sin.}\,(B' - \zeta) + T'\,\text{sin.}\,(B' - A') = 0$,

(5) $\mp R''\,\text{sin.}\,(B'' - \zeta) + T''\,\text{sin.}\,(B'' - A'') = 0$.

Dans l'équation (3) j'ai mis le signe *plus*, parce que dans l'intervalle des deux observations, la Comète a essentiellement passé par le périhélie. Quant aux équations (4) & (5), elles ne sont autre chose que des équations semblables à l'équation (1) du *§. 55;* en observant toutefois, que dans ces équations, la condition des observations faites dans les nœuds, a nécessité celle de $\text{sin.}\, u = 0$, & celle de $\text{cos.}\, u = \pm 1$; c'est-à-dire $\text{cos.}\, u = 1$ pour l'une des observations, celle qui a eu lieu dans le nœud ascendant, & $\text{cos.}\, u = -1$ pour l'observation qui a eu lieu dans le nœud descendant. Au reste, on ne peut jamais être embarrassé sur le choix des signes, car l'on sait toujours laquelle de la première ou de la seconde observation a été faite dans le nœud ascendant.

(74.) Je reprends les équations (1) & (2) du §. 73, & je remarque, qu'attendu que les anomalies de la Comète diffèrent de 180 degrés lors des deux observations, l'on a $\text{cos. } v'' = - \text{cos. } v'$; donc

$$(1)\ R' - R'' + (R' + R'') \text{ cos. } v' = 0.$$

Je substitue cette valeur de $\text{cos.} v'$ dans l'équation (1) du §. 73, & j'en tire

$$(2)\ D = \frac{R' R''}{R' + R''}.$$

Je substitue cette valeur de D dans l'équation (3) du §. 73, &, à cause de

$$(R' + 2D) \sqrt{(R' - D)} = \frac{R'^3 + 3 R'^2 R''}{(R' + R'')^{\frac{3}{2}}},$$

$$(R'' + 2D) \sqrt{(R'' - D)} = \frac{R''^3 + 3 R''^2 R'}{(R' + R'')^{\frac{3}{2}}},$$

& par conséquent de

$$(R' + 2D) \sqrt{(R' - D)} + (R'' + 2D) \sqrt{(R'' - D)} = (R' + R'')^{\frac{3}{2}},$$

j'ai $\quad R' + R'' = r \left(\frac{4^t}{157846' \frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}$;

donc si l'on suppose

$$M = r \left(\frac{4^t}{157846' \frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}},$$

l'on aura

$$(3)\ R' + R'' - M = 0.$$

(75.) Je reprends les équations (4) & (5) du §. 73, & j'en tire

$$R' = \mp \frac{T' \text{ sin. } (B' - A')}{\text{sin. } (B' - \zeta)}, \quad R'' = \pm \frac{T'' \text{ sin. } (B'' - A'')}{\text{sin. } (B'' - \zeta)};$$

donc

$$(1)\ R' + R'' = \mp \frac{T' \text{ sin. } (B' - A)}{\text{sin. } (B' - \zeta)} \pm \frac{T'' \text{ sin. } (B'' - A'')}{\text{sin. } (B'' - \zeta)};$$

donc enfin

$$(2)\ M \text{ sin. } (B' - \zeta) \text{ sin. } (B'' - \zeta) \pm T' \text{ sin. } (B' - A') \text{ sin. } (B'' - \zeta) \mp T'' \text{ sin. } (B'' - A'') \text{ sin. } (B' - \zeta) = 0,$$

Soit

Soit maintenant

b la différence des angles B'', B', de forte que l'on ait $B'' = B' + b$;

l'équation (2) deviendra

$$(3)\ M \text{fin.}\,(B' - \zeta)\ \text{fin.}\,(B' - \zeta + b) \pm T' \text{fin.}\,(B' - A')\ \text{fin.}\,(B' - \zeta + b)$$
$$\mp T'' \text{fin.}\,(B'' - A'')\ \text{fin.}\,(B' - \zeta) = 0.$$

Mais

$$\text{fin.}\,(B' - \zeta + b) = \text{fin.}\,(B' - \zeta)\ \text{cof.}\,b + \text{cof.}\,(B' - \zeta)\ \text{fin.}\,b;$$

donc enfin, en divifant l'équation par fin. $(B' - \zeta)$,

$$(4)\ M\,[\text{fin.}\,(B' - \zeta)\ \text{cof.}\,b + \text{cof.}\,(B' - \zeta)\ \text{fin.}\,b]$$
$$\pm T' \text{fin.}\,(B' - A')\ \text{fin.}\,b\ \text{cotangente}\,(B' - \zeta)$$
$$\pm T' \text{fin.}\,(B' - A')\ \text{cof.}\,b \mp T'' \text{fin.}\,(B'' - A'') = 0;$$

équation qui donnera la pofition du nœud. Lorfque cette pofition fera déterminée, on connoîtra facilement les rayons vecteurs correfpondans aux obfervations, & en général tous les élémens de la Comète, à l'exception toutefois de l'inclinaifon de l'orbite, qui ne pourra être déterminée que par une troifième obfervation. Dans les équations précédentes, la première fuite de fignes fuppofe que lors de la première obfervation, la Comète étoit dans fon nœud afcendant; il faudroit employer la feconde fuite fi l'on étoit dans le cas contraire.

(76.) L'équation (4) du §. 75 paroît promettre quatre valeurs différentes, qui peuvent fatisfaire au Problème, puifque cette équation eft du quatrième degré; on pourroit donc penfer, au premier coup-d'œil, que l'on a quatre paraboles; mais cette conclufion feroit précipitée. En effet, je vais faire voir que deux des valeurs données par l'équation (4) du §. 75 n'appartiennent point à la queftion, & que par conféquent, il n'y a que deux paraboles qui fatisfaffent aux deux premières obfervations.

Fig. 4. Pour y parvenir, ſoit Nn la ligne des nœuds; S le Soleil; N le lieu de la Comète, lors de la première obſervation; n le lieu de la Comète, lors de la ſeconde obſervation; T le lieu de la Terre, lors de la première obſervation; T' le lieu de la Terre, lors de la ſeconde obſervation; TN la direction du rayon viſuel, dans lequel la Comète eſt vue, lors de la première obſervation; $T'n$ la direction du rayon viſuel, lors de la ſeconde obſervation.

Il eſt évident, que d'après cette conſtruction, $SN = R'$, $Sn = R''$, & que $SN + Sn$ eſt une quantité connue; il eſt également évident, que ſi l'on ſuppoſoit un Obſervateur immobile placé au point t, interſection des lignes TN, $T'n$, cet Obſervateur rapporteroit la Comète aux mêmes points du Ciel, lors des deux obſervations, que l'Obſervateur placé ſur la Terre, & qui a paſſé de T en T'; on ſent également, qu'il eſt facile de déduire des obſervations, la poſition du point t, interſection des deux rayons viſuels, & l'angle Ntn de ces rayons. Le Problème ſe réduit donc à l'énoncé ſuivant.

Étant donnée ſur un plan, la poſition d'un point t, *par rapport à un point* S *pris ſur le même plan, & l'angle* Ntn *formé au point* t *par deux droites indéfinies* tN, tn; *déterminer quelle doit être la poſition des lignes* NSn, N'Sn', *paſſant par le point* S, *pour que les droites* Nn, Nn', *compriſes dans l'angle* Ntn, *ſoient égales à une quantité donnée!*

Or il eſt aiſé de démontrer qu'il n'y a que deux lignes qui ſatisfaſſent à la queſtion; il n'y a donc que deux paraboles qui puiſſent convenir aux deux premières obſervations, & il faudra une troiſième obſervation pour déterminer celle des deux paraboles qu'il conviendra de choiſir, ainſi que l'inclinaiſon du plan de l'orbite.

(77.) Il reſte maintenant à faire voir quel Problème ſe trouve réſolu par les autres racines de l'équation (4) du *§. 75.* Cette difficulté s'éclaircit facilement par les conſidérations du *paragraphe précédent.* En effet, nous avons

demandé à la Géométrie quelle devoit être la poſition des lignes NSn, $N'Sn'$, paſſant par le point S, & terminées par les droites indéfinies $T'tn$, TtN, pour que la partie Nn, $N'n'$, &c, de ces droites, interceptée entre les droites $T'tn$, TtN, fût égale à une quantité donnée? La Géométrie a donc dû donner la ſolution du Problème, ſoit que les parties Nn, $N'n'$ fuſſent compriſes dans l'angle Ntn, ſoit qu'elles fuſſent compriſes dans l'angle NtT', ou dans l'angle ntT. La Géométrie réſout donc tous les cas, quoique l'Aſtronomie reſtreigne la queſtion au cas particulier où les parties Nn, $N'n'$ ſont compriſes dans l'angle Ntn; au reſte, on ne peut jamais être embarraſſé ſur le choix de ces valeurs. En effet, nous avons vu (§§. 74 & 75) que ſi l'on ſuppoſe Fig. 4.

$M = r\left(\frac{4\,t}{157846'\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}$, l'on a $R' + R'' - M = 0$; que de plus, $R' = \mp \frac{T' \text{ſin.} (B' - A')}{\text{ſin.} (B' - \zeta)}$, $R'' = \pm \frac{T'' \text{ſin.} (B'' - A'')}{\text{ſin.} (B'' - \zeta)}$.

Les valeurs de ζ qui ſatisfont au Problème aſtronomique, ſont donc celles qui, ſubſtituées dans les expreſſions corrélatives R' & de R'', donnent $R' + R'' = M$.

SECONDE PARTIE,

Dans laquelle l'on ne ſuppoſe pas que les orbites des Comètes ſont paraboliques.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

(78.) On peut étendre les principes développés dans ce Mémoire, au cas où l'on ne ſuppoſeroit pas que les orbites des Comètes ſont paraboliques; on verra que, ſans compliquer infiniment le calcul, il eſt aiſé d'appliquer aux obſervations, le calcul dans l'ellipſe, & de chercher par-là à concilier des obſervations qui ne s'accorderoient pas dans l'hypothèſe parabolique. Avant de paſſer au développement de la méthode, je commencerai par établir quelques propoſitions, dont je ferai uſage par la ſuite.

Équation polaire à l'ellipſe par rapport au foyer.

(79.) Soit

Fig. 5. β le demi-grand axe AC d'une ellipſe ;

F le foyer que je prends pour le pôle de l'ellipſe ;

C le centre ;

E la diſtance FC du foyer au centre de l'ellipſe ;

$4D$ le paramètre du grand axe ;

R le rayon vecteur FM ;

v l'angle du rayon vecteur avec le grand axe ; le point A correſpondant à l'apſide inférieure eſt l'origine de l'angle.

Si l'on prend une troiſième proportionnelle CD à FC & AC, cette troiſième proportionnelle, qui aura pour expreſſion $\frac{\beta^2}{E}$, ſera la diſtance DC de la directrice DE au centre C de l'ellipſe. Par la propriété de l'ellipſe, ſi d'un point M de la courbe l'on abaiſſe ſur la ligne DE la perpendiculaire MH, on a toujours cette proportion, $MH : FM :: AD : AF$. Si du même point M l'on abaiſſe ſur AF la perpendiculaire MN, on aura, en vertu des conſtructions précédentes, $FN = R \cos. v$; d'ailleurs, $AF = AC - FC = \beta - E$; $AD = DC - AC = \frac{\beta^2}{E} - \beta$; mais $MH = AF + AD - FN$; donc $MH = \beta - E + \frac{\beta^2}{E} - \beta - R \cos. v = \frac{\beta^2 - E^2 - ER \cos. v}{E}$; donc la proportion $MH : FM :: AD : AF$, donne $R(E \cos. v + \beta) - (\beta^2 - E^2) = 0$; mais $\frac{\beta^2 - E^2}{\beta} = 2D$, puiſque, par la propriété de l'ellipſe, $\sqrt{(\beta^2 - E^2)}$ = demi-petit axe, & que $4D$ eſt le paramètre du grand axe ; on aura donc

$$(1) \quad R\left(1 + \frac{E}{\beta} \cos. v\right) - 2D = 0.$$

(80.) Si l'on cherche pareillement la diſtance FA du

foyer à l'apſide inférieure, on aura, en vertu des conſtructions précédentes, Fig. 5.

$$(1)\ FA = \frac{2D}{1 + \frac{E}{\beta}},$$

puiſqu'en effet FA eſt le rayon vecteur qui répond à $\text{coſ.}\ v = 1$.

De l'équation polaire aux ſections coniques par rapport au foyer.

(81.) Si l'on cherche l'équation polaire à l'hyperbole par rapport au foyer, on trouvera les mêmes équations que pour l'ellipſe; on aura donc généralement

$$(1)\ R\left(1 + \frac{E}{\beta}\,\text{coſ.}\,v\right) - 2D = 0,$$

$$(2)\ FA = \frac{2\beta D}{\beta + E},$$

bien entendu que dans le cas de l'ellipſe, β ſurpaſſe E; dans le cas de la parabole, $\beta = E$; dans le cas de l'hyperbole, β eſt moindre que E.

Du temps que les Comètes emploient à décrire leurs trajectoires.

(82.) On ſait que dans toute trajectoire décrite en vertu d'une force centrale, les aires parcourues par le rayon vecteur ſont proportionnelles au temps employé à parcourir ces aires. Donc dans toute courbe, ſi l'on nomme

R le rayon vecteur,

v l'angle traverſé,

X le temps que nous ſuppoſerons exprimé en minutes,

X ſera proportionnel à $\int \frac{R^2 dv}{2}$, puiſque cette dernière expreſſion eſt celle de l'aire parcourue.

On démontre de plus, que si l'on nomme

ρ un coëfficient constant qu'il s'agira de déterminer,

$4D$ le paramètre de la trajectoire de la Planète attirée,

on aura, dans le cas de la force centrale en raison inverse du carté des distances,

$$(1)\ \rho X = \frac{1}{\sqrt{D}} \int \frac{R^2 dv}{2};$$

on connoîtra donc le nombre de minutes de temps employées par la Comète à parcourir ses différentes anomalies, lorsque l'on aura l'intégrale de $\frac{R^2 dv}{2}$, & que l'on connoîtra ρ.

(83.) Reprenons l'équation générale aux sections coniques, on aura, en différenciant cette équation,

$$(1)\ \frac{2DdR}{R} - \frac{E}{\beta} R \text{ sin. } v\, dv = 0.$$

De plus, à cause de l'équation (1) §. 81, & que d'ailleurs (§. 79) $\beta^2 - E^2 - 2\beta D = 0$, on aura

$$(2)\ \frac{E}{\beta} R \text{ sin. } v = 2\sqrt{D}\sqrt{(R - D - \frac{R^2}{2\beta})};$$

donc $$dv = \frac{DdR}{R\sqrt{D}\sqrt{(R - D - \frac{R^2}{2\beta})}}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (1) du §. 82, elle deviendra

$$(3)\ \rho X = \int \frac{RdR}{2\sqrt{(R - D - \frac{R^2}{2\beta})}};$$

donc, en intégrant,

$$(4)\ \rho X = \frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \text{ arc sin. } [\frac{R - \beta}{\sqrt{(B^2 - 2\beta D)}}] - \beta\sqrt{(R - D - \frac{R^2}{2\beta})} + \text{constante.}$$

Mais puisque $\beta^2 - E^2 - 2\beta D = 0$, $\sqrt{(\beta^2 - 2\beta D)} = E$; donc enfin

$$(5)\ \rho X = \frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \text{ arc sin. } (\frac{R - \beta}{E}) - \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \sqrt{(2\beta R - 2\beta D - R^2)} + \text{constante.}$$

Il ne s'agit que d'ajouter convenablement la conſtante.

(84.) Pour ajouter convenablement la conſtante, je remarque que ſi l'on veut que le temps X ſoit compté depuis le paſſage de la Comète par le périhélie, ce temps doit être nul lorſque le rayon vecteur eſt égal à la diſtance du foyer à l'apſide inférieure, c'eſt-à-dire, lorſque $R = \beta - E$; mais ſi dans l'équation (5) du *paragraphe précédent* l'on ſubſtitue $\beta - E$ à R, & que l'on ſuppoſe $X = 0$, l'on aura, à cauſe de $R = \beta - E$, & de $\beta^2 - 2\beta D - E^2 = 0$,

$$\frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \frac{\text{arc (ſin.} - 1)}{\text{ſin. total}} + \text{conſt.} = 0; \text{ donc conſt.} = \frac{-\beta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \frac{\text{arc } 270^d}{\text{ſin. total}};$$

donc

$$(1)\ \rho X = \frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\text{arc ſin.} \left[\left(\frac{R-\beta}{E} \right) \text{ſin. total} \right] - \text{arc } 270^d}{\text{ſin. total}} \right\} - \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \sqrt{(2\beta R - 2\beta D - R^2)}.$$

Je remarque enfin, que ſi l'on nomme

ξ un arc dont le ſinus égale $\frac{R-\beta}{E} \times$ ſin. total, & qui ait par conſéquent pour expreſſion de ſon coſinus, $\frac{\sqrt{(2\beta R - 2\beta D - R^2)}}{E} \times$ ſinus total,

l'équation précédente deviendra

$$(2)\ \rho X = \frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\text{arc } \xi - \text{arc } 270^d}{\text{ſin. total}} \right) - \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \frac{E \text{ coſ. } \xi}{\text{ſin. total}}.$$

(85.) Arrêtons-nous un moment ſur l'uſage de cette dernière équation, & ſuivons une Comète pendant une révolution.

Lors du périhélie, $R = \beta - E$; ſin. $\xi = -1$; $\xi = 270^d$, coſ. $\xi = 0$.

Depuis le périhélie juſqu'à l'extrémité du petit axe, l'arc ξ doit être compris entre 270^d & 360^d, ſon coſinus eſt poſitif.

A l'extrémité du petit axe, $R = \beta$; l'arc $\xi = 360^d$; ſon coſinus = ſin. total.

Depuis l'extrémité du petit axe juſqu'à l'aphélie, l'arc ξ eſt compris entre 360^d & $360^d + 90^d$; ſon coſinus eſt poſitif.

Lors de l'aphélie, l'arc ξ eſt de $360^d + 90^d$; ſon coſinus = o.

Depuis l'extrémité du grand axe juſqu'à l'extrémité du petit axe dans la ſeconde branche de la trajectoire, l'arc ξ eſt compris entre $360^d + 90^d$ & $360^d + 180^d$; ſon coſinus eſt négatif.

A l'extrémité du petit axe, l'arc ξ eſt de $360^d + 180^d$; ſon coſinus = — ſin. total.

Depuis l'extrémité du petit axe juſqu'au périhélie, l'arc ξ eſt compris entre $360^d + 180^d$ & $360^d + 270^d$; ſon coſinus eſt négatif.

Détermination du coëfficient ρ.

(86.) Les recherches précédentes fourniſſent un moyen facile d'évaluer la quantité ρ. En effet, appliquons l'équation (2) du §. 84 à la Terre; & nommons

r le demi-grand axe de l'orbite terreſtre.

Il eſt évident que ſi l'on ſuppoſe que la Terre ait fait une révolution entière depuis ſon périhélie, l'on aura $\rho X = \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \frac{\text{arc } 360^d}{\text{ſin. total}}$; mais la révolution ſidérale de la Terre eſt de $365^j\, 6^h\, 9'\, 11''$, ou de $525969'\frac{1}{6}$; donc

$$(1)\ \rho = \frac{2 \times 355}{113 \times 525969'\frac{1}{6}\sqrt{2}}\, r^{\frac{3}{2}}.$$

Si l'on ſubſtitue cette valeur dans l'équation (2) du §. 84, elle deviendra

$$(2)\ rX = \frac{113 \times 525969'\frac{1}{6}}{2 \times 355} \left[\frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\text{arc } \xi - \text{arc } 270^d}{\text{ſin. total}} \right) - \frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{3}{2}}} E \frac{\text{coſ. } \xi}{\text{ſin. total}} \right].$$

Au

(87.) Au moyen de la valeur de ρ du ʃ. *86*, combinée avec l'équation (1) du ʃ. *82*, on peut facilement déterminer le temps qu'une Comète dont la diſtance périhélie eſt égale à la moyenne diſtance du Soleil à la Terre, emploie à parcourir 90 degrés d'anomalie. Nous avons dit *(ʃ. 7)* que ce temps égale $109^j\ 14^h\ 46'\frac{1}{3}$, ou $157846'\frac{1}{3}$; en voici la démonſtration.

Si l'on ſubſtitue dans l'équation (1) du ʃ. *82*, la valeur de ρ du *paragraphe précédent,* elle deviendra

$$(1)\quad \frac{2 \times 355\ r^{\frac{3}{2}}}{113 \times 525969'\frac{1}{6}\sqrt{2}}\ X = \frac{1}{\sqrt{D}}\int\frac{R^2 dv}{2}.$$

Nous avons vu *(ʃ. 5)* que, relativement à la parabole,

$$\int\frac{R^2 dv}{2} = \tfrac{1}{3}D^{\frac{1}{2}}(R + 2D)\sqrt{(R - D)};$$

l'équation (1) devient donc

$$(2)\quad \frac{2 \times 355 \times r^{\frac{3}{2}}}{113 \times 525969'\frac{1}{6}\sqrt{2}}\ X = \tfrac{1}{3}(R + 2D)\sqrt{(R - D)}.$$

Si donc l'on ſuppoſe $D = r$, $R = 2r$, puiſque, par l'hypothèſe, la diſtance périhélie eſt égale à la moyenne diſtance du Soleil à la Terre, & que d'ailleurs le rayon vecteur eſt double de la diſtance périhélie, lorſque l'anomalie eſt de 90 degrés; l'on aura, pour expreſſion du temps employé par la Comète à parcourir 90 degrés d'anomalie,

$$X = \frac{2\sqrt{2} \times 113 \times 525969'\frac{1}{6}}{3 \times 355} = 157846'\tfrac{1}{3}.$$

De la relation entre l'anomalie moyenne & l'anomalie vraie.

(88.) L'équation (2) du ʃ. *86*, peut ſervir à convertir l'anomalie vraie en anomalie moyenne, & réciproquement; ou ſi l'on veut, étant donné l'angle v du rayon vecteur avec le grand axe, compté depuis le périhélie, elle peut faire connoître le temps écoulé depuis le paſſage de la Planète par le périhélie; & réciproquement. En effet, à cauſe de l'équation

$$(1)\quad R\left(1 + \frac{E}{\beta}\operatorname{coſ.} v\right) - 2D = 0;$$

étant donné l'angle v on conclura tout de suite la valeur de R; & par conséquent la valeur de l'arc ξ, au moyen de l'équation

$$(2)\ \text{sin.}\ \xi = \frac{R-\beta}{E}\ \text{sin. total.}$$

On connoîtra donc le temps écoulé depuis le périhélie, au moyen de l'équation (2) du *§. 86.*

Si au contraire le temps étoit donné, il faudroit conclure d'abord l'arc ξ, au moyen de l'équation (2) du *§. 86*, qui à la vérité est transcendante, mais qui se résout facilement par les Tables des sinus. On concluroit ensuite la valeur de R par l'équation (2) du *présent paragraphe ;* & enfin l'angle v du rayon vecteur avec le grand axe, compté depuis le périhélie, par l'équation (1) du même paragraphe.

Du temps employé par la Comète à parcourir les différens arcs de sa trajectoire.

(89.) Il est facile maintenant de connoître le temps employé par la Comète à parcourir les différens arcs de sa trajectoire. Soit en effet

R' le rayon vecteur correspondant au commencement de l'arc;

R'' le rayon vecteur correspondant à la fin de l'arc;

ξ' l'arc dont le sinus $= \frac{R'-\beta}{E}$ sin. total, & dont le

$$\text{cos.} = \frac{\sqrt{(2\beta R' - 2\beta D - R'^2)}\ \text{sin. total}}{E};$$

ξ'' l'arc dont le sinus $= \frac{R''-\beta}{E}$ sin. total, & dont le

$$\text{cos.} = \frac{\sqrt{(2\beta R'' - 2\beta D - R''^2)}\ \text{sin. total}}{E};$$

t le nombre de minutes de temps employées à parcourir l'arc de la trajectoire, compris entre les rayons vecteurs R'', R';

l'on aura évidemment

$$(1)\ rt = \frac{113 \times 525969'\frac{1}{6}}{2 \times 355}\left[\frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\text{arc}\ \xi'' - \text{arc}\ \xi'}{\text{sin. total}}\right) - \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}E\left(\frac{\text{cos.}\ \xi'' - \text{cos.}\ \xi'}{\text{sin. total}}\right)\right]$$

Dans l'uſage de cette formule, l'arc ξ'' doit être toujours plus grand que l'arc ξ'. Il faut d'ailleurs appliquer à chacun de ces arcs les remarques du *§. 85*.

De la relation entre la différentielle du temps écoulé entre deux obſervations & les variations des élémens de l'ellipſe.

(90.) Il peut être intéreſſant de connoître la relation entre la différentielle du temps écoulé entre deux obſervations & les variations des élémens de l'ellipſe. Pour réſoudre cette queſtion, je nommerai

dt la différentielle du temps;

dR', dR'', dD, $d\beta$, les variations des rayons vecteurs & des élémens de la trajectoire elliptique.

Je remarque d'abord, qu'à cauſe de $\beta^2 - 2\beta D - E^2 = 0$, l'on a $(\beta - D)\,d\beta - \beta\,dD - E\,dE = 0$. J'obſerve enſuite que ſi l'on différencie l'équation (1) du *§. 89*, l'on aura

$$(1)\; r\,dt = \frac{113 \times 525969'\tfrac{1}{6}}{2 \times 355}\left\{\left[\tfrac{3}{2}\frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}(\text{arc}\,\xi'' - \text{arc}\,\xi') - \tfrac{1}{2}\frac{E}{\beta^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}}(\text{coſ.}\,\xi'' - \text{coſ.}\,\xi)\right]d\beta\right.$$

$$\left. + \frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}(d\,\text{arc}\,\xi'' - d\,\text{arc}\,\xi') - \frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}(dE\,\text{coſ.}\,\xi'' - dE\,\text{coſ.}\,\xi')\right\}.$$

Mais

$$d\,E\,\text{coſ.}\,\xi' = \frac{(R' - D)}{E\,\text{coſ.}\,\xi'}\,d\beta + \frac{(\beta - R')}{E\,\text{coſ.}\,\xi'}\,dR' - \frac{\beta\,dD}{E\,\text{coſ.}\,\xi'};$$

$$d\,E\,\text{coſ.}\,\xi'' = \frac{(R'' - D)}{E\,\text{coſ.}\,\xi''}\,d\beta + \frac{(\beta - R'')}{E\,\text{coſ.}\,\xi''}\,dR'' - \frac{\beta\,dD}{E\,\text{coſ.}\,\xi''};$$

$$d\,\text{arc}\,\xi' = \frac{dR'}{E\,\text{coſ.}\,\xi'} + \frac{[R'D - \beta(R' - D)]}{E^3\,\text{coſ.}\,\xi'}\,d\beta + \frac{(R' - \beta)\beta}{E^3\,\text{coſ.}\,\xi'}\,dD;$$

$$d\,\text{arc}\,\xi'' = \frac{dR''}{E\,\text{coſ.}\,\xi''} + \frac{[R''D - \beta(R'' - D)]}{E^3\,\text{coſ.}\,\xi''}\,d\beta + \frac{(R'' - \beta)\beta}{E^3\,\text{coſ.}\,\xi''}\,dD.$$

Soit donc

$$a' = -\frac{113 \times 525969' \frac{1}{6}}{2 \times 355} \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \frac{R'}{E \operatorname{cof.} \xi'};$$

$$a'' = +\frac{113 \times 525969' \frac{1}{6}}{2 \times 355} \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \frac{R''}{E \operatorname{cof.} \xi''};$$

$$b = +\frac{113 \times 525969' \frac{1}{6}}{2 \times 355} \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \times \frac{\beta^2}{E^3} \left[\frac{(R''-2D)}{\operatorname{cof.} \xi''} - \frac{(R'-2D)}{\operatorname{cof.} \xi'}\right];$$

$$\epsilon = +\frac{113 \times 525969' \frac{1}{6}}{2 \times 355} \left\{\left[\frac{3}{2} \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} (\operatorname{arc} \xi'' - \operatorname{arc} \xi') - \frac{1}{2} \frac{E}{\beta^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}}} (\operatorname{cof.} \xi'' - \operatorname{cof.} \xi')\right]\right.$$

$$\left. + \frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{(3R''+2\beta-2D)D-2\beta R''}{E^3 \operatorname{cof.} \xi''} - \frac{(3R'+2\beta-2D)D-2\beta R'}{E^3 \operatorname{cof.} \xi'}\right]\right\}$$

l'on aura

$$(2) \quad a'dR' + a''dR'' + bdD + \epsilon d\beta - r dt = 0.$$

Il faut appliquer à cette formule les remarques du *§. 85.*

Remarque sur un usage de l'équation (1) du §. 89, *lorsque la trajectoire de la Comète est très-alongée.*

(91). Je ne puis m'empêcher de présenter une remarque sur un usage de l'équation du *§. 89*, lorsque le grand axe de l'orbite de la Comète est très-grand, & que par conséquent la trajectoire diffère peu de la parabole dans la portion que l'on calcule. Dans ce cas, cette équation donne d'une manière approchée la valeur du grand axe de la section, lorsque l'on emploie des Observations faites de part & d'autre du périhélie. En effet, reprenons l'équation, & supposons $E = \beta$, ce qui est sensiblement vrai, nous aurons

$$(1) \quad t = \frac{113 \times 525969' \frac{1}{6}}{2 \times 355} \frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\operatorname{arc} \xi'' - \operatorname{arc} \xi' - \operatorname{cof.} \xi'' + \operatorname{cof.} \xi'}{\operatorname{fin.\ total}}\right).$$

Si l'on différencie cette équation, l'on aura

$$(2)\ dt = \frac{113 \times 525969' \frac{1}{7}}{2 \times 355} \left[\frac{2}{3} \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\text{arc}\ \xi'' - \text{arc}\ \xi' - \text{cof.}\ \xi'' + \text{cof.}\ \xi'}{\text{fin. total}} \right) d\beta \right.$$

$$\left. + \frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{d\,\text{arc}\ \xi'' - d\ \text{arc}\ \xi' + \frac{\text{fin.}\ \xi''\ d\,\text{arc}\ \xi'' - \text{fin.}\ \xi'\ d\,\text{arc}\ \xi'}{\text{fin. total}}}{\text{fin. total}} \right) \right];$$

Mais dans la fuppofition que nous calculons, les arcs ξ', ξ'' diffèrent peu de 270^d; bien entendu *(§. 85)* que ξ' eft un peu moindre que 270^d, & que ξ'' eft un peu plus grand que 270^d. Or, dans ces deux cas, les cofinus de ξ' & de ξ'' ont un figne différent, & les finus de ξ' & de ξ'' au contraire font tous deux négatifs & très-près d'être égaux au finus total. Donc la variation de t, dûe à la variation des arcs ξ', ξ'', fe détruit, pour ainfi dire, ou du moins eft infiniment petite par rapport à celle qui réfulte de la variation du grand axe β. L'équation (1) eft donc prefque indépendante des valeurs des arcs ξ', ξ''; cette équation eft donc propre à faire connoître d'une manière approchée la valeur du grand axe de la fection.

(92.) La folution précédente fuppofe que les obfervations que l'on compare, ont été faites de part & d'autre du périhélie; & l'analyfe feroit moins concluante, fi les obfervations avoient été faites du même côté du périhélie. Voici maintenant une équation que l'on peut employer dans ce dernier cas, & qui ne réuffiroit pas dans le premier, attendu que la conftante que l'on feroit alors obligé d'ajouter, feroit reparoître le grand axe de la fection fous une forme embarraffante.

Je remarque, d'après l'analyfe du *§. 83*, que l'équation (1) du *§. 89*, peut être mife fous la forme fuivante,

$$(1)\ \rho t = \int \frac{R''\,dR''}{2\sqrt{(R'' - D - \frac{R''^2}{2\beta})}} - \int \frac{R'\,dR'}{2\sqrt{(R' - D - \frac{R'^2}{2\beta})}}.$$

Les orbites des Comètes étant des ellipfes très-alongées, la fraction $\frac{1}{\beta}$ eft néceffairement très-petite; on peut donc

négliger ſon carré & ſes puiſſances ſupérieures. Si l'on développe l'équation (1), d'après ces principes, l'on aura

$$(2)\ \rho t = \int \frac{R'' dR''}{2\sqrt{(R''-D)}} - \frac{1}{8\beta}\int \frac{R''^3 dR''}{(R''-D)^{\frac{1}{2}}} - \int \frac{R' dR'}{2\sqrt{(R'-D)}} + \frac{1}{8\beta}\int \frac{R'^3 dR'}{(R'-D)^{\frac{1}{2}}};$$

donc, en intégrant,

$$(3)\ \rho t = \frac{(R''-D)^{\frac{1}{2}}(R''+2D)}{3} - \frac{(R'-D)^{\frac{1}{2}}(R'+2D)}{3} + \frac{1}{8\beta}\left[\frac{\frac{2}{5}(R'-D)^3 + 2D(R'-D)^2 + 6D^2(R'-D) - 2D^3}{\sqrt{(R'-D)}}\right] - \frac{1}{8}\beta\left[\frac{\frac{2}{5}(R''-D)^3 + 2D(R''-D)^2 + 6D^2(R''-D) - 2D^3}{\sqrt{(R''-D)}}\right],$$

& il n'y a point de conſtante à ajouter dans le cas que nous conſidérons, puiſque $t = 0$ lorſque $R'' = R'$. Suppoſons donc, qu'en ſubſtituant pour D, R', R'', leurs valeurs tirées d'une parabole très-approchée, & qu'en faiſant $\frac{1}{\beta} = 0$, l'équation précédente ne ſoit pas exactement ſatisfaite, de ſorte que l'on ait, par exemple,

$$(4)\ \frac{(R''-D)^{\frac{1}{2}}(R''+2D)}{3} - \frac{(R'-D)^{\frac{1}{2}}(R'+2D)}{3} = \rho\tau,$$

l'on ſubſtituera cette valeur dans l'équation (3), & elle deviendra

$$(5)\ \rho(t-\tau) - \frac{1}{8}\beta\left[\frac{\frac{2}{5}(R'-D)^3 + 2D(R'-D)^2 + 6D^2(R'-D) - 2D^3}{\sqrt{(R'-D)}}\right] + \frac{1}{8}\beta\left[\frac{\frac{2}{5}(R''-D)^3 + 2D(R''-D)^2 + 6D^2(R''-D) - 2D^3}{\sqrt{(R''-D)}}\right] = 0,$$

ce qui donnera une approximation de la valeur de β.

De l'expreſſion de la corde dans la trajectoire elliptique.

(93.) Nous avons donné *(§. 18)* l'expreſſion de la corde de la parabole compriſe entre deux rayons vecteurs

R', R'', en valeurs de ces rayons vecteurs & de la distance périhélie; nous devons maintenant faire voir ce que devient cette expression dans le cas de l'orbite elliptique.

Pour y parvenir, nommons

R', R'', les rayons vecteurs qui comprennent la corde dont il s'agit,

N l'angle compris entre ces rayons vecteurs,

v', v'', les anomalies correspondantes aux rayons vecteurs R', R'',

c la corde,

ξ' l'arc dont le sinus $= \frac{R' - \beta}{E}$ sinus total, & dont le

cosinus $= \frac{\sqrt{(2\beta R' - 2\beta D - R'^2)}}{E}$ sin. total,

ξ'' l'arc dont le sinus $= \frac{R'' - \beta}{E}$ sinus total, & dont le

cosinus $= \frac{\sqrt{(2\beta R'' - 2\beta D - R''^2)}}{E}$ sin. total.

Je remarque d'abord (§. 10) que l'on a

$$(1)\ c^2 = R'^2 + R''^2 - 2 R' R'' \text{cos}. N.$$

De plus,

$$(2)\ N = v'' - v';$$

donc

$$R' R'' \text{cos}. N = R' R'' \text{cos}. v'' \text{cos}. v' + R' R'' \text{sin}. v'' \text{sin}. v'.$$

Mais, en vertu de l'équation générale aux sections coniques (§. 81) & de l'équation (2) du §. 83,

$$R' R'' \text{cos}. v'' \text{cos}. v' = \frac{\beta^2}{E^2} [4 D^2 - 2 D (R' + R'') + R' R''];$$

$$R' R'' \text{sin}. v' \text{sin}. v'' = \frac{2 \beta D}{E^2} \sqrt{(2\beta R' - 2\beta D - R'^2)}$$

$$\sqrt{(2\beta R'' - 2\beta D - R''^2)} = 2\beta D \frac{\text{cos}. \xi' \text{cos}. \xi''}{\text{sin}.^2 \text{total}};\ \text{donc}$$

$$(3)\ c^2 = R'^2 + R''^2 - \frac{2\beta^2}{E^2} [4D^2 - 2D(R' + R'') + R' R''] - 4\beta D \frac{\text{cos}. \xi' \text{cos}. \xi''}{\text{sin}.^2 \text{total}}.$$

Si l'on compare cette valeur de c^2 avec celle du §. 15, que l'on conserve toutes les définitions de T', T'', A', A'',

Δ', Δ'', L', L'', B', B'', du *même paragraphe*, que l'on continue de ſuppoſer le ſinus total $= 1$, on aura la relation ſuivante entre les élémens de l'ellipſe, & les obſervations priſes deux à deux,

$$(4)\quad \frac{\beta^2}{E^2}\,[4D^2 - 2D(R' + R'') + R'R''] + 2\beta D \,\text{coſ.}\,\xi' \,\text{coſ.}\,\xi'' - T'T''\,\text{coſ.}\,(A'' - A') + T'\Delta''\,\text{coſ.}\,L''\,\text{coſ.}\,(B'' - A') + T''\Delta'\,\text{coſ.}\,L'\,\text{coſ.}\,(B' - A'') - \Delta'\Delta''\,[\text{coſ.}\,L'\,\text{coſ.}\,L''\,\text{coſ.}\,(B'' - B') + \text{ſin.}\,L'\,\text{ſin.}\,L''] = 0.$$

Dans ces formules, l'on doit appliquer aux arcs ξ', ξ'' & aux ſignes de leurs coſinus, les remarques du *§. 85*.

(94.) Je remarque d'abord que l'équation (4) du *paragraphe précédent* peut être miſe ſous la forme ſuivante,

$$(1)\quad \frac{\beta^2}{E^2}\,[4D^2 - 2D(R' + R'') + R'R'' + \frac{2D}{\beta}E^2\,\text{coſ.}\,\xi'\,\text{coſ.}\,\xi''] - T'T''\,\text{coſ.}\,(A'' - A') + T'\Delta''\,\text{coſ.}\,(B'' - A') + T''\Delta'\,\text{coſ.}\,L'\,\text{coſ.}\,(B' - A'') - \Delta'\Delta''\,[\text{coſ.}\,L'\,\text{coſ.}\,L''\,\text{coſ.}\,(B'' - B') + \text{ſin.}\,L'\,\text{ſin.}\,L''] = 0.$$

De plus, ſi l'on ſuppoſe, comme dans le *§. 39*,

$$m' = \Delta' - T'\,\text{coſ.}\,L'\,\text{coſ.}\,(B' - A'),$$
$$m'' = \Delta'' - T''\,\text{coſ.}\,L''\,\text{coſ.}\,(B'' - A''),$$

l'on a $R'dR' - m'd\Delta' = 0$; $R''dR'' - m''d\Delta'' = 0$. Enfin, à cauſe de $\beta^2 - 2\beta D - E^2 = 0$, & de $(\beta - D)\,d\beta - \beta dD - EdE = 0$, l'on a

$$d\,\frac{\beta^2}{E^2} = \frac{2\beta^3}{E^4}\,dD - \frac{2\beta^2 D}{E^4}\,d\beta;$$

d'ailleurs

$$d\,E\,\text{coſ.}\,\xi' = \frac{(R' - D)\,d\beta}{E\,\text{coſ.}\,\xi'} + \frac{(\beta - R')\,dR'}{E\,\text{coſ.}\,\xi'} - \frac{\beta\,dD}{E\,\text{coſ.}\,\xi'};$$

$$d\,E\,\text{coſ.}\,\xi'' = \frac{(R'' - D)\,d\beta}{E\,\text{coſ.}\,\xi''} + \frac{(\beta - R'')\,dR''}{E\,\text{coſ.}\,\xi''} - \frac{\beta\,dD}{E\,\text{coſ.}\,\xi''}.$$

Si

Si donc l'on ſuppoſe

$$f = + \frac{\beta^2}{E^2} \left[R'' - 2D + \frac{2D}{\beta} (\beta - R') \frac{\text{coſ.}\,\xi''}{\text{coſ.}\,\xi'} \right]$$
$$+ \frac{R'}{m'} \{ T'' \,\text{coſ.}\, L' \,\text{coſ.}\, (B' - A'')$$
$$- \Delta'' [\,\text{coſ.}\, L' \,\text{coſ.}\, L'' \,\text{coſ.}\, (B'' - B')$$
$$+ \text{ſin.}\, L' \,\text{ſin.}\, L''] \},$$

$$g = + \frac{\beta^2}{E^2} \left[R' - 2D + \frac{2D}{\beta} (\beta - R'') \frac{\text{coſ.}\,\xi'}{\text{coſ.}\,\xi''} \right]$$
$$+ \frac{R''}{m''} \{ T' \,\text{coſ.}\, L'' \,\text{coſ.}\, (B'' - A')$$
$$- \Delta' [\,\text{coſ.}\, L' \,\text{coſ.}\, L'' \,\text{coſ.}\, (B'' - B')$$
$$+ \text{ſin.}\, L' \,\text{ſin.}\, L''] \},$$

$$h = + \frac{2\beta^3}{E^4} [4D^2 - 2D(R' + R'') + R' R'']$$
$$+ \frac{\beta^2}{E^2} [8D - 2(R' + R'') + 2\beta \,\text{coſ.}\,\xi' \,\text{coſ.}\,\xi''$$
$$- 2D\left(\frac{\text{coſ.}\,\xi'}{\text{coſ.}\,\xi''} + \frac{\text{coſ.}\,\xi''}{\text{coſ.}\,\xi'}\right)],$$

$$l = - \frac{2\beta^2 D}{E^4} [4D^2 - 2D(R' + R'') + R' R'']$$
$$+ \frac{\beta^2}{E^2} \{ - 2D \,\text{coſ.}\,\xi' \,\text{coſ.}\,\xi''$$
$$+ \frac{2D}{\beta} \left[(R' - D) \frac{\text{coſ.}\,\xi''}{\text{coſ.}\,\xi'} + (R'' - D) \frac{\text{coſ.}\,\xi'}{\text{coſ.}\,\xi''} \right] \};$$

l'on aura

$$(2)\quad f\,dR' + g\,dR'' + h\,dD + l\,d\beta = 0.$$

Il n'eſt pas néceſſaire que l'équation (1) ſoit rigoureuſement ſatisfaite par la ſubſtitution des différentes valeurs de β, E, D, R', R'', &c. pour que l'on puiſſe employer une équation de la forme précédente; & ſi l'on nomme

λ ce que devient l'équation (1) par la ſubſtitution des valeurs ci-deſſus,

l'on aura

$$(3)\quad f\,dR' + g\,dR'' + h\,dD + l\,d\beta - \lambda = 0.$$

Du Calcul des trajectoires des Comètes, en supposant leurs orbites elliptiques.

(95.) Je vais faire voir maintenant comme on peut calculer les orbites des Comètes, en les supposant elliptiques. Il est superflu d'avertir que l'on ne doit entreprendre ce calcul que quand l'hypothèse parabolique se refuse d'une manière sensible à représenter les observations; car s'il n'y avoit que quelques légères différences entre les observations & les résultats, difficilement pourroit-on se flatter de recueillir un fruit bien satisfaisant d'un travail très-pénible Au reste, ce que je vais exposer, est l'analyse rigoureuse de la détermination des orbites des Planètes; & sous ce point de vue, mon travail peut mériter quelqu'attention.

Dans ces recherches, je nommerai

Δ', Δ'', Δ''', Δ'''', &c. les distances de la Comète à la Terre;
R', R'', R''', R'''', &c. les rayons vecteurs;
B', B'', B''', B'''', &c. les longitudes géocentriques de la Comète;
A', A'', A''', A'''', &c. les longitudes du Soleil;
L', L'', L''', L'''', &c. les latitudes géocentriques de la Comète;
v', v'', v''', v'''', &c. les anomalies de la Comète;
N l'angle compris sur le plan de l'orbite de la Comète entre les rayons vecteurs R', R'';
N' l'angle compris entre les rayons vecteurs R', R''';
N'' l'angle compris entre les rayons vecteurs R', R'''';

& ainsi de suite. Je supposerai donc que l'on a les équations suivantes,

$$(1)\quad v'' = v' + N,$$
$$(2)\quad v''' = v' + N',$$
$$(3)\quad v'''' = v' + N'',$$

& ainsi de suite.

Je supposerai que l'on connoît trois distances de la Comète à la Terre; ou du moins deux distances correspondantes à deux bonnes observations, & que l'on combine ces deux observations avec une troisième, également exacte. En effet

cette dernière condition équivaut à la connoiſſance de trois diſtances de la Comète à la Terre; puiſque la troiſième diſtance ſe conclut des deux premières, au moyen de l'équation (1) du *§. 26.* Je propoſerai, *§. 106 & ſuiv.* quelques vues ſur les méthodes qui doivent être employées de préférence, pour connoître ces diſtances.

Lorſque l'on connoîtra les trois diſtances de la Comète à la Terre, on conclura facilement les rayons vecteurs, au moyen des équations du *§. 39.* On conclura les différens angles N, N', N'', au moyen des équations des *§§. 16 & 17;* on déterminera enfin le lieu du nœud aſcendant & l'inclinaiſon de l'orbite, par les équations du *§. 21.* Nous pouvons donc ſuppoſer toutes ces quantités connues.

(96.) Si l'on combine trois obſervations, il eſt évident que l'on aura les équations ſuivantes,

$$(1)\ R'\left(1 + \frac{E}{\beta}\operatorname{cof.} v'\right) - 2D = 0,$$

$$(2)\ R''\left(1 + \frac{E}{\beta}\operatorname{cof.} v''\right) - 2D = 0,$$

$$(3)\ R'''\left(1 + \frac{E}{\beta}\operatorname{cof.} v'''\right) - 2D = 0.$$

De ces équations, l'on tire

$$(4)\ R'\left(\frac{\beta}{E} + \operatorname{cof.} v'\right) - R''\left(\frac{\beta}{E} + \operatorname{cof.} v''\right) = 0,$$

$$(5)\ R'\left(\frac{\beta}{E} + \operatorname{cof.} v'\right) - R'''\left(\frac{\beta}{E} + \operatorname{cof.} v'''\right) = 0;$$

& de ces deux dernières, l'on conclura

$$(6)\ (R''' - R'')\,R'\operatorname{cof.} v' - (R''' - R')\,R''\operatorname{cof.} v'' + (R'' - R')\,R'''\operatorname{cof.} v''' = 0;$$

donc enfin, puiſque $\operatorname{cof.} v'' = \operatorname{cof.} v' \operatorname{cof.} N - \operatorname{fin.} v' \operatorname{fin.} N$, $\operatorname{cof.} v''' = \operatorname{cof.} v' \operatorname{cof.} N' - \operatorname{fin.} v' \operatorname{fin.} N'$,

$$(7)\ [(R''' - R')\,R''\operatorname{fin.} N - (R'' - R')\,R'''\operatorname{fin.} N']\operatorname{tang.} v'$$
$$+ (R''' - R'')\,R' - (R''' - R')\,R''\operatorname{cof.} N + (R'' - R')\,R'''\operatorname{cof.} N' = 0.$$

(97.) Si l'on combinoit un plus grand nombre d'obſervations, l'on auroit par une analyſe ſemblable,

$$(1)\ R''''\left(1 + \frac{E}{\beta}\,\text{cof.}\,v''''\right) - 2\,D = 0,$$

$$(2)\ R'''''\left(1 + \frac{E}{\beta}\,\text{cof.}\,v'''''\right) - 2\,D = 0,$$

$$(3)\ R'\left(\frac{\beta}{E} + \text{cof.}\,v'\right) - R''''\left(\frac{\beta}{E} + \text{cof.}\,v''''\right) = 0;$$

$$(4)\ R'\left(\frac{\beta}{E} + \text{cof.}\,v'\right) - R'''''\left(\frac{\beta}{E} + \text{cof.}\,v'''''\right) = 0,$$

$$(5)\ (R'''' - R'')\,R'\,\text{cof.}\,v' - (R'''' - R')\,R''\,\text{cof.}\,v'' + (R'' - R')\,R''''\,\text{cof.}\,v'''' = 0,$$

$$(6)\ (R''''' - R'')\,R'\,\text{cof.}\,v' - (R''''' - R')\,R''\,\text{cof.}\,v'' + (R'' - R')\,R'''''\,\text{cof.}\,v''''' = 0,$$

$$(7)\ [(R'''' - R')\,R''\,\text{fin.}\,N - (R'' - R')\,R''''\,\text{fin.}\,N'']\,\text{tang.}\,v'$$
$$+ (R'''' - R'')\,R' - (R'''' - R')\,R''\,\text{cof.}\,N + (R'' - R')\,R''''\,\text{cof.}\,N'' = 0,$$

$$(8)\ [(R''''' - R')\,R''\,\text{fin.}\,N - (R'' - R')\,R'''''\,\text{fin.}\,N''']\,\text{tang.}\,v'$$
$$+ (R''''' - R'')\,R' - (R''''' - R')\,R''\,\text{cof.}\,N + (R'' - R')\,R'''''\,\text{cof.}\,N''' = 0,$$

& ainfi de fuite.

(98.) Au moyen de l'équation (7) du *§. 96*, l'on déterminera v'; l'on conclura v'' & v''' au moyen des équations (1) & (2) du *§. 95;* l'on conclura $\frac{\beta}{E}$, au moyen de l'équation (4) du *§. 96; D* au moyen de l'équation (1) du *même paragraphe;* & *E* au moyen de l'équation

$$(1)\ \beta^2 - 2\,\beta\,D - E^2 = 0,$$

dans laquelle la valeur abfolue de *D* & le rapport de β à *E* font donnés. Nous remarquerons que

β eft le demi-grand axe de la trajectoire;

E eft la diftance du foyer au centre de la trajectoire;

$\sqrt{2\,\beta\,D}$ eft le demi-petit axe.

Quant à la diftance périhélie, elle n'eft point égale à *D*, comme dans la parabole, mais on a

$$(2)\ \text{diftance périhélie} = \beta - E.$$

(99.) La détermination des autres élémens de l'orbite ne préfente aucune difficulté; l'équation (2) du *§. 84* fera

connoître l'inſtant du paſſage par le périhélie; & ſi l'on nomme, comme dans le *§. 48*,

u' l'angle du rayon vecteur de la Comète avec la ligne des nœuds lors de la première obſervation; cet angle eſt compté ſur le plan de la Comète, en partant du nœud aſcendant, & en ſuivant le ſens du mouvement de cet Aſtre dans ſon orbite,

Ω la diſtance du périhélie de la Comète au nœud aſcendant; cet angle eſt compté ſur le plan de l'orbite, en ſuivant le ſens du mouvement de la Comète,

on aura *(§. 48)*

$$(1)\ \text{tang.}\, u' = \frac{R''\,\Delta'\,\text{ſin.}\,L'\,\text{ſin.}\,N}{R'\,\Delta''\,\text{ſin.}\,L'' - R''\,\Delta'\,\text{ſin.}\,L'\,\text{coſ.}\,N},$$

$$(2)\ u' - \Omega - v' = 0.$$

Remarque ſur les ſolutions précédentes.

(100.) Si l'on connoiſſoit d'avance le temps de la révolution de l'Aſtre dont on cherche la trajectoire, on concluroit facilement le grand axe de cette trajectoire; puiſque, dans le cas de la force centrale, en raiſon inverſe du carré des diſtances, les cubes des grands axes ſont comme les carrés des temps périodiques. Comme cette circonſtance apporte une ſimplification dans les calculs, nous allons nous en occuper.

Nous avons vu *(§. 96)* que l'on a les équations ſuivantes,

$$(1)\ R'\left(1 + \frac{E}{\beta}\,\text{coſ.}\,v'\right) - 2D = 0,$$

$$(2)\ R'\left(\frac{\beta}{E} + \text{coſ.}\,v'\right) - R''\left(\frac{\beta}{E} + \text{coſ.}\,v''\right) = 0;$$

d'ailleurs

$$(3)\ \beta^2 - 2\beta D - E^2 = 0,$$

$$(4)\ v'' = v' + N,$$

& par conſéquent $\text{coſ.}\,v'' = \text{coſ.}\,v'\,\text{coſ.}\,N - \text{ſin.}\,v'\,\text{ſin.}\,N.$ De ces équations, l'on tire

$$(5)\quad (R' - R'')^2 \beta + [(R'' \operatorname{cof.} N - R') \operatorname{cof.} v' - R'' \operatorname{fin.} N \operatorname{fin.} v']^2 (R' - \beta) + R'(R' - R'') \operatorname{cof.} v' [(R'' \operatorname{cof.} N - R') \operatorname{cof.} v' - R'' \operatorname{fin.} N \operatorname{fin.} v'] = 0;$$

on n'aura donc beſoin que de deux obſervations pour déterminer l'anomalie correſpondante à la première obſervation; l'on déterminera enſuite v'' au moyen de l'équation (4), E au moyen de l'équation (2), & enfin D au moyen de l'équation (3).

(101.) Les mêmes recherches ſont voir que, pour déterminer l'orbite elliptique d'une Comète, par des équations purement algébriques, il eſt néceſſaire d'avoir cinq obſervations. Aſtronomiquement parlant, ce nombre d'obſervations n'eſt point néceſſaire, & la queſtion peut être réſolue avec trois obſervations; mais alors il faut avoir recours aux équations entre le temps & les élémens de l'ellipſe, équations qui ſont tranſcendantes. On peut au contraire réſoudre algébriquement le Problème par cinq obſervations. En effet, ſi l'on compare l'équation (7) du *ſ. 96*, avec les équations (7) & (8) du *ſ. 97*, il en réſultera deux équations entre R', R'', R''', R'''', R''''', N, N', N'', N''', N''''; mais au moyen des équations des *ſſ. 16* & *17*, il eſt évident que l'on peut éliminer fin. N, fin. N', fin. N'', fin. N''', fin. N'''', cof. N, cof. N', cof. N'', cof. N''', cof. N''''; l'on aura donc alors deux équations entre Δ', Δ'', Δ''', Δ'''', Δ'''''; & comme le *ſ. 24* fournit encore trois autres équations entre Δ', Δ'', Δ''', Δ'''', Δ''''', & que l'on ne peut en tirer d'ailleurs, il faut cinq obſervations pour déterminer algébriquement l'orbite elliptique d'une Comète.

Détermination des véritables élémens de la Comète.

(102.) Nous connoiſſons maintenant, à très-peu-près, les véritables élémens de l'orbite de la Comète, & nous voulons nous aſſurer ſi ces ſuppoſitions ſont rigoureuſes.

Pour y parvenir, conſervons toutes les définitions précédentes, & nommons

t le nombre de minutes de temps écoulées réellement entre la première & la seconde observation;

ϑ le nombre de minutes de temps écoulées entre la première & la troisième observation;

$\left.\begin{matrix}\tau\\ \tau'\end{matrix}\right\}$ le nombre de minutes de temps que l'on conclut des équations suivantes;

$$(1)\ \tau = \frac{113 \times 525969'\frac{1}{2}}{2 \times 355} \left[\frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\text{arc}\,\xi'' - \text{arc}\,\xi'}{\text{sin. total}}\right) - \frac{\beta^{\frac{1}{2}} E}{r^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\text{cos}.\,\xi'' - \text{cos}.\,\xi'}{\text{sin. total}}\right)\right];$$

$$(2)\ \tau' = \frac{113 \times 525969'\frac{1}{2}}{2 \times 355} \left[\frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\text{arc}\,\xi''' - \text{arc}\,\xi'}{\text{sin. total}}\right) - \frac{\beta^{\frac{1}{2}} E}{r^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\text{cos}.\,\xi''' - \text{cos}.\,\xi'}{\text{sin. total}}\right)\right].$$

Il est évident que les élémens ne seront rigoureux qu'autant que l'on aura $\tau = t$, $\tau' = \vartheta$. Dans tout autre cas, les élémens ne seront qu'approchés.

Maintenant si l'on différencie les équations (1) & (2); que l'on emploie pour l'équation (1) les valeurs de a', a'', b, ε du *§. 90;* que l'on fasse usage des valeurs analogues a', a''', b', ε' pour l'équation (2), & que l'on suppose

$$(3)\ d\tau = t - \tau; \qquad (4)\ d\tau' = \vartheta - \tau';$$

l'on aura

$$(5)\ a'dR' + a''dR'' + bdD + \varepsilon d\beta - rd\tau = 0;$$
$$(6)\ a'dR' + a'''dR''' + b'dD + \varepsilon'd\beta - rd\tau' = 0.$$

Maintenant si l'on conserve les définitions des quantités C, D', E', F, G, H, K du *§. 24*, & que l'on nomme, comme dans le *§. 28*,

α ce que devient l'équation (1) du *§. 24*, par la substitution des valeurs Δ', Δ'', Δ''' employées dans les calculs précédens;

que l'on conserve les définitions de m', m'', m''' du *§. 39*, & que l'on suppose

$$M = (C\Delta''\Delta''' - E'\Delta''' - D'\Delta'' + G)\,\frac{R'}{m'};$$

$$M' = (C\Delta'\Delta''' - F\Delta''' - D'\Delta' + H)\,\frac{R''}{m''};$$

$$M'' = (C\Delta'\Delta'' - E'\Delta' - F\Delta'' + K)\,\frac{R'''}{m'''};$$

l'on aura

$$(7)\quad M dR' + M' dR'' + M'' dR''' - \alpha = 0.$$

Enfin, ſi l'on porte les mêmes valeurs de β, E, D, R', R'', &c. dans l'équation (1) du §. 94, & dans une équation analogue réſultante de la comparaiſon de la première & de la troiſième obſervation; que l'on nomme

λ ce que devient la première équation par la ſubſtitution des valeurs ci-deſſus;

λ' ce que devient la ſeconde équation par une ſubſtitution analogue;

que l'on conſerve les expreſſions de f, g, h, l, du §. 94, & que l'on forme des valeurs analogues f', g', h', l', pour la ſeconde équation; l'on aura

$$(8)\quad f\,dR' + g\,dR'' + h\,dD + l\,d\beta - \lambda = 0,$$

$$(9)\quad f'\,dR' + g'\,dR''' + h'\,dD + l'\,d\beta - \lambda' = 0.$$

Il ne s'agit que d'éliminer entre les équations (5), (6), (7), (8) & (9).

(103.) De la combinaiſon des équations (5) & (6) du *paragraphe précédent*, l'on tire

$$(1)\quad d\beta = \frac{a'(b-b')\,dR' - a''b'\,dR'' + a'''b\,dR''' + b'r\,d\tau - b\,r\,d\tau'}{b'\varepsilon - b\varepsilon'};$$

$$(2)\quad dD = \frac{a'(\varepsilon'-\varepsilon)\,dR' + a''\varepsilon'\,dR'' - a'''\varepsilon\,dR''' - \varepsilon' r\,d\tau + \varepsilon r\,d\tau'}{b'\varepsilon - b\varepsilon'};$$

De

De la combinaiſon des équations (8) & (9), l'on tire pareillement

$$(3)\quad d\beta = \frac{(f'h - fh')\,dR' - gh'dR'' + g'h\,dR''' + h'\lambda - h\lambda'}{h'l - hl'},$$

$$(4)\quad dD = \frac{(fl' - f'l)\,dR' + gl'dR'' - g'l\,dR''' + \lambda'l - \lambda l'}{h'l - hl'}.$$

Maintenant ſi l'on égale les deux valeurs de $d\beta$ & de dD, & que l'on ſuppoſe

$$P' = (b'\varepsilon - b\varepsilon')(f'h - fh') - (h'l - hl')(a'b - a'b),$$
$$Q' = a''b'(h'l - hl') - gh'(b'\varepsilon - b\varepsilon'),$$
$$S' = g'h(b'\varepsilon - b\varepsilon') - a'''b(h'l - hl'),$$
$$p' = (b'\varepsilon - b\varepsilon')(h'\lambda - h\lambda'),$$
$$q' = (h'l - hl')\,b',$$
$$s' = (h'l - hl')\,b,$$
$$P'' = (b'\varepsilon - b\varepsilon')(fl' - f'l) - (h'l - hl')(a'\varepsilon' - a'\varepsilon),$$
$$Q'' = (b'\varepsilon - b\varepsilon')\,gl' - (h'l - hl')\,a''\varepsilon',$$
$$S'' = (h'l - hl')\,a'''\varepsilon - (b'\varepsilon - b\varepsilon')\,g'l,$$
$$p'' = (b'\varepsilon - b\varepsilon')(\lambda'l - \lambda l'),$$
$$q'' = (h'l - hl')\,\varepsilon',$$
$$s'' = (h'l - hl')\,\varepsilon,$$

l'on aura

$$(5)\quad P'dR' + Q'dR'' + S'dR''' - q'r\,d\tau + s'r\,d\tau' + p' = 0,$$
$$(6)\quad P''dR' + Q''dR'' + S''dR''' + q''r\,d\tau - s''r\,d\tau' + p'' = 0.$$

Il ne s'agit que d'éliminer entre les équations (5) & (6) du *préſent paragraphe*, & l'équation (7) du *paragraphe précédent.*

(104.) Si l'on combine ces équations, l'on aura

$$(1)\ \left(P' - \frac{MS'}{M''}\right)dR' + \left(Q' - \frac{M'S'}{M''}\right)dR'' - q'rd\tau + s'rd\tau' + p' + \frac{\alpha S'}{M''} = 0,$$

$$(2)\ \left(P'' - \frac{MS''}{M''}\right)dR' + \left(Q'' - \frac{M'S''}{M''}\right)dR'' + q''rd\tau - s''rd\tau' + p'' + \frac{\alpha S''}{M''} = 0;$$

d'où l'on tire enfin,

$$(3)\ \left(P'' - \frac{MS''}{M''}\right)\left(Q' - \frac{M'S'}{M''}\right) - \left(P' - \frac{MS'}{M''}\right)\left(Q'' - \frac{M'S''}{M''}\right)dR'$$
$$+ \left[q''\left(Q' - \frac{M'S'}{M''}\right) - q'\left(Q'' - \frac{M'S''}{M''}\right)\right]rd\tau + \left[s'\left(Q'' - \frac{M'S''}{M''}\right) - s''\left(Q' - \frac{M'S'}{M''}\right)\right]rd\tau'$$
$$+ \left(p'' + \frac{\alpha S''}{M''}\right)\left(Q' - \frac{M'S'}{M''}\right) - \left(p' + \frac{\alpha S'}{M''}\right)\left(Q'' - \frac{M'S''}{M''}\right) = 0.$$

On connoîtra donc la valeur de dR'; on conclura enſuite les valeurs de dR'' au moyen de l'équation (1) du *préſent paragraphe;* la valeur de dR''' au moyen de l'équation (5) du *paragraphe précédent;* on aura enfin les valeurs de $d\beta$ & de dD au moyen des équations (1) & (2) du *§. 103*, & le problème eſt réſolu. En effet, connoiſſant les véritables valeurs de R', R'', R''', β, D, la détermination des élémens n'a plus de difficultés. On connoîtra la valeur de E au moyen de l'équation (3) du *§. 100;* l'inclinaiſon du plan de l'orbite & la poſition du nœud ſe détermineront par les équations du *§. 21;* l'inſtant du paſſage par le périhélie ſe connoîtra par l'équation du *§. 86;* les différentes anomalies v', v'', v''', & les angles N, N', ſe connoîtront par les équations (1), (2) & (3) des *§. 95 & 96;* enfin la diſtance du périhélie de la Comète au nœud aſcendant ſur l'Écliptique, ſera donné par les équations du *§. 48.*

Simplification que la connoiſſance de la valeur de β apporte dans les calculs.

(105.) Si l'on connoiſſoit d'avance la quantité β, les calculs ſe ſimplifieroient. Dans les équations (5), (6), (8) & (9) du *§. 102*, l'on feroit $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 0$, $l = 0$, $l' = 0$; & de la combinaiſon de ces équations, ainſi réduites, l'on tireroit

$$(1)\ a'(b - b')\,dR' - a''b'dR'' + a'''b\,dR''' + b'r\,d\tau - br\,d\tau' = 0,$$

$$(2)\ (f'h - fh')dR' - gh'dR'' + g'hdR''' + h'\lambda - h\lambda' = 0.$$

L'on auroit de plus,

$$(3)\ M\,dR' + M'dR'' + M''dR''' - \alpha = 0.$$

De la combinaiſon de ces trois équations, l'on tireroit

$$(4)\ [a'(b - b') - a'''b\frac{M}{M''}]dR' - (a''b' + a'''b\frac{M'}{M''})dR'' + \frac{a'''b\alpha}{M''} + b'r\,d\tau - br\,d\tau' = 0,$$

$$(5)\ (f'h - fh' - g'h\frac{M}{M''})dR' - (gh' + g'h\frac{M'}{M''})dR'' + \frac{g'h\alpha}{M''} + h'\lambda - h\lambda' = 0;$$

d'où l'on concluroit enfin,

$$(6)\ [(a'b - ab' - a'''b\frac{M}{M''})(gh' + g'h\frac{M'}{M''}) - (f'h - fh' - g'h\frac{M}{M''})(a''b + a'''b\frac{M'}{M''})]dR' + (a'''b\frac{\alpha}{M''} + b'r\,d\tau - br\,d\tau')(gh' + g'h\frac{M'}{M''}) - (g'h\frac{\alpha}{M''} + h'\lambda - h\lambda')(a''b + a'''b\frac{M'}{M''}) = 0.$$

Sur les méthodes qui peuvent être employées pour connoître les diſtances de la Comète à la Terre, dont on doit faire uſage dans les §§. 95 & ſuivans.

(106.) Les calculs des *§§. 95 & ſuivans*, ſuppoſent que l'on connoît, d'une manière très-approchée, les diſtances de la Comète à la Terre. Voici les méthodes qui me paroiſſent préférables pour parvenir à ce but.

La théorie & les calculs que l'on a entrepris ſur les orbites des Comètes, ont également fait voir, que pour déterminer les trajectoires elliptiques, il faut que l'on ait un grand nombre de bonnes obſervations; que la Comète ait parcouru

un très-grand arc de ſa trajectoire; qu'elle ait été vue avant & après ſon paſſage par le périhélie; que les obſervations ſe refuſent d'une manière ſenſible à pouvoir être repréſentées par une ſeule & même parabole; autrement, ou l'on auroit peu de priſe pour diſtinguer la nature rigoureuſe de l'orbite, ou il ſeroit à craindre, qu'en abandonnant le calcul dans la parabole, on ne courût après une exactitude chimérique, & que les erreurs inſéparables des obſervations ne miſſent dans les réſultats, une incertitude infiniment plus grande que celle que l'on cherche à éviter. D'ailleurs, les obſervations étant liées à des poſitions d'Étoiles, qui ne ſont pas toutes parfaitement connues, on doit plus ſonger à accorder l'enſemble des obſervations, qu'à repréſenter rigoureuſement quelques obſervations iſolées, au haſard de rendre les autres diſcordantes.

Ces remarques m'ont conduit à penſer que lorſque les conditions du Problème ſe réuniſſent pour exiger un calcul dans l'ellipſe, on ne peut mieux faire que de claſſer toutes les obſervations, & d'en former différens ſyſtèmes réſultans de la réunion de pluſieurs obſervations aſſez prochaines entr'elles pour employer les méthodes des *§§. 31 & ſuivans.* On conclura donc par ces méthodes, & pour chacun de ces différens ſyſtèmes, les diſtances de la Comète à la Terre, lors d'une obſervation moyenne qui ſera le réſultat de chaque ſyſtème particulier; on traitera enſuite ces diſtances moyennes comme ſi elles étoient données immédiatement par les obſervations.

Suppoſons donc que l'on ait un certain nombre de ces diſtances, on portera les deux premières dans l'équation (1) du *§. 24,* & l'on cherchera ſucceſſivement les autres diſtances par des équations de la forme de celle du *§. 26:* l'on comparera les réſultats avec ceux que l'on aura déduits des méthodes des *§§. 31 & ſuivans.* Si ces réſultats coïncident, le Problème eſt réſolu, & l'on a ſatisfait à la condition que toutes les poſitions de la Comète ſoient dans un même plan; ſi

les résultats ne coïncident point, il ne sera pas difficile, par des équations différentielles de la forme de celles du *§. 28*, de trouver la loi qui rend ces distances, sinon rigoureusement cohérentes entr'elles, du moins d'une manière très-approchée.

(107.) Si l'on connoissoit d'avance la position du nœud, il seroit plus facile de déterminer rapidement la loi des distances. En effet, on auroit alors des équations de la forme de celles (7) (8) du *§. 21*, (3) (4) du *§. 23*; & comme l'on suppose que l'angle ζ est connu à très-peu près, l'on auroit facilement les limites des variations probables de Δ', Δ'', Δ''', &c.

(108.) Lorsque par les procédés que nous venons d'indiquer, on aura déterminé les différentes valeurs approchées de Δ', Δ'', Δ''', &c. on emploîra les méthodes des *§§. 95 & suivans*; peut-être même, au lieu de regarder β comme inconnu, seroit-il plus à propos de supposer cette quantité connue, & de simplifier ainsi les calculs, conformément à la remarque du *§. 105*, sauf à les répéter un plus grand nombre de fois. On pourroit alors employer pour première valeur de β celle qui seroit donnée par les considérations des *§§. 91 & 92*.

Telles sont les méthodes que je croirois devoir employer de préférence pour déterminer les distances de la Comète à la Terre, dont on doit faire usage dans les *§§. 95 & suivans*. La longueur de ce Mémoire m'empêche de les développer avec quelqu'étendue; mais ce qui a été dit ci-dessus ne laisse rien à desirer sur le véritable esprit de cette solution.

Je me suis attaché principalement à séparer les équations qui dépendent de la nature de la trajectoire d'avec celles qui en sont indépendantes, & qui supposent uniquement que les mouvemens de la Comète se passent tous dans un même plan. Cette manière d'envisager le problème, me paroît une chose intéressante dans la détermination des orbites des Comètes.

Du cas où la trajectoire de la Comète seroit circulaire.

(109.) Je terminerai cette seconde partie par l'examen du cas particulier où la trajectoire de la Comète seroit circulaire : je supposerai dans ces recherches que l'on a des équations de la forme de celles du *§. 31*. Je nommerai, comme dans ce paragraphe,

Δ', R', T', A', B', L', les quantités qui appartiennent à la première observation ;

Δ''', R''', T''', A''', B''', L''', les quantités qui appartiennent à la dernière des observations, faites dans des intervalles proches, & que je suppose liées ensemble par les considérations du *§. 33*;

ϑ le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observation Δ' & Δ'''.

Je nommerai d'ailleurs, comme dans les *paragraphes précédens*,

I l'inclinaison du plan de l'orbite de la Comète sur l'Écliptique;

ζ la longitude du nœud ascendant de la Comète;

u' l'angle du rayon vecteur de la Comète avec la ligne des nœuds, lors de la première observation ; cet angle est compté sur le plan de l'orbite de la Comète, en partant du nœud ascendant, & en suivant le sens du mouvement de la Comète dans son orbite ;

u''' l'angle du rayon vecteur de la Comète avec la ligne des nœuds, lors de la seconde observation ;

N un angle qu'il s'agira de déterminer, & qui est tel que l'on ait

$$(1)\ u''' = u' + N.$$

Je supposerai enfin que l'on a une équation de la forme suivante,

$$(2)\ \Delta''' = P\,\Delta'.$$

(110.) Il est facile, d'après ce qui a été dit dans ce Mémoire, de déterminer les distances de la Comète à la Terre lors des deux Observations Δ', Δ''', ainsi que le

rayon du cercle qu'elle décrit. En effet, il suit des recherches précédentes, que l'on a les deux équations

$$(1)\ R'^2 - \Delta'^2 + 2\,\Delta'\,T' \text{ cos. } L' \text{ cos. } (B' - A') - T'^2 = 0,$$

$$(2)\ R'''^2 - \Delta'''^2 + 2\,\Delta'''\,T''' \text{ cos. } L''' \text{ cos. } (B''' - A''') - T'''^2 = 0.$$

Mais, par la supposition, la trajectoire de la Comète est circulaire; donc $R''' = R'$; d'ailleurs, $\Delta''' = P\,\Delta'$; donc

$$(3)\ (1 - P^2)\,\Delta'^2 + 2\,[\,P T''' \text{ cos. } L''' \text{ cos. } (B''' - A''') - T' \text{ cos. } L' \text{ cos. } (B' - A')\,]\,\Delta' + T'^2 - T'''^2 = 0.$$

Au moyen de cette dernière équation, l'on connoîtra la distance Δ'; d'où l'on conclura la distance Δ''' au moyen de l'équation (2) du *§. 109;* & enfin le rayon de l'orbite circulaire de la Comète, au moyen de l'équation (1) du *présent paragraphe.*

(111.) La détermination de l'inclinaison du plan de l'orbite & de l'angle que fait le premier rayon vecteur avec la ligne des nœuds compté sur le plan de l'orbite, ne présente pas beaucoup plus de difficultés. En effet, l'on a *(§. 48)* les deux équations suivantes,

$$(1)\ R' \text{ sin. } u' \text{ sin. } I - \Delta' \text{ sin. } L' = 0,$$

$$(2)\ R''' \text{ sin. } u''' \text{ sin. } I - \Delta''' \text{ sin. } L''' = 0;$$

& de ces équations, l'on tire à cause de $R' = R'''$,

$$(3)\ \Delta' \text{ sin. } L' \text{ sin. } u''' - \Delta''' \text{ sin. } L''' \text{ sin. } u' = 0;$$

mais *[§. 109, équat. (1)]* $u''' = u' + N$; donc

$$(4) \text{ tangente } u' = \frac{\Delta' \text{ sin. } L' \text{ sin. } N}{\Delta''' \text{ sin. } L''' - \Delta' \text{ sin. } L' \text{ cos. } N},$$

On voit donc que l'on connoîtra l'angle u' du premier rayon vecteur avec la ligne des nœuds, & par conséquent *[équat. (1)]* l'inclinaison du plan de l'orbite de la Comète, lorsque l'on connoîtra l'angle N.

(112.) Il n'est pas difficile de déterminer l'angle N. Pour

y parvenir, on ſe rappellera que les recherches du *§. 110*, ont fait connoître le rayon de la trajectoire circulaire de la Comète; d'ailleurs on connoît le temps ϑ écoulé entre les deux obſervations que l'on compare

Si donc l'on nomme

r la moyenne diſtance du Soleil à la Terre,

s l'arc que la Terre décrit dans ſon orbite pendant une minute de temps, lorſqu'elle eſt à ſa moyenne diſtance du Soleil,

ϑ le nombre de minutes de temps écoulées entre l'obſervation Δ' & Δ''',

Il eſt évident que l'arc décrit par la Terre, pendant le temps ϑ, ſera égal à ϑs, & que par conſéquent ce même arc aura pour ſon expreſſion en ſecondes de degré $\frac{\vartheta s}{r} \times 206265''$; mais l'arc décrit par la Comète, dans ſon orbite circulaire, eſt à l'arc moyen de la Terre, décrit dans le même temps, comme $r^{\frac{1}{2}}$ eſt à $R'^{\frac{1}{2}}$; donc

$$(1)\ N = \frac{\vartheta s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{1}{2}}}\ 206265''.$$

(113.) Puiſque l'angle N eſt connu, l'angle que fait le premier rayon vecteur avec la ligne des nœuds, compté ſur le plan de l'Écliptique, ainſi que l'inclinaiſon du plan de l'orbite ſont pareillement connus; on déterminera donc facilement la longitude du nœud aſcendant, au moyen des équations du *§. 51*.

(114.) Il n'eſt pas même indiſpenſablement néceſſaire d'avoir recours à l'équation (1) du *§. 112*, pour déterminer l'angle N. On peut ſe rappeler que nous avons donné *(§. 16)* l'expreſſion générale de cet angle; expreſſion qui, dans le cas que nous conſidérons, devient

$$(1)\ R'^2 \operatorname{cof.} N - T'T''' \operatorname{cof.} (A''' - A') + T'\Delta''' \operatorname{cof.} L''' \operatorname{cof.} (B''' - A') + T'''\Delta' \operatorname{cof.} L' \operatorname{cof.} (B' - A''') - \Delta'\Delta''' [\operatorname{cof.} L' \operatorname{cof.} L''' \operatorname{cof.} (B''' - B') + \operatorname{fin.} L' \operatorname{fin.} L'''] = 0.$$

Cette

Cette expression est moins commode que celle du §. *112.*

(115.) Si l'expression de l'angle N du *paragraphe précédent* est plus compliquée que celle du §. *112*, elle est au moins très-utile pour vérifier l'hypothèse circulaire. En effet, si cette hypothèse est la véritable, les deux valeurs de l'angle N doivent donner le même résultat; on a donc

$$(1)\ R'^2 \text{ cos. angle } \left(\frac{\vartheta s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{3}{2}}}\, 206265''\right) - T'T''' \text{ cos. } (A''' - A')$$
$$+ T'\Delta''' \text{ cos. } L''' \text{ cos. } (B''' - A') + T'''\Delta' \text{ cos. } L' \text{ cos. } (B' - A''')$$
$$- \Delta'\Delta''' [\text{cos. } L' \text{ cos. } L''' \text{ cos. } (B''' - B') + \text{sin. } L' \text{ sin. } L'''] = 0.$$

Il ne s'agit que de vérifier si cette équation est satisfaite.

(116.) L'équation (1) du *paragraphe précédent* présente encore une utilité remarquable, celle de faire trouver facilement le rayon du cercle qui satisfait au Problème, lorsque l'on connoît à peu-près la valeur de ce rayon. En effet, si l'on différencie cette équation, l'on aura

$$2R' \text{ cos. ang. } \left(\frac{\vartheta s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{3}{2}}}\, 206265''\right) dR + R'^2 d\text{cos. ang. } \left(\frac{\vartheta s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{3}{2}}}\, 206265''\right)$$
$$+ T' \text{ cos. } L''' \text{ cos. } (B''' - A') d\Delta''' + T''' \text{ cos. } L' \text{ cos. } (B' - A''') d\Delta'$$
$$- \Delta''' [\text{cos. } L' \text{ cos. } L''' \text{ cos. } (B''' - B') + \text{sin. } L' \text{ sin. } L'''] d\Delta'$$
$$- \Delta' [\text{cos. } L' \text{ cos. } L''' \text{ cos. } (B''' - B') + \text{sin. } L' \text{ sin. } L'''] d\Delta''' = 0.$$

Soit maintenant, comme dans le §. *39*,

$$m' = \Delta' - T' \text{ cos. } L' \text{ cos. } (B' - A'),$$
$$m''' = \Delta''' - T''' \text{ cos. } L''' \text{ cos. } (B''' - A''');$$

l'on aura, dans le cas du cercle,

$$d\Delta' = \frac{R'dR'}{m'};\ d\Delta''' = \frac{R'dR'}{m'''}.$$ De plus,

$$d \text{ cos. ang. } \left(\frac{\vartheta s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{3}{2}}}\, 206265''\right) = \tfrac{3}{2} \text{ sin. ang. } \left(\frac{\vartheta s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{3}{2}}}\, 206265''\right) \frac{\vartheta s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{5}{2}}}\, dR'$$

donc ſi l'on nomme

λ ce que devient l'équation (1) du ſ. 115, par la ſubſtitution des valeurs de R', T', Δ', A', B', L'; T''', Δ''', A''', B''', L''';

l'on aura

$$\{2 R' \text{coſ. ang.} \left(\frac{\vartheta s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{1}{2}}} 206265''\right) + \tfrac{3}{2} \text{ſin. ang.} \left(\frac{\vartheta s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{1}{2}}} 206265''\right) \frac{\vartheta s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{1}{2}}}$$
$$+ [T''' \text{coſ.} L' \text{coſ.} (B' - A''') - \Delta''' [\text{coſ.} L' \text{coſ.} L''' \text{coſ.} (B''' - B')$$
$$+ \text{ſin.} L' \text{ſin.} L''']] \frac{R'}{m'} + [T' \text{coſ.} L''' \text{coſ.} (B''' - A')$$
$$- \Delta' [\text{coſ.} L' \text{coſ.} L''' \text{coſ.} (B''' - B') + \text{ſin.} L' \text{ſin.} L''']] \frac{R'}{m'''}\} dR' - \lambda = 0.$$

(117.) Il pourroit être intéreſſant de connoître l'influence de la variation de la valeur de P, dont il a été parlé dans le ſ. 109, ſur l'expreſſion du rayon de la trajectoire circulaire; rien de plus ſimple que la ſolution de cette queſtion. En effet, on a tout de ſuite

$$[(1 - P^2)\Delta' + 2[PT''' \text{coſ.} L''' \text{coſ.} (B''' - A''')$$
$$- T' \text{coſ.} L' \text{coſ.} (B' - A')]] d\Delta' - [\Delta'^2 P$$
$$- \Delta' T''' \text{coſ.} L''' \text{coſ.} (B''' - A''')] dP = 0,$$

ou à cauſe de $d\Delta' = \frac{R' d R'}{m'}$,

$$(1)\ [(1 - P^2)\Delta' + 2[PT''' \text{coſ.} L''' \text{coſ.} (B''' - A''') - T' \text{coſ.} L' \text{coſ.} (B' - A')]] \frac{R'}{m'} dR'$$
$$- [\Delta'^2 P - \Delta' T''' \text{coſ.} L''' \text{coſ.} (B''' - A''')] dP = 0.$$

(118.) Par les méthodes précédentes, nous avons déterminé le rayon de la trajectoire circulaire, & en général, les élémens qui repréſentent les premières obſervations dans le cercle; on peut être curieux de vérifier ſi ces élémens ſatisfont à une obſervation éloignée. Pour y parvenir, je remarque que ſi l'on nomme

Δ'''', T'''', A'''', L'''', B'''', u'''', &c. les grandeurs qui appartiennent à cette obſervation,

l'on a (§. 54)

$(1)\ \Delta'''' \text{ſin.} L'''' \text{cot.} I + T'''' \text{ſin.} (A'''' - \zeta) - \Delta'''' \text{coſ.} L'''' \text{ſin.} (B'''' - \zeta) = 0,$

$(2)\ R' \text{ſin.} u'''' \text{ſin.} I - \Delta'''' \text{ſin.} L'''' = 0.$

On déterminera donc la valeur de Δ'''' au moyen de l'équation (1), & la valeur de u'''', au moyen de l'équation (2).

(119.) Maintenant, il eſt évident que ſi l'on nomme

N' l'angle compris entre les deux rayons vecteurs de la Comète, correſpondans aux obſervations Δ', Δ'''',

ϑ' le nombre de minutes de temps écoulées entre la première & la quatrième obſervation,

l'on a $N' = \frac{\vartheta' s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{3}{2}}} 206265''$; de plus, $N' = u'''' - u'$;

il s'agit donc de vérifier ſi l'on a

$$(1)\ u'''' - u' = \frac{\vartheta' s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{3}{2}}} 206265''.$$

Dans le premier cas, les élémens ſont bien déterminés, & l'orbite eſt circulaire; dans le ſecond cas, l'orbite n'eſt point circulaire. C'eſt une ſeconde manière de vérifier l'hypothèſe circulaire.

(120.) Je terminerai ce qui regarde l'orbite circulaire, par une remarque analogue à celle du §. 101. Aſtronomiquement parlant, il ne faut que deux obſervations pour déterminer cette orbite; en effet, à cauſe de $R' = R'''$, il ſuit du §. 39, que

$$\Delta' = T' \text{coſ.} L' \text{coſ.} (B' - A') \pm \surd[T'^2 \text{coſ.}^2 L' \text{coſ.}^2 (B' - A') - T'^2 + R'^2],$$

$$\Delta''' = T''' \text{coſ.} L''' \text{coſ.} (B''' - A''') \pm \surd[T'''^2 \text{coſ.}^2 L''' \text{coſ.}^2 (B''' - A''') - T'''^2 + R'^2],$$

il eſt donc évident que l'équation (1) du §. 115 eſt déterminée;

mais d'un autre côté, cette équation eſt tranſcendante. Si l'on veut éviter cet inconvénient, & n'avoir à réſoudre qu'une équation algébrique, il eſt néceſſaire d'employer trois obſervations; l'on a alors, en conſervant les définitions de C, D', E', F, G, H, K du *§. 24*, une équation de la forme ſuivante,

$$(1)\ C\Delta'\Delta''\Delta''' - D'\Delta'\Delta'' - E'\Delta'\Delta''' - F\Delta''\Delta''' + G\Delta' + H\Delta'' + K\Delta''' = 0.$$

De plus, à cauſe de l'égalité des rayons vecteurs, l'on a

$$(2)\ \Delta'' = T''\,\text{coſ.}\,L''\,\text{coſ.}\,(B'' - A'') \pm \sqrt{[T''^2\,\text{coſ.}^2 L''\,\text{coſ.}^2 (B'' - A'') - T''^2 + \Delta'^2 + T'^2 - 2\,\Delta' T'\,\text{coſ.}\,L'\,\text{coſ.}\,(B' - A')]},$$

$$(3)\ \Delta''' = T'''\,\text{coſ.}\,L'''\,\text{coſ.}\,(B''' - A''') \pm \sqrt{[T'''^2\,\text{coſ.}^2 L'''\,\text{coſ.}^2 (B''' - A''') - T'''^2 + \Delta'^2 + T'^2 - 2\,\Delta' T'\,\text{coſ.}\,L'\,\text{coſ.}\,(B' - A')]}.$$

Le Problème eſt donc réſolu, par une équation purement algébrique; mais il eſt plus que déterminé, puiſque l'on a en outre deux équations de la forme de l'équation (1) du *§. 114.*

TROISIÈME PARTIE,

Dans laquelle on démontre ce qui eſt relatif aux équations de la forme de celles dont il a été parlé dans les §§. 31 & ſuivans.

(121.) Il me reſte maintenant à démontrer ce qui eſt relatif aux équations de la forme de celles dont il a été parlé dans les *§§. 31* & *ſuivans.* Je ferai voir la formation de ces équations; le degré de leur exactitude; dans quel cas on doit les employer de préférence, & par quel moyen on peut y ſuppléer, lorſque les circonſtances du Problème peuvent laiſſer quelque doute ſur la légitimité de leur uſage.

Soit donc, comme dans les *§§. 31* & *32*,

t le nombre de minutes de temps écoulées entre l'obſervation Δ' & Δ'';

t' le nombre de minutes de temps écoulées entre l'obſervation Δ'' & Δ''';

ϑ le nombre de minutes de temps écoulées entre l'obſervation Δ' & Δ''';

$\mu' = \text{ſin.}\, L''' \,\text{coſ.}\, L'' \,\text{ſin.}\, (B'' - A'') - \text{ſin.}\, L'' \,\text{coſ.}\, L''' \,\text{ſin.}\, (B''' - A'');$

$\mu'' = \text{ſin.}\, L''' \,\text{coſ.}\, L' \,\text{ſin.}\, (B' - A'') - \text{ſin.}\, L' \,\text{coſ.}\, L''' \,\text{ſin.}\, (B''' - A'');$

$\mu''' = \text{ſin.}\, L'' \,\text{coſ.}\, L' \,\text{ſin.}\, (B' - A'') - \text{ſin.}\, L' \,\text{coſ.}\, L'' \,\text{ſin.}\, (B'' - A'').$

Je vais démontrer que l'on a les équations ſuivantes,

$$(1)\ t'\mu''\Delta' - \vartheta\mu'\Delta'' = 0,$$
$$(2)\ t'\mu'''\Delta' - t\mu'\Delta''' = 0,$$
$$(3)\ t\mu''\Delta''' - \vartheta\mu'''\Delta'' = 0.$$

Comme ces réſultats ſuppoſent quelques connoiſſances préliminaires, je commence par l'établiſſement de ces propoſitions.

De la relation entre les coordonnées de la trajectoire de la Comète, priſes ſur le plan de la trajectoire, & les coordonnées perpendiculaires x, y, z *du* §. 13.

(122.) Soit

I l'inclinaiſon du plan de l'orbite de la Comète ſur l'Écliptique;

ζ la longitude du nœud aſcendant de la Comète;

Ω l'angle de la ligne des abſciſſes de l'orbite de la Comète priſes ſur le plan de cette orbite, avec la ligne des nœuds;

θ l'abſciſſe, v l'ordonnée } à l'orbite de la Comète, priſes dans le plan de cette orbite; ces coordonnées ſont ſuppoſées perpendiculaires entr'elles;

x, y, z les coordonnées à l'orbite de la Comète, & qui ſont priſes, ſavoir x & y ſur le plan de l'Écliptique, & z ſur un plan perpendiculaire à l'Écliptique.

Je vais faire voir que ſi l'on ſuppoſe

$$a = + \text{coſ.}\,\Omega\,\text{coſ.}\,\zeta - \text{coſ.}\,I\,\text{ſin.}\,\Omega\,\text{ſin.}\,\zeta,$$
$$b = - \text{ſin.}\,\Omega\,\text{coſ.}\,\zeta - \text{coſ.}\,I\,\text{coſ.}\,\Omega\,\text{ſin.}\,\zeta,$$
$$c = + \text{coſ.}\,\Omega\,\text{ſin.}\,\zeta + \text{coſ.}\,I\,\text{ſin.}\,\Omega\,\text{coſ.}\,\zeta,$$
$$e = - \text{ſin.}\,\Omega\,\text{ſin.}\,\zeta + \text{coſ.}\,I\,\text{coſ.}\,\Omega\,\text{coſ.}\,\zeta,$$
$$f = + \text{ſin.}\,\Omega\,\text{ſin.}\,I,$$
$$g = + \text{coſ.}\,\Omega\,\text{ſin.}\,I,$$

l'on a en général

$$(1)\ x = a\theta + bv;$$
$$(2)\ y = c\theta + ev;$$
$$(3)\ z = f\theta + gv.$$

Fig. 6. (123.) Pour le démontrer, ſoit S le Soleil ; SEC' le plan de l'Écliptique ; SE la ligne paſſant par le premier point d'*Ariès ;* SN la ligne des nœuds de l'orbite de la Comète ; $SNMC$ le plan de l'orbite de la Comète ; C le lieu de la Comète dans ſon orbite ; C' la projection de la Comète ſur l'Écliptique ; SD la ligne des abſciſſes de l'orbite de la Comète, priſe ſur le plan de cette orbite. Abaiſſons de la Comète C la perpendiculaire CM ſur la ligne SNM des nœuds ; conſervons les définitions du *paragraphe précédent*, & cherchons l'équation à l'orbite de la Comète, par rapport à l'abſciſſe SM, priſe ſur la ligne des nœuds, & à l'ordonnée perpendiculaire MC. Nommons

K l'abſciſſe SM,
V l'ordonnée correſpondante MC,

& ſoit ∂ le point où l'ordonnée MC rencontre la ligne des abſciſſes SD, priſe ſur le plan de l'orbite de la Comète.

On voit d'abord que les triangles ∂SM, $DC\partial$ ſont ſemblables, puiſque ces triangles ont chacun les angles en ∂ oppoſés au ſommet, & que d'ailleurs ils ſont rectangles ; l'angle $DC\partial$ eſt donc égal à l'angle ∂SM, c'eſt-à-dire à l'angle Ω ; & chacun des angles en ∂ eſt complément de Ω ; donc, $SM = S\partial \operatorname{cof.} \Omega$. Mais $S\partial = SD - \partial D$, & $\partial D = DC \operatorname{tang.} \Omega$; de plus, $SD = \theta$, & $DC = v$; donc $S\partial = \theta - v \operatorname{tang.} \Omega$; donc $SM = \theta \operatorname{cof.} \Omega - v \operatorname{tang.} \Omega \operatorname{cof.} \Omega$; donc

$$K = \theta \operatorname{cof.} \Omega - v \operatorname{fin.} \Omega.$$

De même, à cauſe de $MC = M\partial + \partial C$; que de plus $M\partial = K \operatorname{tang.} \Omega$, & que $\partial C = \frac{DC}{\operatorname{cof.} \Omega}$; on a

$$V = \theta \operatorname{fin.} \Omega + v \operatorname{cof.} \Omega.$$

Maintenant dans le triangle CMC' rectangle en C', on a $CC' = MC$ fin. $I = V$ fin. I; on a de plus $MC' = MC$ cof. I; d'ailleurs, $CC' = z$; donc Fig. 6.

$$z = \theta \text{ fin. } \Omega \text{ fin. } I + \upsilon \text{ cof. } \Omega \text{ fin. } I,$$
$$MC' = \theta \text{ fin. } \Omega \text{ cof. } I + \upsilon \text{ cof. } \Omega \text{ cof. } I.$$

Confidérons maintenant les triangles femblables SEN, $NC'M$, rectangles en E & en M, & dont les angles ESN, $MC'N$, font chacun égaux à l'angle que nous avons nommé ζ; on aura par une analyfe femblable à la précédente,

$$x = K \text{cof.} \zeta - MC' \text{fin.} \zeta; \quad y = K \text{fin.} \zeta + MC' \text{cof.} \zeta.$$

Subftituant donc dans ces équations à K & à MC', leurs valeurs, on aura

$$x = \theta(\text{cof.}\Omega\,\text{cof.}\zeta - \text{fin.}\Omega\,\text{cof.}I\,\text{fin.}\zeta) - \upsilon(\text{fin.}\Omega\,\text{cof.}\zeta + \text{cof.}\Omega\,\text{cof.}I\,\text{fin.}\zeta),$$
$$y = \theta(\text{cof.}\Omega\,\text{fin.}\zeta + \text{fin.}\Omega\,\text{cof.}I\,\text{cof.}\zeta) + \upsilon(\text{cof.}\Omega\,\text{cof.}I\,\text{cof.}\zeta - \text{fin.}\Omega\,\text{fin.}\zeta);$$

on a donc les équations (1), (2) & (3) du *§. 122.*

(124.) Il fuit de ces recherches, que pour trois obfervations différentes on aura les neuf équations fuivantes,

$$(1)\ x' = a\theta' + b\upsilon', \qquad (4)\ y' = c\theta' + e\upsilon', \qquad (7)\ z' = f\theta' + g\upsilon',$$
$$(2)\ x'' = a\theta'' + b\upsilon'', \qquad (5)\ y'' = c\theta'' + e\upsilon'', \qquad (8)\ z'' = f\theta'' + g\upsilon'',$$
$$(3)\ x''' = a\theta''' + b\upsilon''', \qquad (6)\ y''' = c\theta''' + e\upsilon''', \qquad (9)\ z''' = f\theta''' + g\upsilon'''.$$

Des relations entre les trois diftances fucceffives de la Comète à la Terre, & les aires rectilignes de la trajectoire de la Comète, comprifes entre les rayons vecteurs & les cordes correfpondantes, prifes fur le plan de l'orbite de la Comète.

(125.) Il faut faire voir maintenant qu'il exifte des relations entre les trois diftances fucceffives de la Comète à la Terre & les aires rectilignes de la trajectoire, comprifes

entre les rayons vecteurs & les cordes correspondantes, prises sur le plan de l'orbite de la Comète.

Pour déterminer ces relations, éliminons a & b, au moyen des équations (1), (2) & (3) du *paragraphe précédent;* c & e, au moyen des équations (4), (5) & (6); f & g, au moyen des équations (7), (8) & (9); on parviendra aux trois résultats suivans,

(1) $(\theta'''\upsilon'' - \theta''\upsilon''')x' - (\theta'''\upsilon' - \theta'\upsilon''')x'' + (\theta''\upsilon' - \theta'\upsilon'')x''' = 0$;

(2) $(\theta'''\upsilon'' - \theta''\upsilon''')y' - (\theta'''\upsilon' - \theta'\upsilon''')y'' + (\theta''\upsilon' - \theta'\upsilon'')y''' = 0$;

(3) $(\theta'''\upsilon'' - \theta''\upsilon''')z' - (\theta'''\upsilon' - \theta'\upsilon''')z'' + (\theta''\upsilon' - \theta'\upsilon'')z''' = 0$.

Donc, si l'on fait pour abréger

$$H = \theta''\upsilon' - \theta'\upsilon''; \quad M = \theta'''\upsilon' - \theta'\upsilon'''; \quad Q = \theta'''\upsilon'' - \theta''\upsilon''';$$

on aura les trois équations semblables,

$$(4)\ Qx' - Mx'' + Hx''' = 0,$$
$$(5)\ Qy' - My'' + Hy''' = 0,$$
$$(6)\ Qz' - Mz'' + Hz''' = 0.$$

Maintenant, si l'on conserve les définitions du *§. 13*, il est évident que l'on a

$$x' = T' \operatorname{cof.} A' - \Delta' \operatorname{cof.} B' \operatorname{cof.} L',$$
$$x'' = T'' \operatorname{cof.} A'' - \Delta'' \operatorname{cof.} B'' \operatorname{cof.} L'',$$
$$x''' = T''' \operatorname{cof.} A''' - \Delta''' \operatorname{cof.} B''' \operatorname{cof.} L''',$$
$$y' = T' \operatorname{fin.} A' - \Delta' \operatorname{fin.} B' \operatorname{cof.} L',$$
$$y'' = T'' \operatorname{fin.} A'' - \Delta'' \operatorname{fin.} B'' \operatorname{cof.} L'',$$
$$y''' = T''' \operatorname{fin.} A''' - \Delta''' \operatorname{fin.} B''' \operatorname{cof.} L''',$$
$$z' = \Delta' \operatorname{fin.} L',$$
$$z'' = \Delta'' \operatorname{fin.} L'',$$
$$z''' = \Delta''' \operatorname{fin.} L'''.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (4), (5) & (6) du

du *présent paragraphe*, elles deviendront

$$\left.\begin{array}{l}(7)\ QT' \text{cos.} A' - MT'' \text{cos.} A'' + HT''' \text{cos.} A''' \\ - Q\Delta' \text{cos.} B' \text{cos.} L' + M\Delta'' \text{cos.} B'' \text{cos.} L'' - H\Delta''' \text{cos.} B''' \text{cos.} L'''\end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}(8)\ QT' \text{sin.} A' - MT'' \text{sin.} A'' + HT''' \text{sin.} A''' \\ - Q\Delta' \text{sin.} B' \text{cos.} L' + M\Delta'' \text{sin.} B'' \text{cos.} L'' - H\Delta''' \text{sin.} B''' \text{cos.} L'''\end{array}\right\} = 0,$$

$$(9)\ Q\Delta' \text{sin.} L' - M\Delta'' \text{sin.} L'' + H\Delta''' \text{sin.} L''' = 0.$$

(126.) Il est aisé de démontrer que les quantités Q, M, H, sont respectivement proportionnelles aux aires rectilignes $C'SC''$, CSC'', CSC' de la trajectoire de la Comète, comprises entre les rayons vecteurs & les cordes correspondantes, prises sur le plan de l'orbite de la Comète. Pour le prouver, prenons, par exemple, la quantité M; ce que l'on dira sur cette quantité s'appliquera facilement, avec quelques légers changemens, aux quantités Q, H. Nous avons vu *(parag. précéd.)* que $M = \theta''' v' - \theta' v'''$; or $\theta''' v' - \theta' v'''$ est l'expression de l'aire CSC'' comprise entre les rayons vecteurs SC, SC'' & la corde CC''. En effet, des points C, C'' de la trajectoire, abaissons sur la ligne des abscisses ASP, les perpendiculaires CP, $C''P'$; & du point C, abaissons sur l'ordonnée $P'C''$, la perpendiculaire Cp'; l'aire CSC'' sera évidemment égale à la surface du triangle CSP, *plus* la surface du triangle $Cp'C''$, *plus* la surface du parallélogramme $CPP'p'$, *moins* la surface du triangle $SP'C''$; mais $SP = \theta$, $PC = v$, $SP' = \theta'''$, $C''P' = v'''$, $Cp' = \theta''' - \theta'$, $P'p' = v''' - v'$; donc l'aire $CSC'' = \frac{1}{2}\theta' v' + \frac{1}{2}(\theta''' - \theta')(v''' - v') + (\theta''' - \theta')v' - \frac{1}{2}\theta''' v''' = \frac{1}{2}(\theta''' v' - \theta' v''')$; donc $M = 2 \times$ aire CSC''. Et comme l'on démontre des propriétés analogues, relativement aux quantités Q, H; la proposition relative à la proportionnalité des grandeurs Q, M, H aux aires rectilignes $C'SC''$, CSC'', CSC' est établie. Fig. 7.

(127.) Si l'on multiplie l'équation (7) du §. 125 par le facteur QT' sin. $A' - MT''$ sin. $A'' + HT'''$ sin. A'''; que l'on multiplie pareillement l'équation (8) *du même*

paragraphe, par le facteur $QT' \text{ cof } A' - MT'' \text{ cof. } A'' + HT''' \text{ cof. } A'''$, & que l'on foustraie ces deux produits l'un de l'autre, l'on aura

$$(1)\quad Q\Delta' \text{ cof. } L' [QT' \text{ fin. } (B' - A') - MT'' \text{ fin. } (B' - A'') + HT''' \text{ fin. } (B' - A''')]$$
$$- M\Delta'' \text{ cof. } L'' [QT' \text{ fin. } (B'' - A') - MT'' \text{ fin. } (B'' - A'') + HT''' \text{ fin. } (B'' - A''')]$$
$$+ H\Delta''' \text{ cof. } L''' [QT' \text{ fin. } (B''' - A') - MT'' \text{ fin. } (B''' - A'') + HT''' \text{ fin. } (B''' - A''')] = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(2)\quad Q\Delta' \text{ cof. } L' \Gamma' - M\Delta'' \text{ cof. } L'' \Gamma'' + H\Delta''' \text{ cof. } L''' \Gamma''' = 0,$$

en fuppofant d'ailleurs

$$\Gamma' = QT' \text{ fin. } (B' - A') - MT'' \text{ fin. } (B' - A'') + HT''' \text{ fin. } (B' - A'''),$$
$$\Gamma'' = QT' \text{ fin. } (B'' - A') - MT'' \text{ fin. } (B'' - A'') + HT''' \text{ fin. } (B'' - A'''),$$
$$\Gamma''' = QT' \text{ fin. } (B''' - A') - MT'' \text{ fin. } (B''' - A'') + HT''' \text{ fin. } (B''' - A''').$$

Maintenant fi, dans l'équation (2), l'on élimine fucceffivement Δ''', Δ'', Δ', au moyen de l'équation (9) du *§. 125*, l'on aura

$$(3)\quad Q\Delta' (\text{fin. } L' \text{ cof. } L''' \Gamma''' - \text{fin. } L''' \text{ cof. } L' \Gamma')$$
$$- M\Delta'' (\text{fin. } L'' \text{ cof. } L''' \Gamma''' - \text{fin. } L''' \text{ cof. } L'' \Gamma'') = 0;$$
$$(4)\quad Q\Delta' (\text{fin. } L' \text{ cof. } L'' \Gamma'' - \text{fin. } L'' \text{ cof. } L' \Gamma')$$
$$- H\Delta''' (\text{fin. } L'' \text{ cof. } L''' \Gamma''' - \text{fin. } L''' \text{ cof. } L'' \Gamma'') = 0;$$
$$(5)\quad M\Delta'' (\text{fin. } L'' \text{ cof. } L' \Gamma' - \text{fin. } L' \text{ cof. } L'' \Gamma'')$$
$$- H\Delta''' (\text{fin. } L''' \text{ cof. } L' \Gamma' - \text{fin. } L' \text{ cof. } L''' \Gamma''') = 0.$$

Fig. 7. (128.) Les équations (3), (4) & (5) du *paragraphe précédent*, font rigoureufes quels que foient les intervalles entre les obfervations; & fi les quantités Q, M, H étoient, par exemple, proportionnelles au temps, le Problème des Comètes feroit complétement réfolu avec la dernière facilité. Comme ces mêmes quantités Q, M, H, font refpectivement proportionnelles aux aires rectilignes $C'SC''$, CSC'', CSC', ainfi qu'il a été démontré dans le *§. 126*, & que les rapports entre ces efpaces rectilignes diffèrent très-peu des rapports entre les efpaces curvilignes correfpondans, compris entre la

courbe & les rayons vecteurs; que de plus ces derniers espaces sont proportionnels aux temps, en vertu de la théorie des forces centrales; on peut d'abord supposer les quantités H, M, Q respectivement proportionnelles aux temps t, ϑ, t'; on a alors les équations suivantes,

$$(1)\ t'\Delta' (\text{sin. } L' \text{ cos. } L''' \Gamma''' - \text{sin. } L''' \text{ cos. } L' \Gamma') - \vartheta\Delta'' (\text{sin. } L'' \text{ cos. } L''' \Gamma''' - \text{sin. } L''' \text{ cos. } L'' \Gamma'') = 0;$$

$$(2)\ t'\Delta' (\text{sin. } L' \text{ cos. } L'' \Gamma'' - \text{sin. } L'' \text{ cos. } L' \Gamma') - t\Delta''' (\text{sin. } L'' \text{ cos. } L''' \Gamma''' - \text{sin. } L''' \text{ cos. } L'' \Gamma'') = 0;$$

$$(3)\ \vartheta\Delta'' (\text{sin. } L'' \text{ cos. } L' \Gamma' - \text{sin. } L' \text{ cos. } L'' \Gamma'') - t\Delta''' (\text{sin. } L''' \text{ cos. } L' \Gamma' - \text{sin. } L' \text{ cos. } L''' \Gamma''') = 0;$$

$\Gamma', \Gamma'', \Gamma'''$ ayant d'ailleurs pour valeurs

$$\Gamma' = t'T' \text{sin.} (B' - A') - \vartheta T'' \text{sin.} (B' - A'') + tT''' \text{sin.} (B' - A''');$$

$$\Gamma'' = t'T' \text{sin.} (B'' - A') - \vartheta T'' \text{sin.} (B - A'') + tT''' \text{sin.} (B'' - A'''),$$

$$\Gamma''' = t'T' \text{sin.} (B''' - A') - \vartheta T'' \text{sin.} (B''' - A'') + tT''' \text{sin.} (B''' - A''').$$

(129.) Je remarque de plus, que l'orbite de la Terre pouvant être regardée comme circulaire, & décrite d'un mouvement uniforme dans un petit intervalle de temps, les rayons T', T''' peuvent être, sans erreur sensible, supposés égaux à T''; d'ailleurs t, t', ϑ, exprimant par exemple un nombre de minutes de temps, si l'on nomme

r la moyenne distance du Soleil à la Terre,

m l'arc décrit par la Terre pendant une minute, dans un cercle dont le rayon égale r,

l'on a dans le cas dont il s'agit,

$$A' = A'' - mt; \qquad A''' = A'' + mt'.$$

Si l'on substitue ces valeurs à A' & A''', dans les expressions de $\Gamma', \Gamma'', \Gamma'''$ du §. 128, l'on aura

$$B' - A' = B' - A'' + mt;$$
$$B'' - A' = B'' - A'' + mt;$$
$$B''' - A' = B''' - A'' + mt;$$

$$B' - A''' = B' - A'' - mt';$$
$$B'' - A''' = B'' - A'' - mt';$$
$$B''' - A''' = B''' - A'' - mt'.$$

Mais généralement, en vertu d'un théorème de Taylor, connu de tous les Géomètres, si l'on suppose qu'un angle $B - A$ varie d'une petite quantité $\mp mt$, & que le rayon du cercle soit égal à r, l'on a

$$\text{sin.}(B - A \mp mt) = \text{sin.}(B - A) \mp \frac{mt}{r} \text{cos.}(B - A)$$
$$- \frac{1}{2}\frac{m^2t^2}{r^2}\text{sin.}(B - A) \mp \frac{1}{6}\frac{m^3t^3}{r^3}\text{cos.}(B - A) \ \&c.$$

Donc, développant le calcul, effaçant les quantités qui se détruisent, & substituant ϑ à $t + t'$, l'on aura

$$\Gamma' = -\frac{1}{2}\frac{tt'\vartheta T''m^2}{r^2}\left[\text{sin.}(B' - A'') - \frac{1}{3}\frac{(t - t')m}{r}\text{cos.}(B' - A'')\right],$$
$$\Gamma'' = -\frac{1}{2}\frac{tt'\vartheta T''m^2}{r^2}\left[\text{sin.}(B'' - A'') - \frac{1}{3}\frac{(t - t')m}{r}\text{cos.}(B'' - A'')\right],$$
$$\Gamma''' = -\frac{1}{2}\frac{tt'\vartheta T''m^2}{r^2}\left[\text{sin.}(B''' - A'') - \frac{1}{3}\frac{(t - t')m}{r}\text{cos.}(B''' - A'')\right].$$

Les équations (1), (2), (3) du *§. 128*, deviennent par-là,

$$(1)\ t'\Delta'\Big\{\text{sin.}L'''\text{cos.}L'\left[\text{sin.}(B' - A'') - \frac{1}{3}\frac{(t - t')m}{r}\text{cos.}(B' - A'')\right]$$
$$- \text{sin.}L'\ \text{cos.}L'''\left[\text{sin.}(B''' - A'') - \frac{1}{3}\frac{(t - t')m}{r}\text{cos.}(B''' - A'')\right]\Big\}$$
$$- \vartheta\Delta''\Big\{\text{sin.}L'''\text{cos.}L''\left[\text{sin.}(B'' - A'') - \frac{1}{3}\frac{(t - t')m}{r}\text{cos.}(B'' - A'')\right]$$
$$- \text{sin.}L''\ \text{cos.}L'''\left[\text{sin.}(B''' - A'') - \frac{1}{3}\frac{(t - t')m}{r}\text{cos.}(B''' - A'')\right]\Big\} = 0;$$

$$(2)\, t' \Delta' \{ \text{sin.}\, L'' \text{cos.}\, L' [\text{sin.}\, (B' - A'') - \tfrac{1}{3} \frac{(t - t')\, m}{r} \text{cos.}\, (B' - A'')]$$
$$- \text{sin.}\, L' \ \text{cos.}\, L'' [\text{sin.}\, (B'' - A'') - \tfrac{1}{3} \frac{(t - t')\, m}{r} \text{cos.}\, (B'' - A'')]\}$$
$$- t \Delta''' \{ \text{sin.}\, L''' \text{cos.}\, L'' [\text{sin.}\, (B'' - A'') - \tfrac{1}{3} \frac{(t - t')\, m}{r} \text{cos.}\, (B'' - A'')]$$
$$- \text{sin.}\, L'' \ \text{cos.}\, L''' [\text{sin.}\, (B''' - A'') - \tfrac{1}{3} \frac{(t - t')\, m}{r} \text{cos.}\, (B''' - A'')]\} = 0;$$
$$(3)\, \vartheta \Delta'' \{ \text{sin.}\, L' \text{cos.}\, L'' [\text{sin.}\, (B'' - A'') - \tfrac{1}{3} \frac{(t - t')\, m}{r} \text{cos.}\, (B'' - A'')]$$
$$- \text{sin.}\, L'' \ \text{cos.}\, L' [\text{sin.}\, (B' - A'') - \tfrac{1}{3} \frac{(t - t')\, m}{r} \text{cos.}\, (B' - A'')]\}$$
$$- t \Delta''' \{ \text{sin.}\, L' \text{cos.}\, L''' [\text{sin.}\, (B''' - A'') - \tfrac{1}{3} \frac{(t - t')\, m}{r} \text{cos.}\, (B''' - A'')]$$
$$- \text{sin.}\, L''' \ \text{cos.}\, L' [\text{sin.}\, (B' - A'') - \tfrac{1}{3} \frac{(t - t')\, m}{r} \text{cos.}\, (B' - A'')]\} = 0;$$

ou enfin

$$(4)\ t' \mu'' \Delta' - \vartheta \mu' \Delta'' = 0;$$
$$(5)\ t' \mu''' \Delta' - t \mu' \Delta''' = 0;$$
$$(6)\ t \mu'' \Delta''' - \vartheta \mu''' \Delta'' = 0;$$

en conservant les définitions de μ', μ'', μ''' des §§. 32 & 121; dans le cas toutefois où les intervalles entre les obſervations ſeroient égaux, ou que l'on croiroit pouvoir négliger les troiſièmes puiſſances du petit accroiſſement de l'arc de l'orbite terreſtre, diviſé par le rayon.

(130.) Nous remarquerons enfin, pour la facilité de l'évaluation du petit accroiſſement m, que ſi l'on nomme

r la moyenne diſtance de la Terre au Soleil,

s l'arc que la Terre décrit autour du Soleil, à cette diſtance, pendant une minute de temps,

T'' la diſtance actuelle de la Terre au Soleil,

l'on a

$$(1)\ m = \frac{s\, r^2}{T''^2}.$$

Cette propoſition ſe déduit facilement de la propriété

des trajectoires décrites en vertu d'une force centrale, dans lesquelles les aires sont proportionnelles aux temps. En effet, si l'on suppose les temps égaux, l'on aura généralement (*§. 4*) $R^2 dv - R'^2 dv' = 0$, R, R', v, v' étant les rayons vecteurs & les angles correspondans compris entre ces rayons; or on peut supposer dans le cas dont il s'agit, que $R = r$; $v = s$; $R' = T''$; $v' = m$; la proposition est donc démontrée.

(131.) Il est aisé de remarquer que les équations (4), (5) & (6) du *§. 129* sont identiquement les mêmes que celles des *§§. 32 & suivans;* ces équations ont donc l'inconvénient relevé dans le *§. 128*, c'est-à-dire de supposer les quantités Q, M, H proportionnelles aux temps; il faut faire voir que cet inconvénient est nul dans la totalité des Comètes que l'on observe. C'est spécialement dans ces recherches que nous aurons recours aux principes développés par M. de la Grange, car jusqu'ici les équations sont indépendantes de ses principes.

Du principe de mécanique employé par M. de la Grange.

(132.) Si l'on nomme

θ', θ'', θ''' — les trois abscisses successives de la trajectoire de la Comète, prises sur le plan de son orbite, & correspondantes à trois observations séparées par de petits intervalles de temps,

v', v'', v''' — les ordonnées correspondantes,

φ le temps écoulé depuis une certaine époque, jusqu'à l'instant de la seconde observation,

t le temps écoulé entre la première observation & la seconde,

t' le temps écoulé entre la seconde observation & la troisième,

ϑ le temps écoulé entre la première observation & la troisième;

il est sensible, qu'en général, les abscisses θ', θ'', θ''', ainsi que les ordonnées v', v'', v''', peuvent être regardées comme des

fonctions de la force centrale & du temps écoulé depuis l'époque dont il s'agit. Donc les quantités θ'', v'', doivent donner θ', v', θ''', v''', en y changeant φ en $\varphi - t$, & $\varphi + t'$; donc, en vertu du théorème de Taylor déjà cité,

$$\theta' = \theta'' - \frac{d\theta''}{d\varphi} t + \frac{1}{2} \frac{d^2 \theta''}{d\varphi^2} t^2 - \frac{1}{6} \frac{d^3 \theta''}{d\varphi^3} t^3 + \&c.$$

$$v' = v'' - \frac{dv''}{d\varphi} t + \frac{1}{2} \frac{d^2 v''}{d\varphi^2} t^2 - \frac{1}{6} \frac{d^3 v''}{d\varphi^3} t^3 + \&c.$$

$$\theta''' = \theta'' + \frac{d\theta''}{d\varphi} t' + \frac{1}{2} \frac{d^2 \theta''}{d\varphi^2} t'^2 - \frac{1}{6} \frac{d^3 \theta''}{d\varphi^3} t'^3 + \&c.$$

$$v''' = v'' + \frac{dv''}{d\varphi} t' + \frac{1}{2} \frac{d^2 v''}{d\varphi^2} t'^2 - \frac{1}{6} \frac{d^3 v''}{d\varphi^3} t'^3 + \&c.$$

(133.) Il faut faire voir maintenant que si l'on suppose constante la force accélératrice qui engendre la courbure de la trajectoire de la Comète, les séries qui expriment les valeurs de θ', v', θ''', v''' s'arrêtent; & qu'il est facile de donner à θ', v', θ''', v''', des expressions plus commodes que celles du *paragraphe précédent.* Cette supposition d'une force accélératrice constante pendant la durée des observations, est la seule qui s'oppose à la rigueur de la solution; mais il est aisé de voir qu'elle influe infiniment peu sur l'exactitude des résultats, lorsque l'on suppose les durées très-petites.

(134.) Soit

r la moyenne distance de la Terre au Soleil;

F la force centrale du Soleil à la distance r; cette force se mesure par l'espace parcouru dans un temps donné; ainsi, par exemple, pour une minute de temps, la quantité F est le sinus verse de l'arc moyen de la Terre, parcouru pendant une minute;

R'' le rayon vecteur de la Comète, lors de la seconde observation;

il est évident que la force centrale qui agit sur la Comète

à la diſtance R'', a pour expreſſion $\frac{Fr^2}{R''^2}$. Cette force agit toute entière dans le ſens du rayon vecteur ; & ſi on la décompoſe ſuivant les coordonnées θ'' & v'' de la trajectoire, il eſt clair que la force qui agit ſuivant l'abſciſſe θ'', aura pour expreſſion $\frac{Fr^2\theta''}{R''^3}$, & que la force qui agit ſuivant l'ordonnée v'', aura pour expreſſion $\frac{Fr^2v''}{R''^3}$. On ſait en général, que la différentielle de la vîteſſe eſt à la différentielle du temps, comme la force accélératrice eſt à l'unité ; de plus, $\frac{d\theta''}{d\varphi}$ eſt évidemment l'expreſſion de la vîteſſe dans la direction de l'abſciſſe θ'' ; donc en ſuppoſant $d\varphi$ conſtant, $\frac{d^2\theta''}{d\varphi}$ eſt la différentielle de la vîteſſe, ſuivant la même direction ; d'ailleurs, $\frac{Fr^2\theta''}{R''^3}$ eſt l'expreſſion de la force accélératrice qui agit dans le ſens de l'abſciſſe θ'' ; donc en vertu de ce qui vient d'être dit, $\frac{d^2\theta''}{d\varphi} : d\varphi :: \frac{Fr^2\theta''}{R''^3} : 1$; donc

$$(1)\quad \frac{d^2\theta''}{d\varphi^2} + \frac{Fr^2\theta''}{R''^3} = 0.$$

J'ai mis le ſigne + devant le ſecond terme, parce que la force centrale tend à diminuer la vîteſſe, ſuivant la direction θ''.

Par des raiſonnemens analogues, on prouve que

$$(2)\quad \frac{d^2v''}{d\varphi^2} + \frac{Fr^2v''}{R''^3} = 0.$$

(135.) Il eſt aiſé de conclure de-là, que les ſéries qui expriment les valeurs de θ', v', θ''', v''', s'arrêtent après le troiſième terme. En effet $\frac{d^3\theta''}{d\varphi^3} = d\left(\frac{d^2\theta''}{d\varphi^2}\right)$; or $\frac{d^2\theta''}{d\varphi^2}$ eſt, par la ſuppoſition, égal à $\frac{Fr^2\theta''}{R''^3}$, & cette quantité eſt conſtante, ſi l'on

ſuppoſe

ſuppoſe la force centrale conſtante ; donc $\frac{d^3\theta''}{d\varphi^3} = 0$, dans cette ſuppoſition, ainſi que les termes ſuivans. Donc les ſéries qui expriment θ', θ''', s'arrêtent après le troiſième terme ; & comme l'on peut dire la même choſe des ſéries qui expriment v', v''', on aura enfin

$$\theta' = \theta'' - \frac{d\theta''}{d\varphi} t - \frac{1}{2} \frac{Fr^2\theta''}{R''^3} t^2;$$

$$v' = v'' - \frac{dv''}{d\varphi} t - \frac{1}{2} \frac{Fr^2 v''}{R''^3} t^2;$$

$$\theta''' = \theta'' + \frac{d\theta''}{d\varphi} t' - \frac{1}{2} \frac{Fr^2\theta''}{R''^3} t'^2;$$

$$v''' = v'' + \frac{dv''}{d\varphi} t' - \frac{1}{2} \frac{Fr^2 v''}{R''^3} t'^2.$$

(136.) Nous avons dit que dans les derniers calculs, la force centrale étoit regardée comme conſtante. M. de la Grange, dans ſon Mémoire, ne parle point de cette ſuppoſition, & il ſe contente de dire, que dans les expreſſions de θ', v', θ''', v''', il néglige les termes ultérieurs aux troiſièmes termes des ſéries, comme infiniment petits. Cette manière d'enviſager la queſtion revient préciſément à regarder la force centrale comme conſtante pendant la petite durée des obſervations que l'on compare. J'aurois donc pu énoncer la queſtion de la même manière que M. de la Grange ; mais j'ai préféré de donner une idée des termes que l'on néglige, en énonçant préciſément le principe auquel cette négligence peut être rapportée.

De la forme rigoureuſe des équations du §. 32.

(137.) Nous avons vu (*§. 125*) que

$$H = \theta''v' - \theta'v''; \quad M = \theta'''v' - \theta'v'''; \quad Q = \theta'''v'' - \theta''v'''.$$

Si dans ces dernières expreſſions, l'on ſubſtitue à θ', v', θ''', v''', leurs valeurs tirées du *§. 135*, l'on aura

$$H = \frac{v'' d\theta'' - \theta'' dv''}{d\varphi}\, t;$$

$$M = \frac{v'' d\theta'' - \theta'' dv''}{d\varphi}\, \vartheta\left(1 - \tfrac{1}{2}\, \frac{Fr^2}{R''^3}\, tt'\right);$$

$$Q = \frac{v'' d\theta'' - \theta'' dv''}{d\varphi}\, t'.$$

Si l'on ſubſtitue ces valeurs de H, M, Q dans les expreſſions de Γ', Γ'', Γ''' du *ſ. 127*, & que l'on ſuive une analyſe entièrement ſemblable à celle du *ſ. 129*, l'on aura, dans le cas des intervalles égaux entre les obſervations, ou dans le cas que l'on croiroit pouvoir négliger les troiſièmes puiſſances du petit accroiſſement de l'arc de l'orbite terreſtre diviſé par le cube du rayon; l'on aura, dis-je,

$$\Gamma' = -\frac{v'' d\theta'' - \theta'' dv''}{d\varphi}\left[\frac{\vartheta tt'}{2}\, T''^2 \left(\frac{m^2}{r^2} - \frac{Fr^2}{R''^3}\right) \text{ſin. } (B' - A'')\right];$$

$$\Gamma'' = -\frac{v'' d\theta'' - \theta'' dv''}{d\varphi}\left[\frac{\vartheta tt'}{2}\, T''^2 \left(\frac{m^2}{r^2} - \frac{Fr^2}{R''^3}\right) \text{ſin. } (B'' - A'')\right];$$

$$\Gamma''' = -\frac{v'' d\theta'' - \theta'' dv''}{d\varphi}\left[\frac{\vartheta tt'}{2}\, T''^2 \left(\frac{m^2}{r^2} - \frac{Fr^2}{R''^3}\right) \text{ſin. } (B''' - A'')\right];$$

donc, en ſubſtituant ces valeurs dans les équations (3), (4) & (5) du *ſ. 127*, & conſervant les définitions de μ', μ'', μ''', du *ſ. 32*, l'on aura

$$(1)\quad t'\mu''\Delta' - \vartheta\left(1 - \tfrac{1}{2}\, \frac{Fr^2}{R''^3}\, tt'\right) \mu'\Delta'' = 0$$

$$(2)\quad t'\mu'''\Delta' - t\mu'\Delta''' = 0;$$

$$(3)\quad t\mu''\Delta''' - \vartheta\left(1 - \tfrac{1}{2}\, \frac{Fr^2}{R''^3}\, tt'\right) \mu'''\Delta'' = 0.$$

(138.) L'équation (2) du *paragraphe précédent*, eſt identiquement la même que l'équation (2) du *ſ. 32;* mais les équations (1) & (3) diffèrent des équations (1) & (3) du *ſ. 32*, par le petit coëfficient $-\tfrac{1}{2}\, \frac{Fr^2}{R''^3}\, tt'$. Si l'on conſidère cependant que F étant le ſinus verſe de l'arc de l'orbite

terreſtre décrit pendant une minute de temps, ce petit coëfficient ne peut être qu'infiniment petit par rapport à l'unité, dans les cas où le rayon vecteur de la Comète n'eſt pas lui-même très-petit, circonſtance qui empêcheroit la Comète de pouvoir être obſervée, puiſqu'alors elle feroit plongée dans les rayons du Soleil; on ſera tenté de conclure que dans tous les cas, ce coëfficient peut être négligé, & que les équations du *paragraphe précédent* coïncident avec celles du *§. 32.* Au reſte, je vais faire voir que quand même on s'en tiendroit rigoureuſement aux équations du *§. 137,* aucunes des concluſions de ce Mémoire ne feroient dérangées.

RÉPONSE à l'Objection que l'on pourroit faire contre les Méthodes de ce Mémoire, tirée de la forme des équations du §. 137.

(139.) On pourroit faire contre les méthodes de ce Mémoire, une objection tirée de la forme des équations du *§. 137.* Voici l'objection dans toute ſa force.

Vous avez affirmé, dira-t-on, que le Problème des Comètes ſe ramenoit au ſecond degré; mais vous avez exigé pour condition eſſentielle que l'on ait des équations de la forme ſuivante *(§. 25),*

$$\Delta''' = P\Delta', \qquad \Delta'' = P'\Delta',$$

P, P' étant des quantités connues; or vous ne rempliſſez point cette condition. En effet, vous avez bien *[§. 137, équation (2)]* une équation de la forme requiſe entre Δ''' & Δ'; mais l'équation entre Δ'' & Δ', renferme la variable dans l'expreſſion de P'; puiſque *[§. 137, équation (1)]* P' ſuppoſe la connoiſſance de R'', qui dépend elle-même de la diſtance de la Comète à la Terre.

Je pourrois d'abord répondre, que ſi l'on n'admet point la forme des équations du *§. 32* comme rigoureuſe, on ne peut au moins s'empêcher de convenir que ces équations ne ſoient très-près d'être exactes; d'où je conclurois qu'il

eſt poſſible, ſans compliquer le calcul, d'avoir égard au coëfficient $\frac{1}{2}\frac{Fr^2}{R''^3}tt'$. On feroit alors un premier calcul, dans lequel on négligeroit ce coëfficient; l'on en concluroit la valeur approchée de la diſtance de la Comète à la Terre, lors de l'obſervation Δ''; l'on calculeroit enſuite la valeur correſpondante de R'', par l'équation (2) du *§. 39*, & l'on rectifieroit les réſultats, en faiſant entrer dans un nouveau calcul, le petit terme $\frac{1}{2}\frac{Fr^2}{R''^3}tt'$ qui feroit connu. L'on auroit alors une équation $\Delta'' = P'\Delta'$ de la forme requiſe dans le *§. 32*. Je pourrois ajouter que les valeurs de $\Delta', \Delta'', \Delta'''$, données par M. de la Grange, ſuppoſent les équations (1), (2), (3) du *§. 32*; mais, ſans nous arrêter à cette réponſe indirecte, nous remarquerons que tout conſiſte à faire entrer dans le calcul une nouvelle obſervation. En effet, ſoient

$\Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta''''$, les obſervations que je déſigne par les diſtances correſpondantes $\Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta''''$, de la Comète à la Terre, lors de ces obſervations.

Il eſt évident, que ſi l'on conſidère d'abord les obſervations $\Delta', \Delta'', \Delta'''$, l'on aura rigoureuſement *[§. 137, équat. (2)]* entre Δ' & Δ''', une équation de la forme de celle dont eſt queſtion dans le *§. 32*, & dans laquelle, en ſuppoſant $\Delta''' = P'\Delta'$, P' ne renfermera point d'inconnues. Conſidérons maintenant les obſervations $\Delta', \Delta'', \Delta''''$, l'on aura, par la même raiſon, entre Δ' & Δ'''', une équation de la forme de celles dont eſt queſtion dans le *§. 32*, & dans laquelle, en ſuppoſant $\Delta'''' = P\Delta'$, P ne renfermera point d'inconnues. On peut donc ſatisfaire rigoureuſement aux conditions preſcrites pour ramener le Problème au ſecond degré.

On ſatisferoit également à la condition, en conſidérant les obſervations $\Delta''', \Delta'''', \Delta'''''$, & en cherchant le rapport entre Δ''' & Δ'''''. Car, conformément aux remarques du *§. 33*, on concluera facilement le rapport entre Δ' & Δ'''''; l'on

aura donc les rapports entre Δ' & Δ''', Δ' & Δ''''', ſans que ces rapports renferment d'inconnues, & la condition ſera remplie.

(140.) On pourroit encore objecter que l'équation (2) du *§. 137* ne renfermant aucun terme qui dépende de la loi de la force centrale, on auroit la même équation, ſi la force centrale étoit nulle, & ſi par conſéquent la trajectoire étoit rectiligne; le Problème propoſé n'eſt donc réſolu, dira-t-on, que pour le cas de la trajectoire rectiligne.

Je réponds que la conſéquence n'eſt pas exacte. Il eſt bien vrai, que quelle que ſoit la loi de la force centrale, les diſtances de la Comète à la Terre ſont combinées d'une manière ſemblable avec les obſervations; mais comme les obſervations ſont différentes, ſuivant la loi de la force centrale, il ſuit ſeulement, que l'on combine d'une manière ſemblable des quantités différentes. Le réſultat, relativement aux diſtances de la Comète à la Terre, eſt donc différent dans les diverſes hypothèſes des forces centrales, non à raiſon de l'équation, mais à raiſon des obſervations.

Du cas particulier où les latitudes de la Comète ſont très-petites.

(141.) On pourroit penſer que ſi les latitudes de la Comète étoient très-petites, les méthodes de ce Mémoire ſeroient ſujettes à quelques inconvéniens. En effet, tous les termes des équations, par leſquels on détermine, ſoit les rapports des diſtances de la Comète à la Terre, ſoit les valeurs abſolues de ces diſtances, renfermant les ſinus des latitudes de la Comète, il ſeroit à craindre que la moindre erreur dans les latitudes ne mît la méthode en défaut; puiſque les erreurs ſur les latitudes ſeroient du même ordre que les latitudes. L'objection ſeroit bien plus forte, ſi la Comète ſe mouvoit dans le plan de l'Écliptique, car alors on n'auroit plus d'équations.

Je pourrois d'abord répondre qu'il eſt toujours facile

d'éviter l'inconvénient dont il vient d'être queſtion, en interpolant les latitudes, & en rectifiant les obſervations; je pourrois dire enſuite que la méthode étant générale, on ne peut avec juſtice, objecter l'inconvénient d'un cas particulier; mais ſans entrer dans cette diſcuſſion, voici le procédé qu'il faudroit ſuivre.

(142.) Nous avons vu (§. 125) que pour trois obſervations Δ', Δ'', Δ''', l'on a les équations ſuivantes,

$$(1)\left.\begin{matrix} QT'\text{cof.}A' - MT''\text{cof.}A'' + HT'''\text{cof.}A''' - Q\Delta'\text{cof.}B'\text{cof.}L' \\ + M\Delta''\text{cof.}B''\text{cof.}L'' - H\Delta'''\text{cof.}B'''\text{cof.}L''' \end{matrix}\right\} = 0.$$

$$(2)\left.\begin{matrix} QT'\text{fin.}A' - MT''\text{fin.}A'' + HT'''\text{fin.}A''' - Q\Delta'\text{fin.}B'\text{cof.}L' \\ + M\Delta''\text{fin.}B''\text{cof.}L'' - H\Delta'''\text{fin.}B'''\text{cof.}L''' \end{matrix}\right\} = 0.$$

Si l'on multiplie l'équation (1) par fin. B''', que l'on multiplie pareillement l'équation (2) par cof. B''', & que l'on ſouſtraie ces deux nouvelles équations l'une de l'autre, l'on aura

$$(3)\ QT'\text{fin.}(B''' - A') - MT''\text{fin.}(B''' - A'') + HT'''\text{fin.}(B''' - A''') \\ - Q\Delta'\text{cof.}L'\text{fin.}(B''' - B') + M\Delta''\text{cof.}L''\text{fin.}(B''' - B'') = 0,$$

ou plutôt, en ſubſtituant t à H, t' à Q, & $\vartheta\left(1 - \frac{1}{2}\frac{Fr^2tt'}{R''^3}\right)$ à M,

$$(4)\ t'T'\text{fin.}(B''' - A') - \vartheta\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{Fr^2tt'}{R''^3}\right)T''\text{fin.}(B''' - A'') \\ + tT'''\text{fin.}(B''' - A''') - t'\Delta'\text{cof.}L'\text{fin.}(B''' - B') \\ + \vartheta\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{Fr^2tt'}{R''^3}\right)\Delta''\text{cof.}L''\text{fin.}(B''' - B'') = 0.$$

L'on aura pareillement pour trois obſervations, Δ', Δ'', Δ'''',

$$(5)\ t''T'\text{fin.}(B'''' - A') - \vartheta'\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{Fr^2tt''}{R''^3}\right)T''\text{fin.}(B'''' - A'') \\ + tT''''\text{fin.}(B'''' - A'''') - t''\Delta'\text{cof.}L'\text{fin.}(B'''' - B') \\ + \vartheta'\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{Fr^2tt''}{R''^3}\right)\Delta''\text{cof.}L''\text{fin.}(B'''' - B'') = 0.$$

Dans ces équations, nous entendons par

t le nombre de minutes de temps écoulées entre l'obſerv. Δ' & Δ'';
t' le nombre de minutes de temps écoulées entre l'obſerv. Δ'' & Δ''';
ϑ le nombre de minutes de temps écoulées entre l'obſerv. Δ' & Δ''';
t'' le nombre de minutes de temps écoulées entre l'obſerv. Δ'' & Δ'''';
ϑ' le nombre de minutes de temps écoulées entre l'obſerv. Δ' & Δ''''.

(143.) Si l'on élimine Δ' coſ. L', au moyen des équations (4) & (5) du *paragraphe précédent*, l'on aura

$$
\begin{aligned}
(1)\; & t't''T'[\text{ſin.}(B'''-A')\,\text{ſin.}(B''''-B')-\text{ſin.}(B''''-A')\,\text{ſin.}(B'''-B')] \\
& -T''[\vartheta t''(1-\tfrac{1}{2}\tfrac{Fr^2tt'}{R''^3})\,\text{ſin.}(B'''-A'')\,\text{ſin.}(B''''-B') \\
& -\vartheta't'(1-\tfrac{1}{2}\tfrac{Fr^2tt''}{R''^3})\,\text{ſin.}(B''''-A'')\,\text{ſin.}(B'''-B')] \\
& +tt''T'''\,\text{ſin.}(B'''-A''')\,\text{ſin.}(B''''-B') \\
& -tt'T''''\,\text{ſin.}(B''''-A'''')\,\text{ſin.}(B'''-B') \\
& +\Delta''\,\text{coſ.}\,L''[\vartheta t''(1-\tfrac{1}{2}\tfrac{Fr^2tt'}{R''^3})\,\text{ſin.}(B'''-B'')\,\text{ſin.}(B''''-B') \\
& -\vartheta't'(1-\tfrac{1}{2}\tfrac{Fr^2tt''}{R''^3})\,\text{ſin.}(B''''-B'')\,\text{ſin.}(B'''-B')]=0.
\end{aligned}
$$

(144.) Il eſt donc évident, qu'au moyen des équations de ce Mémoire, on peut réſoudre le cas particulier où les latitudes de la Comète ſeroient très-petites & même nulles. Il eſt vrai que le Problème eſt alors d'un degré élevé; mais il ſe ramèneroit au premier, ſi, conformément aux remarques du *§. 139*, l'on croyoit pouvoir négliger les petits termes $\frac{1}{2}\frac{Fr^2tt'}{R''^3}$, $\frac{1}{2}\frac{Fr^2tt''}{R''^3}$ *.

---

* M. de la Place, dans un Mémoire lû à l'Académie, a réſolu ce dernier Problème, & en général les principales queſtions relatives aux Comètes; mais il a employé une analyſe entièrement différente de la mienne. Je m'empreſſe d'annoncer ſon travail.

(145.) L'on ſait que le Problème des Comètes n'exige que cinq obſervations, trois de longitudes & deux de latitudes, ou réciproquement; cependant la détermination des valeurs de μ', μ'', μ''', renferme trois longitudes & trois latitudes de la Comète, ce qui pourroit faire croire que l'on a employé plus d'obſervations qu'il n'eſt néceſſaire. Mais l'on ſera bientôt détrompé, lorſque l'on réfléchira que la détermination de l'orbite des Comètes n'exige en effet que cinq obſervations, lorſque l'on ſuppoſe l'orbite parabolique. Lorſqu'au contraire l'on ſuppoſe en général que l'orbite eſt une ſection conique, alors il faut ſix obſervations, puiſque la ſolution peut également amener l'ellipſe ou l'hyperbole.

(146.) Les méthodes de ce Mémoire, conſidérées du côté de la théorie, me paroiſſent très-exactes; & ſi leur uſage découvroit quelqu'inexactitude dans les réſultats, je ne doute point qu'on ne dût l'attribuer à l'inexactitude des obſervations.

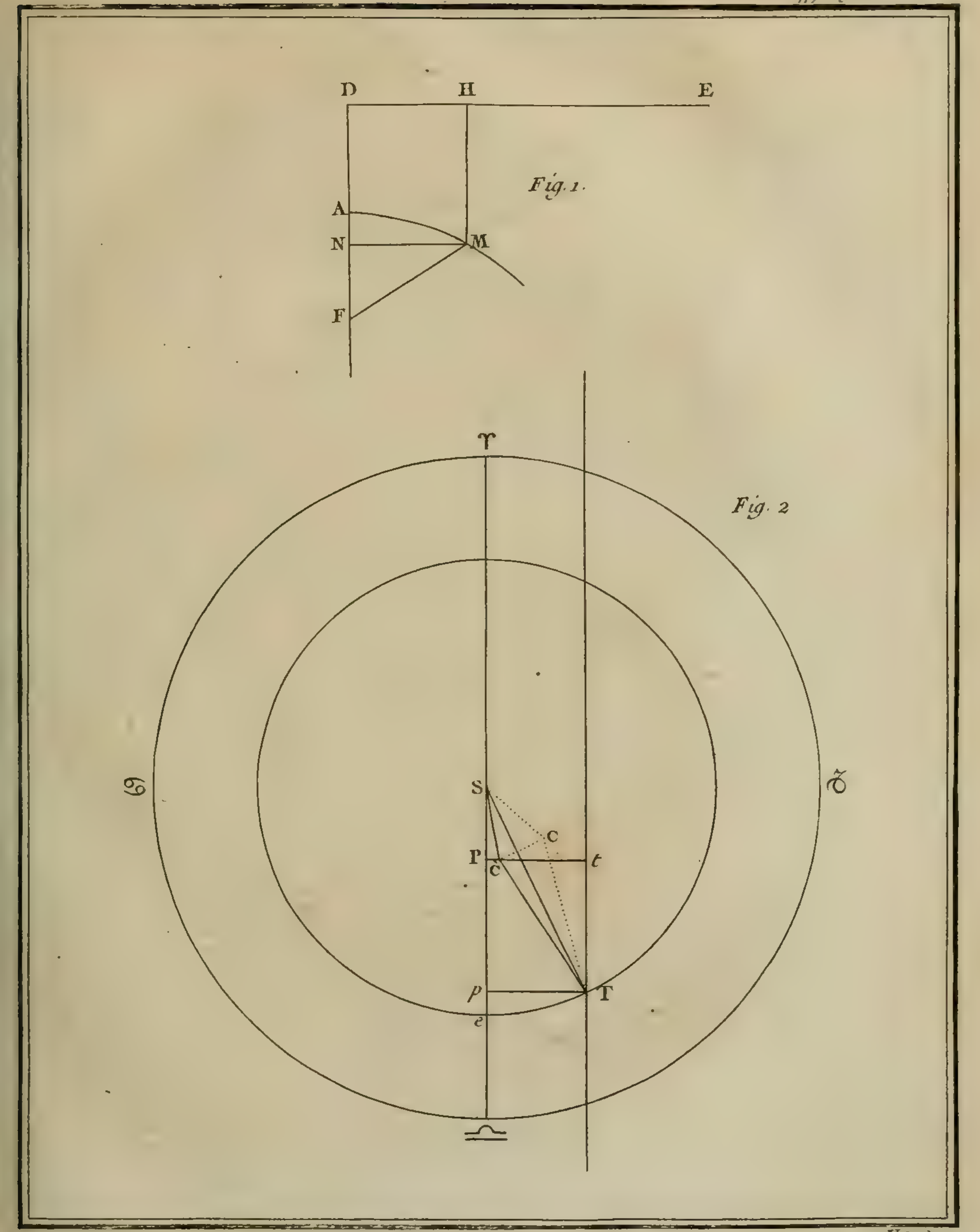
REMARQUES ſur l'évaluation de la quantité F; *ſur la méthode du* §. 36; *& ſur les équations (1) & (1) des* §§. 24, 25; *(2) & (4) des* §§. 18 & 93.

(147.) Je terminerai cette analyſe en faiſant remarquer que dans le *§. 134,* nous n'avons donné à la quantité F que la moitié de ſa valeur; je m'empreſſe de rectifier cette erreur *.

J'obſerverai auſſi que la méthode du *§. 36* étant fondée ſur des propriétés de la parabole, ne doit être employée qu'autant que l'on ſuppoſe que la trajectoire de la Comète eſt parabolique. J'obſerverai enfin, que l'équation (1) du *§. 24,* ſuppoſe uniquement que la Comète ſe meut dans un même plan. L'équation (1) du *§. 25*, ſuppoſe de plus, que la force centrale eſt en raiſon inverſe du quarré des diſtances; les équations (2) & (4) des *§§. 18 & 93,* particulariſent la ſection conique.

* Si l'on ſuppoſe $\log. r = 10{,}0000000$, l'on a $\log. \frac{1}{2} Fr^2 = 19{,}8534094$.

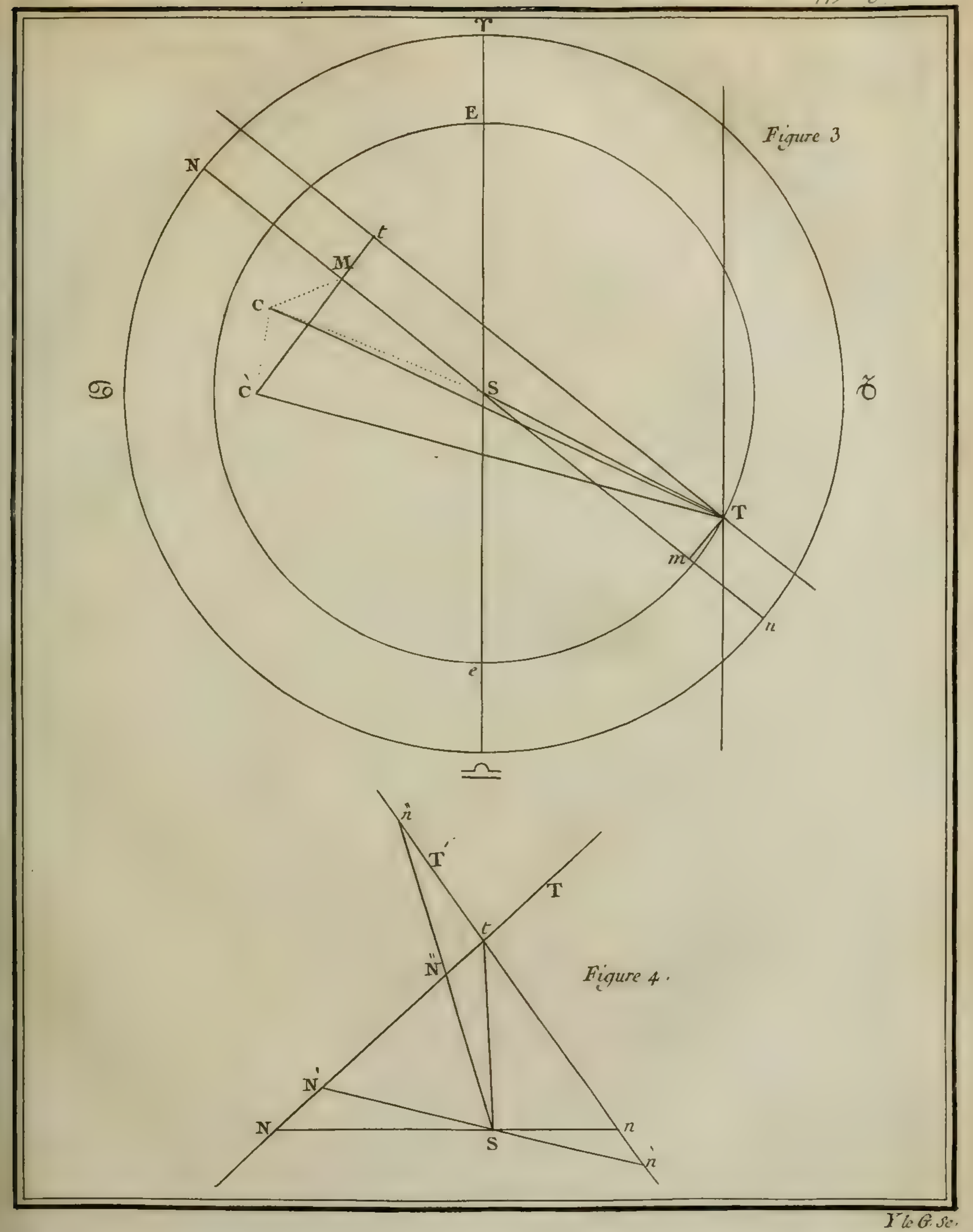
OBSERVATION



Y. le G. Sc.

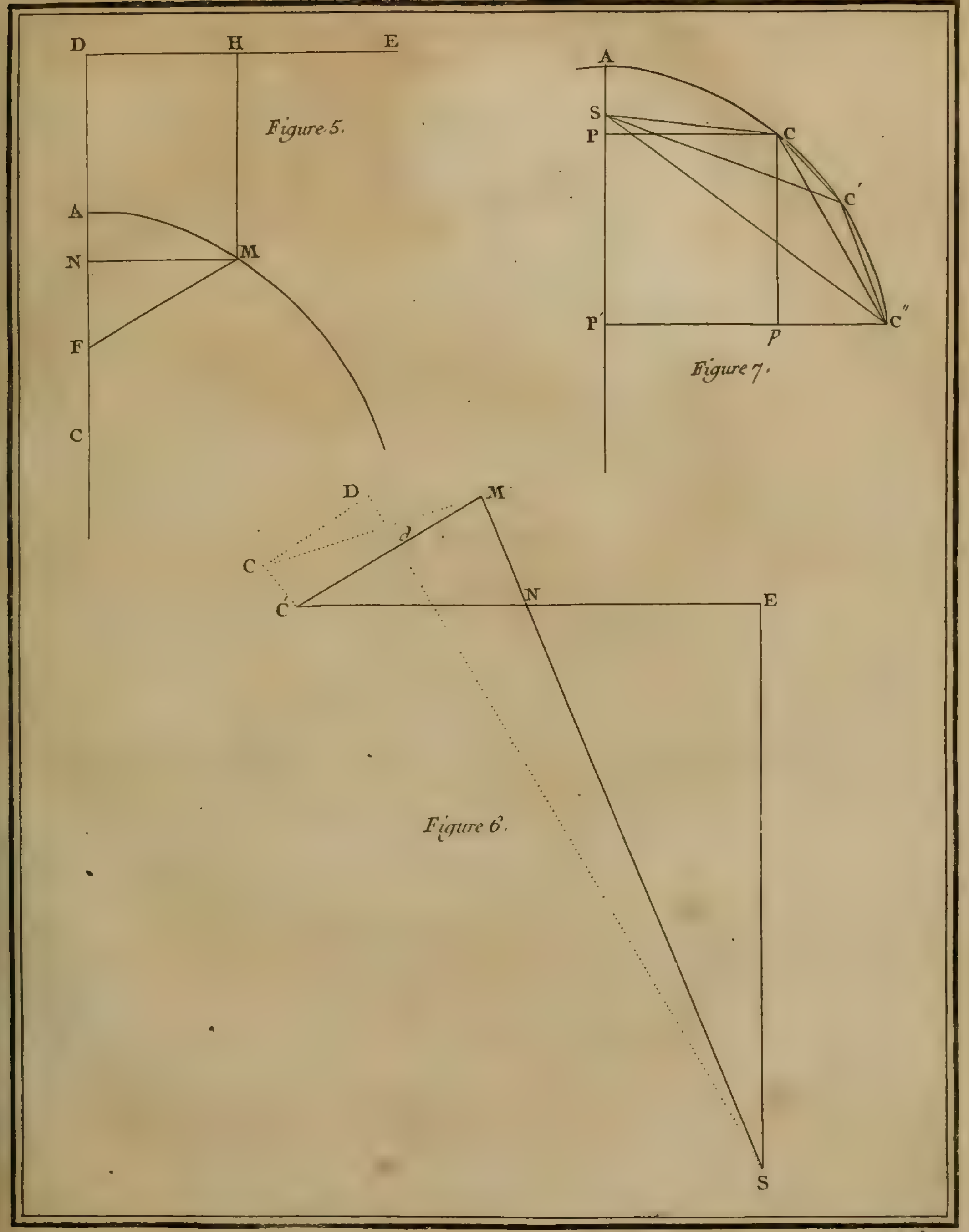


Mém. de l'Ac. R. des Sc. An. 1779. Pag. 168. Pl. V.



Y le G. Sc.





Y. le G. Sc.


NATURAL HIST

OBSERVATION
DE L'ÉCLIPSE DE LUNE,
Faite à l'Obſervatoire de la Marine, la nuit du 29 au 30 Mai 1779.

Par M. MESSIER.

LE Ciel fut couvert pendant la journée du 29 Mai; vers les 8 heures du ſoir, il tomba une petite pluie d'orage; vers les 9 heures, le ciel s'éclaircit, & toute la nuit du 29 au 30 le ciel fut ſerein. Le 29, vers les 10 heures du ſoir, je comparai la Lune à l'étoile ω d'*Ophiucus,* cinquième grandeur; j'en rapporterai les obſervations faites à ma lunette achromatique, garnie d'un micromètre à fils. Lû le 2 Juin 1779.

J'ai employé la même lunette pour l'obſervation de l'Éclipſe de Lune: le commencement de l'Éclipſe, ſuivant le Livre de la *Connoiſſance des Temps*, devoit avoir lieu le 30 Mai à $3^h\,15'$ du matin; ſon immerſion à $4^h\,25'$; la Lune alors devoit être couchée: de manière que je n'ai pu obſerver que le commencement de l'Éclipſe, l'entrée des premières taches dans l'ombre & la diſtance des cornes de l'ombre. L'ombre ſur la Lune ſe diſtinguoit très-bien d'avec la pénombre; le ciel étoit beau & la Lune bien terminée: voici mes obſervations.

La Lune comparée à l'étoile ω d'*Ophiucus*, la Pendule réglée ſur les fixes, & le fil du micromètre ſuivant le parallèle de l'Étoile.

ANNÉE 1779.	PASSAGES à la PENDULE.	TEMPS vrai des PASSAGES	DIFFÉR de HAUT.	
	H. M. S.	H. M. S.	M. S.	
Mai 29	14. 22. 20	9. 57. 2½	......	1.er & 2.e bord de la Lune au fil horaire.
	14. 24. 32½	9. 59. 14½	......	
	14. 28. 51	....	10. 15½	ω d'*Ophiucus*, supérieur au bord supér. de la Lune.
	14. 32. 48½	10. 7. 29½	......	1.er & 2.e bord de la Lune au fil horaire.
	14. 35. 2	10. 9. 42	......	
	14. 39. 4½	....	12. 3¼	ω d'*Ophiucus*, supérieur au bord supér. de la Lune.

A $15^h\, 1'$, Temps vrai, diamètre de la Lune, mesuré suivant son parallèle, & trouvé de $29'\, 43''\, \frac{1}{2}$.

OBSERVATIONS de l'Éclipse.

ANNÉE 1779.	TEMPS vrai.	
	H. M. S.	
Mai 29	15. 2. 52	la pénombre commence à être sensible au bord de la Lune.
	15. 9. 21	la pénombre augmentée.
	15. 10. 51	commencement de l'Eclipse ou de l'ombre entre *Grimaldus* & *Schikardus*; 22 minutes du bord supérieur de la Lune, mesuré au micromètre, suivant le mouvement horaire des Étoiles.
	15. 15. 20	l'ombre à *Grimaldus*.
	15. 16. 20	*Grimaldus* à moitié dans l'ombre.
	15. 16. 20	l'ombre à *Schikardus*.
	15. 18. 25	l'ombre touche *Mare humorum*.
	15. 20. 19	*Mare humorum* à moitié dans l'ombre.
	15. 22. 34	l'ombre couvre *Mare humorum*.
	15. 24. 19	l'ombre à *Capuanus*.

ANNÉE 1779.	TEMPS vrai. H. M. S.	
Mai 29	15. 27. 3	l'ombre à *Keplerus.*
	15. 28. 48	*Keplerus* à moitié dans l'ombre.
	15. 29. 57	l'ombre à *Tycho.*
	15. 30. 48	*Tycho* à moitié dans l'ombre.
	15. 30. 58	*Keplerus* dans l'ombre.
	15. 31. 37	*Tycho* dans l'ombre.
	15. 32. 37	l'ombre à *Ariſtarchus.*
	15. 35. 1	l'ombre au bord de *Copernicus.*
	15. 36. 22	le dernier bord de la Lune ceſſe de paroître derrière des cheminées pour ne plus être viſible.

Diſtance des Cornes en parties de degré.

TEMPS vrai. H. M. S.	DISTANC. des CORNES. M. S.
15. 18. 0	14. 0
15. 20. 54	17. 2
15. 27. 3	22. 0



OBSERVATIONS
DE L'ÉCLIPSE DE SOLEIL, DU 14 JUIN 1779,
Observée à Paris, de l'Observatoire de la Marine.

Par M. MESSIER.

Lû le 16 Juin 1779.

L'ÉCLIPSE de Soleil du 14 Juin, devoit avoir lieu, suivant le Calcul de M. Jeaurat, présenté à l'Académie dans la Séance du 12; le commencement à Paris, à $7^h 29' 13''$ du matin; son milieu, à $8^h 5'$; sa fin, à $8^h 43' 54''$; & sa grandeur, de $6' 23''$ de degré.

Le 12 Juin, j'avois réglé ma pendule, & je connoissois parfaitement sa marche, par vingt-une hauteurs correspondantes du bord supérieur du Soleil, qui s'accordoient toutes à la même seconde, & par les midis observés à mon instrument des passages.

Le 14 au matin, le ciel ne donnoit aucune espérance de faire l'observation, il étoit entièrement couvert, & les nuages venoient du Midi, de manière que le commencement n'a pas été observé. Vers les $7^h 50'$, le ciel s'étoit un peu éclairci, & le Soleil paroissoit foiblement à travers des nuages rares; l'Éclipse alors étoit déjà très-sensible. A $7^h 53' 18''$ de temps vrai, je commençai mes observations en y employant une lunette achromatique de 3 pieds $\frac{1}{2}$, à triple objectifs, montée sur une machine parallactique, & garnie d'un micromètre à fils qui s'inclinoit dans tous les sens, qui a servi à mesurer la partie restante éclairée du Soleil, & cette observation m'a donné la grandeur de l'Éclipse en minutes & en secondes de degrés, d'après le diamètre du Soleil, que j'avois mesuré en partie du micromètre; ces observations sont au nombre de treize: les voici en Table.

TEMPS VRAI.	PARTIE éclairée du SOLEIL, en minutes & fecondes de degré.	PARTIE éclipfée du SOLEIL, en minutes & fecondes de degré.
H. M. S.	M. S.	M. S.
7. 53. 18	26. 5	5. 28
7. 58. 32	25. 40	5. 53
8. 1. 17	25. 5	6. 28
8. 5. 10	25. 4	6. 29
8. 6. 49	25. 3	6. 30
8. 12. 49	25. 20	6. 13
8. 14. 5	25. 34	5. 59
8. 35. 7	29. 15	2. 18
8. 36. 5	29. 24	2. 9
8. 38. 15	29. 51	1. 42
8. 39. 14	30. 2	1. 31
8. 40. 47	30. 34	0. 59
8. 41. 28	31. 5	0. 28

Pour l'obfervation de la fin de l'Éclipfe, le ciel étoit devenu parfaitement beau & fans nuages, aux environs du Soleil, de manière que l'obfervation a été faite avec précifion & à la feconde.

Fin de l'Éclipfe à $8^h 44' 8'' \frac{1}{2}$ de temps vrai.

L'Éclipfe a fini à $8' 24''$ du bord fupérieur du Soleil, fuivant fon mouvement en afcenfion droite.

A $8^h 48' 18''$ de temps vrai, je mefurai le diamètre du Soleil, fuivant fon mouvement en afcenfion droite, que je trouvai de dix-huit cents quatre-vingt-deux parties du micromètre, qui répondent à $31' 33''$.

Vers le milieu de l'Éclipse, je vis au bord de la Lune des inégalités sensibles, comme je l'avois déjà remarqué dans l'Éclipse de Soleil du 4 Juin 1769 *(a)*, & comme M. le Duc de Croy l'avoit aussi observé à Calais, dans celle du 16 Août 1765 *(b)*.

M. l'Abbé Clouet, qui observoit à l'hôtel de M. le Duc de Croy, rue du Regard, avec un télescope Grégorien de 4 pieds de foyer, a marqué la fin de l'Éclipse à $8^h 44' 0''$, à une montre à secondes, qui fut comparée peu de minutes après l'observation, sur la pendule de mon Observatoire.

L'hôtel de M. le Duc de Croy est 2″2 à l'occident du Méridien de l'Observatoire royal.

Rue de l'Université, 2 secondes à l'occident de la Méridienne de l'Observatoire, M. le Président de Saron, avec une lunette achromatique, semblable à la mienne, a observé la fin de l'Éclise à .... $8^h 44' 2''$.

M. du Séjour, au même endroit, avec un télescope Grégorien, d'un pied, à .... 8. 44. 5.

Ils virent, de même que moi, de petites éminences à la Lune.

(a) Mémoires de l'Académie, *année 1771, page 12, planche I.re*

(b) Mémoires de l'Académie, *année 1765, page 554, planche XVII.*



OBSERVATION DE L'ÉCLIPSE TOTALE DE LUNE, LE 23 NOVEMBRE AU SOIR 1779,

Faite à Paris, à l'Obſervatoire de la Marine.

Par M. MESSIER.

Lû le 27 Nov. 1779.

LE jour de l'Obſervation, le Ciel ne donnoit aucune eſpérance de voir l'Écliple: pendant la matinee, il étoit tombé de la neige & de la pluie; l'après-midi le ciel fut totalement & également couvert juſque vers les 9 heures, que les nuages ſe ſéparèrent: la Lune parut de temps à autre couverte de nuages rares, en grande partie écliplée, & il ne fut pas poſſible d'obſerver la ſortie des taches de l'ombre.

Dans les intervalles que laiſſoient les nuages pour apercevoir la Lune, je meſurai la partie éclairée, par le moyen d'un micromètre à fils, adapté à une lunette achromatique de 3 pieds $\frac{1}{2}$, à triple objectifs.

Les obſervations que je vais rapporter ſont un peu douteuſes, à cauſe des nuages qui ne laiſſoient que ſoupçonner les limites de l'ombre.

TEMPS vrai.	PARTIE éclairée.	PARTIE éclipſée.
H. M. S.	M. S	M. S.
9. 12. 53	8. 18	24. 36
9. 22. 52	13. 10	19. 44
9. 32. 50	16. 14	16. 40
9. 34. 50	18. 10	14. 44

Après cette dernière obſervation, la Lune fut couverte; mais quelques minutes avant la fin de l'Éclipſe, les nuages

s'éclaircirent, & la Lune devint claire, cependant toujours couverte de nuages rages.

Temps vrai.

À 9h 55′ 36″, j'estimai la fin de l'Éclipse.

9. 55. 56, fin plus certaine ; la Lune étoit assez claire pour juger de la fin ; l'Éclipse finit entre *Mare crisium* & *Mare fœcunditatis.*

10. 3. 14, la Lune devenue encore plus claire ; la pénombre étoit sensible.

10. 6. 14, il restoit encore un peu de pénombre.

10. 11. 14, on voyoit encore un soupçon de pénombre à la lunette; à la vue simple, elle paroissoit encore sensible.

Après l'Éclipse, je mesurai le diamètre apparent de la Lune, en parties du micromètre qui étoit adapté à ma lunette, les nuages rares qui affoiblissoient sa lumière peuvent bien rendre ces mesures douteuses.

TEMPS vrai. H. M. S.	DIAMÈT. M. S.	
9. 59. 45	32. 51 ½	mesuré suivant le cercle de déclinaison.
10. 1. 15	33. 4	diamètre horizontal.
10. 5. 15	32. 49 ½	suivant le cercle de déclinaison.

Après 11 heures du soir, le ciel devint en grande partie serein, & continua de l'être jusqu'après le passage de la Lune au Méridien que j'observai.

Le 1.er bord de la ☾ passa au Mér. à 12h 8′ 2″ 16‴ ½ } Temps vrai.
Le 2.e bord à . . . . 12. 10. 26. 43 ½

Après son passage au Méridien, je comparai la Lune à deux Étoiles qui en étoient près, & qui paroissoient en même temps que la Lune dans le même champ de la lunette achromatique :

achromatique : ces deux Étoiles furent estimées de la cinquième à la sixième grandeur, & comparées aux étoiles κ^1 & υ^1 du Taureau, l'une & l'autre de cinquième grandeur. Voici la position qui est résultée pour les deux Étoiles comparées à la Lune, pour le temps de l'observation.

N.° 1.... 61^d 20′ 4″ d'ascens. droite, & 21^d 1′ 51″ de déclin. bor.
N.° 2.... 61. 38. 47. 21. 13. 46.

OBSERVATION de la Lune avec les deux Étoiles n.ºs 1 & 2.

La nuit du 23 au 24 Novembre 1779.	TEMPS vrai.	DIFFÉR. de PASSAGE.	DIFFÉR. de HAUTEUR.
	H. M. S.	*M. S.*	*M. S.*
Étoile *n.° 1* au fil horaire du micromètre. .	12. 30. 29¾	1. 16	
Passage du premier bord de la Lune.....	12. 31. 45¾		
Passage du second bord de la Lune......	12. 34. 10¾		
Différence de hauteur ; l'Étoile supérieure au bord supérieur de la Lune...........	....	....	3. 47½
Étoile *n.° 2* au fil horaire.............	12. 31. 41¾	0. 4	
Passage du premier bord de la Lune......	12. 31. 45¾		
Différence de hauteur ; l'Étoile supérieure au bord supérieur de la Lune...........	....	....	15. 43
Étoile *n.° 1* au fil horaire.............	12. 41. 56¾	1. 38	
Passage du premier bord de la Lune.....	12. 43. 34¾		
Passage du second bord...............	12. 45. 58¾		
Différence de hauteur ; l'Étoile supérieure au bord supérieur de la Lune...........	....	....	1. 58
Étoile *n.° 2* au fil horaire.............	12. 43. 8¼	0. 26½	
Passage du premier bord de la Lune.....	12. 43. 34¾		
Différence de hauteur ; l'Étoile supérieure au bord supérieur de la Lune..........	....	....	13. 54

PREMIER MÉMOIRE
SUR LA VOIX.

De la ſtructure des Organes qui ſervent à la formation de la Voix, conſidérés dans l'Homme & dans les différentes claſſes d'Animaux, & comparés entr'eux.

Par M. VICQ-D'AZYR.

Lû à l'Aſſemblée publique de la Saint-Martin 1779.

UN des uſages les plus importans du poumon, eſt ſans doute de diriger l'air, que ſes lobes ont reçu, vers les organes propres à la formation de la voix ; ainſi en même temps que le poumon établit une communication néceſſaire entre le fluide dans lequel nous ſommes plongés & les humeurs dont nos vaiſſeaux ſont remplis, l'organe de la voix qui eſt une dépendance de ce viſcère, en imprimant à l'air un mouvement vibratil, porte au loin l'expreſſion des idées, donne aux paſſions plus d'énergie, en leur fourniſſant un langage ſans lequel la Nature muette ſeroit vouée à un éternel ſilence, & établit entre les animaux une correſpondance auſſi prompte que commode, pour ſe communiquer leurs beſoins.

Mais comment l'air reçoit-il des modifications capables de produire ces merveilles? quel eſt cet inſtrument dont l'Art n'a point encore imité les effets? enfin comment la voix ſe forme-t-elle?

Le premier Anatomiſte qui ait traité ce ſujet d'une manière ſatisfaiſante, a été Galien : il a attribué les intonations de la voix humaine aux changemens dont la glotte eſt ſuſceptible. Fabrice d'Aquapendente ayant obſervé que la trachée-artère s'alonge & ſe raccourcit lorſque le larynx s'élève ou s'abaiſſe, crut apercevoir beaucoup d'analogie entre ce conduit & une flûte.

Perrault ajouta bien-tôt de nouveaux développemens à l'explication de Galien, & M. Dodart l'appuya par de

nouvelles probabilités, il réfuta ſur-tout la comparaiſon établie par Fabrice entre la trachée-artère & une flûte, & il démontra que le ſon étant, toutes choſes égales d'ailleurs, d'autant plus grave que le corps de la flûte eſt plus long, & la trachée s'alongeant au contraire dans la formation des ſons aigus, il ne peut y avoir aucune reſſemblance entre ces deux inſtrumens.

Juſqu'à cette époque on avoit ignoré la véritable théorie du ſon dans les inſtrumens à vent; un Géomètre célèbre, M. Euler, en découvrit les élémens, en conſidérant la colonne d'air que ces inſtrumens contiennent comme une corde vibrante, & en lui appliquant les mêmes formules qui conviennent aux cordes ordinaires; il prouva que parmi les différens inſtrumens de Muſique, les uns mettent l'air en mouvement par leurs vibrations, tandis que dans les autres l'air devient ſonore par lui-même; enfin il fit voir que l'ouverture par laquelle on introduit l'air dans les flûtes & dans les flageolets, n'influe pas ſur l'intonation; découvertes importantes qui devoient changer les idées des Phyſiciens ſur la formation de la voix.

M. Ferrein ſut profiter de ces obſervations; il commença par faire connoître l'erreur ſur laquelle le ſyſtème de M. Dodart étoit fondé, en démontrant qu'il eſt poſſible de produire des ſons artificiels avec le larynx, ſans que la glotte y ait aucune part, & même après l'avoir enlevée; il attribua tout le mécaniſme de la voix à la tenſion plus ou moins grande des ligamens, qu'il appela *cordes vocales,* & il rangea cet organe parmi les inſtrumens à cordes, l'air faiſant, ſuivant lui, les fonctions d'archet.

Cette nouvelle théorie eut d'abord plus de critiques que de ſectateurs; on ne doit point en être ſurpris: elle détruiſoit une explication donnée & reçue avec la même confiance depuis Galien. Les expériences de M. Ferrein, répétées par pluſieurs Anatomiſtes, furent confirmées par les uns & rejetées par les autres, & maintenant encore cette queſtion eſt au nombre de celles qui ont beſoin d'une nouvelle ſuite de

travaux pour fixer le jugement des Physiciens : ces considérations m'ont engagé à faire des recherches sur l'organe de la voix. J'ai pensé que je ne pourrois parvenir à connoître quelles sont les parties essentielles ou accessoires à la formation des sons, qu'en considérant ces parties dans les différentes classes d'animaux qui en sont pourvus. Il est de mon devoir de publier qu'il m'auroit été impossible d'exécuter ce projet, si M. Daubenton ne m'en eût fourni les moyens, en me donnant des facilités pour examiner l'organe de la voix dans un grand nombre de quadrupèdes & de reptiles qui font partie de la superbe collection du Cabinet du Roi, si enrichie & devenue si intéressante par les soins de M. de Buffon.

C'est un beau spectacle que de voir d'un coup-d'œil la disposition de ces instrumens variés à l'infini, avec lesquels chaque animal produit des modulations qui lui sont propres & peut contribuer au grand concert de la Nature. Depuis l'homme jusqu'au reptile, dans lequel la voix semble expirer pour se changer en un sifflement, la chaîne est immense : en la parcourant, je me suis arrêté sur les anneaux les plus remarquables. J'ai choisi, autant qu'il m'a été possible, les individus les plus éloignés les uns des autres, & je les ai toujours comparés avec l'homme.

Après avoir rappelé la forme du larynx humain, je considérerai cette partie dans les différentes classes de quadrupèdes, dans les oiseaux, & dans les reptiles ; & après avoir décrit, dans ce premier Mémoire, les organes de la voix des différens animaux, je ferai connoître dans le second, les expériences & les recherches propres à en indiquer le mécanisme.

Le larynx, dans l'homme, est une cavité disposée en manière de grotte, dans laquelle on sait que la voix se forme ; elle est composée de cinq cartilages, rendus mobiles les uns sur les autres par différens muscles ; on y remarque deux rétrécissemens ; l'un est placé à la partie supérieure ; on lui a donné le nom de *glotte :* deux membranes minces en composent les bords & un cartilage élastique, situé anté-

rieurement, & appelé l'*épiglotte*, empêche les corps étrangers d'y pénétrer, soit en divisant la colonne du liquide que l'on boit, soit en s'abaissant sur la glotte lorsque les alimens se portent vers l'œsophage. Le second rétrécissement est formé par deux ligamens, disposés parallèlement de devant en arrière, & que M. Ferrein a appelés du nom de *cordes vocales:* une excavation est pratiquée de chaque côté entre ces deux ouvertures.

Parmi les quadrupèdes, il n'y en a peut-être aucun qui n'ait dans le larynx à peu-près le même appareil, & il y en a beaucoup dans lesquels la dissection fait apercevoir des pièces surajoutées à celles dont le larynx humain est pourvu; de sorte que, si la plupart de ces animaux, avec beaucoup de moyens, ne produisent que des sons désagréables, la prééminence de la voix de l'homme ne doit pas être regardée seulement comme l'effet physique de sa constitution, mais encore comme le fruit de son industrie, & du besoin qu'il a de modifier ses sons pour exprimer un plus grand nombre d'idées.

Les singes étant ceux de tous les animaux qui ont, par leur structure, le plus de rapports avec l'homme, j'ai cru devoir les placer dans cette exposition, immédiatement après lui. Singes.

On cherche depuis long-temps à déterminer l'espèce de singe que Galien a disséqué: M. Camper croit avoir trouvé dans la structure du larynx, telle que Galien l'a décrite *(a)* un moyen assuré de reconnoître ce singe: on lit dans le Traité *De usu partium*, qu'il y a de chaque côté de l'épiglotte de cet animal, un conduit que l'on doit plutôt regarder comme une fissure que comme un trou, lequel communique avec un ventricule assez ample, placé aussi de chaque côté: M. Camper ayant rencontré cette même disposition dans l'orang-outang, auquel elle est particulière, nous paroît fondé à croire que ce singe est celui dont Galien a fait mention *(b):* trois orang-outangs, examinés avec soin par

---

(a) De usu partium, edit. Charter. tom. IV, lib. VII, cap. 11, p. 461.

(b) Transactions philosophiques, Of the royal Societe, of London, 1779, *Part. I, pag. 142 & suiv.*

M. Camper, lui ont toujours offert deux conduits placés au-dessous de l'os hyoïde à la partie supérieure du cartilage thyroïde, communiquans avec deux facs qu'il a appelés du nom de *ventricules*, lesquels étoient placés sur les côtés du cou, & qui descendoient même jusqu'à la poitrine ; dans un de ces singes, ils étoient inégaux en grandeur *(c)*; dans les deux autres, ils étoient presqu'égaux, mais ils se réunissoient pour ne former qu'une seule cavité; dans le troisième *(d)* enfin, les conduits de communication ont paru à M. Camper, ainsi qu'à Galien, étroits & figurés comme une fissure; il les a représentés de cette manière dans la *figure 2, lettre y.*

Tyson, qui a disséqué l'orang-outang d'Angola, n'a point parlé de la conformation observée par Galien dans ceux d'Asie, & par M. Camper dans ceux de Borneo.

Le larynx des pithèques & des papions, est très-différent de celui des orang-outangs; au lieu de deux sacs, on n'en trouve qu'un seul placé au-dessous de l'épiglotte: M. Camper en a donné la figure dans le Mémoire que nous avons déjà cité.

J'ai fait la même observation dans un mandrill mâle, d'une très-grande taille, que j'ai eu occasion de disséquer cet hiver. Cette espèce de singe est remarquable par la forme de ses joues, qui sont sillonnées & colorées d'un très-beau bleu; la langue de cet animal est très-longue & très-épaisse; sa tête est très-prolongée; il semble au premier aspect qu'il y ait deux glandes thyroïdes: en recherchant avec soin, on s'aperçoit qu'un prolongement mince & horizontal en réunit les deux lobes. Les cartilages du larynx n'ont rien de particulier; au-dessous de l'épiglotte se trouve une cavité, laquelle se termine par un conduit qui s'ouvre dans une poche assez étendue, & que l'on peut facilement gonfler d'air; étant distendue, elle présente un ovale irrégulier, rétréci dans quelques-uns de ses points. Les branches de l'os hyoïde sont

(c) Voyez *figure 2*, dans les *Transactions philosophiques*, 1779, Part. I.

(d) *Ibidem*, *figure 6*.

diſpoſées comme celles de l'homme; mais le corps de cet os eſt épais & ſe recourbe au-deſſus du conduit qui mène au ſac, & qu'il recouvre, comme on peut le voir en *a* dans les *figures 1, 2 & 3;* lorſque l'animal crioit un peu fort, ou lorſqu'il ſe mettoit en colère, on voyoit le ſac dont j'ai donné la deſcription, ſe remplir & ſe vider alternativement.

La diſſection du mangabey & de la mone, qui ſont auſſi des ſinges de l'ancien continent, m'a offert une ſtructure à peu-près ſemblable; le corps de l'os hyoïde eſt également recourbé; au-deſſous de l'épiglotte eſt une cavité demi-circulaire, qui mène à une excavation dont le principe ſe trouve vers le haut du cartilage thyroïde & ſous le corps de l'os hyoïde; elle eſt formée par une membrane mince & qui paroît ſe diriger latéralement; la glotte eſt d'ailleurs membraneuſe & très-mobile; les ligamens inférieurs appelés *cordes vocales*, ſont très-bien exprimés; ils ſont aplatis & comme tranchans dans le mangabey; les ventricules *(e)* y ſont très-marqués, & les cartilages ne diffèrent preſque en rien de ceux de l'homme. Voyez pour le mangabey, les *figures 4, 5 & 6;* & pour la mone, les *figures 7 & 8.*

J'ai trouvé de grandes variétés dans le larynx des ſinges du nouveau continent. Le ſajou gris offre vers la partie extérieure du cou une poche membraneuſe, mais le trou qui y conduit eſt fort étroit; l'os hyoïde eſt également prolongé dans le ſaï: outre cette différence, l'épiglotte de ce dernier n'eſt point percée à ſa baſe; il n'y a point de conduit ni de poche, comme dans ceux dont je viens de parler; les ventricules ſont très-marqués, & les cordes vocales ſont minces & comme tranchantes dans ces deux ſinges, ſur-tout dans le ſaï: je conſerve tous ces larynx. On peut voir, en comparant les figures que j'ai fait deſſiner, quelles ſont les proportions des autres parties qui les compoſent, & ſur l'expoſition deſquelles

---

(e) J'appelle ainſi non les ſacs externes, mais les cavités ſituées entre la glotte & les cordes vocales, comme la plupart des Anatomiſtes.

je n'ai pas cru devoir insister. On consultera pour le sajou gris; les *figures 8 & 9*, & pour le saï, les *figures 10 & 11.*

L'alouate & l'ouarine sont aussi deux animaux du nouveau continent, que M.rs de Buffon & Daubenton *(f)* ont rangés dans la famille des sapajous, parce qu'ils ont la queue *prenante;* leur voix étant très-forte, ils ont reçu le nom de *hurleurs;* le poil du premier est très-foncé; celui du second est d'un brun-noir.

Ces deux animaux, que l'on trouve principalement à Cayenne, ont fixé depuis long-temps l'attention des Voyageurs, par l'intensité des sons qu'ils produisent. Barrère *(g)* l'a attribuée à la conformation de l'os hyoïde, d'autres ont parlé d'un cornet placé dans l'intérieur de leur gosier *(h)*. M. le Comte de Buffon *(i)* a fait mention d'une espèce de tambour, dans la concavité duquel leur voix grossit & forme des hurlemens par écho: il ajoute qu'il a observé dans un embrion d'alouate l'organe de la voix déjà très-formé. Enfin M. Daubenton, dans la description qu'il fait de cette espèce de sapajou, après avoir remarqué que le nœud de la gorge est ordinairement très-renflé dans ces animaux, dit qu'ayant ouvert cette tubérosité, il a reconnu qu'elle étoit creuse & concave.

On conserve dans plusieurs Cabinets cette poche isolée, sous le nom de *larynx* ou de *gosier du singe rouge de Cayenne.* Il paroît cependant qu'elle étoit encore rare il y a deux ans en Hollande, puisque le célèbre M. Camper, qui étoit alors à Paris, en vit avec étonnement deux dans mon Cabinet. Je le priai d'en accepter une; depuis ce temps, il m'a écrit qu'il a fait des recherches sur cet organe, sans me rien dire de plus: j'en ai fait de mon côté que j'ai consignées dans ce Mémoire.

(f) Histoire Naturelle, *tome XV, pages 5 & suiv.*

(g) Essai de l'Histoire naturelle de l'Afrique.

(h) Voyage de Binet.

(i) Histoire Naturelle, *tome XV, page 7.*

J'ai

J'ai reçu de Cayenne *(k)* un gosier d'alouate en très-bon état, avec la langue, le pharynx, une partie de l'œsophage, tout le larynx & la poche même que l'on connoît depuis quelque temps, mais dont la position, les connexions & les rapports sont absolument ignorés.

Nous considérerons d'abord la poche même, indépendamment de ses adhérences; nous examinerons ensuite le larynx de l'alouate à l'extérieur, & nous finirons en décrivant ce qu'une coupe longitudinale nous a offert de plus remarquable. Pour faciliter l'intelligence de mes descriptions, j'ai fait dessiner cet organe sous différens aspects & en grandeur naturelle. *Voyez les figures 12, 13, 14 & 15.*

La poche osseuse est irrégulièrement pyramidale; sa pointe est mousse & arrondie; sa face supérieure présente deux légères dépressions sur les côtés, avec quelques sillons vasculaires & un espace droit, alongé & situé horizontalement dans le milieu: la face inférieure est moins égale que la première; elle forme une convexité assez considérable, & on y remarque un grand nombre de pores dont elle est criblée: la face postérieure est percée par une ouverture assez ample, arrondie en bas & terminée supérieurement par un segment osseux, échancré des deux côtés: au-dessus de cette ouverture est une plaque osseuse, aux deux extrémités de laquelle sont deux petites facettes dont l'usage sera indiqué plus bas.

L'orifice, qui est plus étroit que le fond, conduit à la cavité de la poche; elle ressemble à ce qu'on appelle en général du nom de *sinus* en Anatomie; quelques lames minces & étroites s'élèvent de ses parois; elle est placée entre les deux branches de la mâchoire inférieure, de manière que sa pointe est située en devant, son échancrure en arrière, & sa grande face arrondie en bas. J'en conserve quelques-unes qui sont plus étroites & plus alongées que celles dont j'ai fait faire le dessin.

(k) M. Maloet, Intendant de Cayenne, l'a envoyé à M. Mauduit, qui a bien voulu me le remettre.

Le larynx de l'alouate, confidéré avec fes annexes & à l'extérieur, préfente les objets fuivans.

La langue eft longue & étroite : ayant fait au pharynx une ouverture ovale, nous avons aperçu la glotte dont l'étendue eft confidérable, dont les lèvres font faillantes, & qui eft furmontée antérieurement par une épiglotte large, & qu'un frein retient, ainfi que dans l'homme & dans les quadrupèdes.

Le chaton poftérieur du cricoïde eft très-élevé; la portion antérieure de ce cartilage n'a rien de particulier, non plus que la trachée-artère; le cartilage thyroïde eft beaucoup plus grand qu'il ne l'eft ordinairement dans les quadrupèdes de cette taille; la faillie qu'il fait eft très-marquée; en arrière, il fe recourbe; fes deux faces latérales font fort étendues & un peu excavées.

Nous décrirons fur-tout avec attention, 1.° deux ligamens placés en deffus; 2.° un conduit qui communique avec la poche offeufe.

Le cartilage thyroïde eft furmonté dans l'alouate, comme dans les autres quadrupèdes, par deux cornes, auxquelles s'insèrent deux ligamens qui, en fe plaçant des deux côtés du pharynx & de la bafe de la langue, & en fe portant de haut en bas & de devant en arrière, aboutiffent aux deux petites facettes que nous avons décrites vers le haut & fur les côtés de la région poftérieure de la poche; ils font plus étroits dans leur milieu qu'à leurs extrémités; ils paroiffent être deftinés à foutenir cette cavité, & à affurer fes rapports avec le larynx.

Entre la poche offeufe & le cartilage thyroïde, on trouve un conduit affez confidérable, de forme ronde, plus large dans fes extrémités que dans fon milieu, d'un tiffu membraneux, ferré, & qui s'insère en devant autour de l'orifice de la poche, & en arrière entre les deux ailes du cartilage thyroïde, de forte qu'il femble que ce foit une feconde trachée-artère qui mène à une cavité analogue aux finus de la glotte.

Après avoir confidéré & décrit le larynx de l'alouate à

l'extérieur, nous l'avons divisé suivant sa longueur, pour l'observer intérieurement; nous avons principalement remarqué ce qui suit:

1.° Une excavation placée au-devant du cartilage thyroïde, & qui en est séparée par un cordon semblable aux ligamens inférieurs de la glotte, appelés *cordes vocales.*

2.° La jonction du conduit horizontal avec le larynx & avec la poche osseuse; après s'être élargi, il s'attache des deux côtés du cartilage thyroïde, auprès duquel il forme en arrière un arrondissement, que la saillie de ce cartilage divise intérieurement en deux rigoles; ces dernières percent le larynx précisément dans le lieu où deux excavations situées devant le cartilage cricoïde, répondent aux sinus de la glotte, de sorte que ces deux rigoles paroissent en être la continuation.

Nous croyons donc être fondés à regarder le conduit horizontal & la poche osseuse comme une extension des ventricules de la glotte, qui doit beaucoup ajouter à l'intensité de la voix; car outre que la cavité propre du larynx est très-grande dans l'alouate, l'air introduit dans les ventricules est nécessairement divisé en deux colonnes pour entrer dans le conduit horizontal; elles se réunissent ensuite dans toute l'étendue de ce conduit; l'air s'engouffre dans la poche que nous avons décrite, & dont les lames minces & osseuses sont très-élastiques; de-là il est répercuté vers le larynx: la saillie du cartilage thyroïde, placée intérieurement dans une des extrémités du conduit horizontal, & les ligamens de la glotte fortement ébranlés par ce fluide, doivent produire une grande réaction.

La disposition du larynx dans l'alouate est donc très-propre à produire un bruit considérable, & tel que celui dont les Voyageurs ont parlé.

Il suit de ces détails, que les Naturalistes qui ont avancé que le larynx du singe ne différoit en rien de celui de l'homme, se sont trompés; non-seulement le gosier du singe diffère de celui de l'homme, mais encore cet organe n'est

Résultat, relativement aux Singes.

pas le même dans tous ces animaux : celui de l'orang-outang est remarquable en ce qu'il communique avec deux sacs placés en dehors. Dans tous les singes de l'ancien continent que l'on a disséqués, au lieu de deux sacs, on n'en a trouvé qu'un ; cette conformation paroît moins marquée dans les singes d'Amérique : il y en a parmi ces derniers, dans lesquels elle manque absolument, & dans quelques-uns, au lieu d'un sac membraneux on trouve une cavité osseuse, jointe avec le larynx par un conduit horizontal. Le cri des singes est aigu, perçant, & souvent interrompu par des sons rauques qui se succèdent en manière de battemens : l'air qui entre dans les poches de différente nature, dont le larynx de ces animaux est pourvu, paroît contribuer à ce dernier genre de sons ; en général, une cavité placée dessous & au-devant de l'épiglotte, & qui est remplie d'air, doit beaucoup nuire à la formation & aux modulations de la voix.

Quadrupèdes.

Dans les quadrupèdes digités, l'organe de la voix conserve beaucoup de ressemblance avec celui de l'homme ; les bords de la glotte sont minces ; les ligamens inférieurs, appelés *cordes vocales*, sont bien détachés ; on trouve de chaque côté un ventricule, & les anneaux de la trachée-artère sont interrompus en arrière par un espace membraneux. L'épiglotte du chien est triangulaire [a] ; son extrémité est très-aiguë ; latéralement elle se continue, en formant une espèce de crochet, avec les ligamens inférieurs de la glotte ; & il y a un muscle glosso-épiglottique. Toutes les parties qui composent le larynx du chat [b] sont très-mobiles, j'y ai sur-tout remarqué deux petites membranes très-minces, qui sont placées au-dessous des ligamens inférieurs de la glotte ; elles vibrent lorsqu'on introduit de l'air par la trachée-artère, & elles produisent une sorte de ronflement analogue à celui que les chats font entendre : Severinus & Blasius, qui ont décrit la structure anatomique du chat, n'ont rien dit de ces membranes.

Deux petits corps arrondis sont situés au bas de l'épiglotte du lapin [c], qui est échancrée à sa pointe. Perrault a écrit dans ses Mémoires pour servir à l'Histoire des Animaux [d], que

[a] *Voy. fig. 16.*
[b] *Voy. fig. 17.*
[c] *Voy. fig. 18.*
[d] *Voy. tome I.*

les anneaux de la trachée-artère du lion étoient entiers, excepté les deux ou trois premiers : sa description a sans doute été faite d'après un lion très-âgé; car, ayant disséqué une lionne mise à mort, il y a deux ans à peu-près, au Combat du Taureau, j'ai trouvé les anneaux de la trachée-artère interrompus en arrière par un espace membraneux & musculaire, à la vérité fort étroit. Dans le kerkajou *(l)*, quadrupède nouveau que j'ai disséqué cet hiver, & qui est analogue au genre des fouines, le larynx n'offre rien de remarquable, si ce n'est que l'épiglotte est très-grande, très-alongée, & que la membrane qui tapisse les ventricules est formée par des fibres longitudinales, parallèles & réunies en petites bandes. L'écureuil & le renard ne m'ont rien présenté qui mérite des détails particuliers. Kerkajou.

En passant des quadrupèdes digités à ceux qui ont le pied fourchu, on trouve des différences très-marquées. J'ai fait au Cabinet du Roi, sur le sanglier, les mêmes observations que M. Hérissant a publiées en 1753 *(m)*, sur le cochon : le cartilage de l'épiglotte est grand & épais; deux reliefs tiennent lieu des ligamens inférieurs; ils sont percés par une fente qui ressemble à une petite glotte, & qui s'ouvre dans des excavations arrondies, recouvertes par un muscle, dans lesquelles l'air entre & dont il sort avec éclat. J'ajouterai que les cartilages arythénoïdes sont très-volumineux ; que la glotte est très-ouverte, & presqu'entièrement entourée de cartilages, & qu'au lieu de ventricules, on trouve les cavités dont on vient de parler. Le larynx du bœuf est très-large; la glotte est béante, ses bords sont renversés; les arythénoïdes font une saillie très-considérable en devant; les ligamens inférieurs sont à peine distincts, & au lieu des ventricules, proprement dits, on remarque une cavité qui n'est presque pas circonscrite. Dans le mouton, la disposition est la même; la glotte est presque tout-à-fait cartilagineuse; les ligamens

---

(l) Quadrupède nouveau dont aucun Auteur n'a fait mention.

(m) Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, *année 1753.*

inférieurs ſont peu détachés des parois, & l'eſpace qui les ſépare eſt fort étroit, ce qui tient à la ſtructure des cartilages.

Le larynx des ſolipèdes eſt mieux organiſé : l'épiglotte, qui a peu d'étendue, eſt triangulaire, & ſe termine en pointe comme dans le chien; les arythénoïdes ſe portent en devant par un angle ſaillant; ils ſont antérieurement recourbés, & les ligamens inférieurs ſont bien détachés & ſuſceptibles de vibrer: à peine trouve-t-on aux extrémités de la glotte deux petites duplicatures qui peuvent être aſſimilées aux deux membranes triangulaires, décrites par M. Hériſſant, qui, pour cette raiſon, avoit rangé le larynx du cheval parmi ceux qu'il appeloit *composés*. M.[rs] Bourgelat & Vitet, qui ont décrit avec ſoin le larynx du cheval, n'en ont fait aucune mention. M. Hériſſant a été plus exact dans les détails qu'il a donnés ſur l'organe de la voix de l'âne & du mulet *(n)*; il a fait voir qu'une cavité creuſée dans le cartilage thyroïde, & recouverte par une membrane, eſt deſtinée à recevoir une certaine quantité d'air, & à lui imprimer un mouvement de vibration très-conſidérable. Moins de ſoupleſſe & plus de volume dans les cartilages; moins de profondeur dans les ventricules; moins de ſaillie dans les ligamens inférieurs; moins de mobilité dans la glotte, dont les contours ſont ſi maſſifs dans pluſieurs individus, qu'elle eſt évidemment incapable de ſervir à la fonction de la voix; des cavités ou des poches ſur-ajoutées: telles ſont les principales différences du larynx des quadrupèdes avec celui de l'homme.

Réſultat, relativement aux Quadrupèdes.

Phoque & Chauve-ſouris.

C'eſt ici le lieu de parler de deux animaux qu'on a coutume de ranger, ſoit parmi les quadrupèdes, ſoit à leur ſuite, le phoque & la chauve-ſouris. L'épiglotte du phoque eſt plus grande[a] qu'il ne faut pour recouvrir l'ouverture de la glotte: cette dernière eſt placée immédiatement au-deſſus des ligamens appelés *cordes vocales*, de ſorte qu'il y a entr'eux & elle très-peu d'eſpace; diſpoſition que je n'ai vue dans aucun autre animal.

[a] *Voy. fig. 19 & 20.*

(n) Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, *année 1753*.

Il n'y a point d'épiglotte dans le larynx des chauve-ſouris; la glotte eſt figurée en loſange alongé ou en ovale, & au-deſſous de cette ouverture on remarque un élargiſſement aſſez conſidérable. Dans la chauve-ſouris de l'île de Sainte-Hélène, appelée *vampir* à nez ſimple [a] & long, une légère ſaillie membraneuſe ſemble tenir lieu d'épiglotte : dans la chauve-ſouris appelée *vampir* à nez composé [b], il n'y en a pas la moindre apparence ; dans la première, on trouve quelques replis membraneux, qui ſuppléent au défaut des ligamens ou cordes vocales : je n'en ai pas trouvé dans la ſeconde.

[a] *Voy. fig. 21 & 22.*

[b] *Voy. fig. 23 & 24.*

Réſultat pour le Phoque & la Chauve-ſouris.

Ainſi le phoque ſe rapproche, par la diſpoſition du larynx, de la claſſe des quadrupèdes, & la chauve-ſouris de celle des oiſeaux.

Oiſeaux.

Ces derniers peuvent être diviſés en trois ordres, à raiſon des différences que l'organe de la voix préſente : dans les uns, le nœud qui ſe remarque dans la diviſion des bronches, eſt dépourvu de muſcles; dans les autres, un muſcle ſerré & aplati le recouvre : dans ces deux premiers ordres, la trachée-artère, fait un ſimple trajet depuis la diviſion des bronches juſqu'à la glotte; dans le troiſième ordre, elle ſe contourne de différentes manières, & l'organe de la voix eſt vraiment composé.

On a dit que les oiſeaux ont un double larynx, l'un ſupérieur & l'autre inférieur: on s'exprimeroit d'une manière plus convenable, en diſant que la glotte, dans les oiſeaux, eſt placée au haut du cou, & que le reſte de l'organe de la voix, qui tient lieu des ventricules & des ligamens inférieurs, eſt ſitué en bas & à la diviſion des bronches. C'eſt au moins ainſi que j'ai enviſagé cette ſtructure, comme les détails ſuivans le prouveront.

La glotte des oiſeaux diffère par ſon ouverture & par ſa forme; en général c'eſt cette partie de l'organe de la voix qui offre en eux le moins de variétés : dans le canard [c], dans le coq-d'inde & dans l'outarde, on diſtingue facilement une pièce triangulaire placée en devant; dans le canard, elle eſt ſurmontée intérieurement & au milieu par une

[c] *Voy. fig. 25.*

ſaillie aiguë & cartilagineuſe en arrière; ſur les côtés, ſont des ligamens irréguliers, & les deux parties latérales de la glotte ſont formées par deux cartilages dont la figure varie ſuivant celle de la glotte elle-même: dans l'aigle, dans le pélican & dans le canard, elle eſt diſpoſée en fente: dans le caſoar, elle eſt ovale; elle eſt grande & un peu triangulaire dans le pigeon [a]; & dans la poule, elle forme une eſpèce de parallélogramme très-alongé: Perrault l'a vue figurée en loſange dans le cormoran. Dans le cabaret, le chardonneret, le linot, le verdier & le ſerin [b], j'ai trouvé cette ouverture ovale avec de légères échancrures ſur les côtés: dans le roſſignol [c], elle ne diffère qu'en ce que les bords ſont moins échancrés & plus unis; deux muſcles placés ſur les côtés de la glotte, ſont deſtinés à la former.

Dans les oiſeaux, & en général dans tous les animaux qui n'ont point d'épiglotte, l'ouverture de la glotte peut ſe rétrécir au point de ſe fermer tout-à-fait; mais étant cartilagineuſe, elle n'eſt pas ſuſceptible de tenſion: un corps aigu, qui eſt placé au milieu de l'os hyoïde, répond à la pièce triangulaire & antérieure de la glotte, laquelle eſt environnée dans les gros oiſeaux, ainſi que la baſe de la langue, de pièces blanchâtres & frangées [d].

Les anneaux de la trachée-artère ſont d'une ſeule pièce [e], & quoique minces dans pluſieurs, ils ont beaucoup de conſiſtance & d'élaſticité. M. Daubenton a trouvé les anneaux de ce conduit aplatis dans l'oiſeau-pierre; deux muſcles latéraux s'étendent juſqu'aux pièces qui forment les bords de la glotte, & paroiſſent les abaiſſer en les écartant l'un de l'autre; la longueur de la trachée-artère eſt ordinairement meſurée par celle du cou, dont l'étendue n'eſt pas, ainſi que M. Daubenton l'a prouvé, en raiſon du nombre des vertèbres cervicales, puiſque le cou du cygne, qui a vingt-deux vertèbres cervicales, n'eſt pas auſſi long que celui du flammant, qui n'en a que dix-ſept. Il y a cependant quelques oiſeaux dans leſquels la trachée-artère fait des contours & prend des formes particulières : on ſait, d'après Perrault, qu'elle eſt

dilatée

[a] *Voy. fig. 33.*

[b] *Voy. fig. 34.*

[c] *Voy. fig. 36.*

[d] *Voy. fig. 33, 34 & 36.*

[e] *Voy. fig. 26, 27, 28, 30 & 34.*

dilatée en quelques endroits de l'ibis; que celle du coq indien fait un repli au bas du cou; que celle du cormoran offre un nœud dans cette région; que celle de la demoiselle de Numidie s'enfonce dans le sternum, ainsi que celle du cygne. Willughby (o) a fait voir que la trachée-artère de la grue s'enfonce de même; on trouve aussi cette structure dans le héron.

M. Hérissant a décrit les bronches de l'oie & de quelques oiseaux aquatiques du genre du canard; elles sont entre-coupées par des membranes en forme de croissant: M. Bajon a fait connoître les replis que la trachée-artère fait le long du sternum dans le paragua: enfin M. Daubenton a donné une description exacte de celle de l'oiseau-pierre, qui s'étend en dehors des deux côtés du sternum. Tout cet appareil, qui peut être comparé à la poche osseuse du singe-hurleur[a], aux deux sinus de la glotte du cochon & du sanglier, ou au tambour qui se trouve dans le larynx de l'âne & du mulet, n'est ainsi disposé que pour donner plus de force & d'intensité à la voix de ces oiseaux: l'organe de la voix du rossignol & celui du serin sont au contraire les plus simples de tous. N'est-on pas en droit de conclure de cette opposition, que la Nature paroît tendre d'elle-même vers l'harmonie, puisqu'il semble lui en moins coûter pour former des sons agréables, que pour produire un grand bruit, à force de contours, de membranes & de cavités.

[a] *Voy. fig. 12 & 13.*

La trachée-artère, que nous avons considérée vers le haut & le long du cou, se rétrécit un peu vers le bas, dans le lieu où les bronches se divisent; il semble que ce conduit y ait été pincé de droite à gauche[b]: là les bronches prennent leur origine, & dans l'endroit d'où elles naissent, plusieurs cerceaux plus grands & plus éloignés les uns des autres, en forment le principe[c]; un cartilage mince, étroit[d] & un peu tranchant, est situé perpendiculairement dans le milieu; il est quelquefois un peu échancré, ce qui a engagé quelques Auteurs à le comparer à un hausse-col;

[b] *Voy. fig. 27, 28, 30 & 35.*

[c] *Voy. fig. 29, d.*

[d] *Voy. fig. 32 & 35.*

(o) Ornithologie, *page 200.*

la face externe de chaque bronche eſt formée d'une membrane mince [a], de ſorte que les cerceaux cartilagineux n'y ſont point entiers; la pièce en forme d'éperon, placée à l'origine des bronches, diffère dans ſa ſtructure; celle du héron, dont le cri a beaucoup de force, eſt très-ſimple; elle eſt ſoutenue en devant & en arrière ſur les cerceaux auxquels elle correſpond. Dans le coq-d'inde, cette pièce fait partie d'une autre, qui eſt elle-même compoſée de deux cerceaux [b] plus forts & plus ſaillans que les autres; les deux bronches ſont réunies vers le bas par une ſubſtance ligamenteuſe [c], de ſorte qu'il y a un trou entre ce ligament & leur diviſion [d]: dans les petits oiſeaux, la diſpoſition de la trachée-artère eſt la même à peu-près que dans le héron; on trouve à la diviſion des bronches, un rétréciſſement & une pièce aiguë & verticale qui les ſépare [e]: mais il y a ſous un autre aſpect, une différence très-notable entre les grands oiſeaux, dont la voix a plus de force que d'agrément, & les petits, appelés par quelques Naturaliſtes *aves canoræ*, parce que leur goſier très-flexible produit des ſons bien cadencés, & parce que pluſieurs ſont ſuſceptibles d'apprendre des airs aſſez difficiles, & de les répéter d'une manière agréable. Cette différence conſiſte en ce que le larynx inférieur des grands oiſeaux, tels que le coq d'inde [f], la poule, le canard, l'oie, l'outarde, le butor, &c, n'eſt compoſé que de membranes, & abſolument dépourvu de muſcles, tandis que dans le roſſignol, le ſerin, le linot, le verdier, le chardonneret & l'alouette [g], la partie inférieure du larynx eſt abſolument recouverte par un muſcle dont les fibres ſont très-ſerrées, qui eſt ſillonné en devant par une dépreſſion longitudinale, & qui ſe termine en arrière par deux petits mamelons : dans le pigeon, deux muſcles ſitués latéralement, s'insèrent entre les derniers cerceaux de la trachée-artère, aux membranes mobiles qui en rempliſſent l'intervalle [h].

A cette obſervation, dont aucun Auteur n'a parlé, nous ajoutons, pour rendre le tableau plus complet, celle de M. Hériſſant, ſur la membrane qui s'étend d'une des branches

[a] Voy. fig. 28, a, b.

[b] Voy. fig. 27, g.

[c] Voy. fig. 27, L.

[d] Voy. fig. 27, K.

[e] Voy. fig. 32, & 35.

[f] Voy. fig. 26, 27, 28 & 29.

[g] Voy. fig. 37, 38 & 39, a, b.

[h] Voy. fig. 30 & 31.

de l'os de la lunette à l'autre, & qui ferme la partie antérieure de la poitrine.

Résultat, relativement aux Oiseaux.

La glotte des oiſeaux reſſemble aſſez à celle des quadrupèdes: la pièce triangulaire qui eſt placée en devant [a], répond, non au crycoïde, comme Perrault l'a dit, mais au thyroïde, & les ſegmens latéraux aux arythénoïdes: la pièce qui diviſe les bronches & les membranes de ces dernières, ſont ſuſceptibles de vibrer, & ſemblent tenir lieu des ligamens inférieurs de la glotte; la grande diſtance qui ſépare celle-ci d'avec l'organe vraiment ſonore, le défaut d'épiglotte & de ligamens ou cordes vocales, la diſpoſition des membranes des bronches, & l'action que l'air échappé du poumon & contenu dans la région antérieure de la poitrine, ſous la membrane de la fourchette, exerce ſur la partie inférieure du larynx, conſtituent les principales différences de l'organe de la voix des oiſeaux, avec celui de l'homme & des quadrupèdes.

[a] Voy. fig. 25, a, b.

Reptiles.

Nous approchons du terme où la voix ne conſiſte que dans quelques modulations informes, où même elle s'affoiblit & diſparoît enfin tout-à-fait; dans quelques reptiles, elle ſe fait encore entendre, mais dans les ſerpens, quelques ſons aigus, excités par la colère, dont ils annoncent la menace & le danger, ſont tout ce qui en tient lieu. Dans la grenouille, la glotte, qui eſt longue & étroite, & ſans épiglotte [b], s'ouvre & ſe ferme avec autant de rapidité que de préciſion: au-devant de la glotte ſont deux ligamens, qui méritent par excellence le nom de *cordes vocales* [c]; ils ſont très-longs par rapport au volume de l'animal, tendus parallèlement, & tout-à-fait détachés des parties environnantes; de ſorte qu'au lieu d'une ouverture, il y en a trois: ſouvent les fentes latérales ſont entre-coupées par un petit ligament tranſverſal [d]; la ſomme de ces trois ouvertures forme un eſpace arrondi, qui eſt encadré dans un loſange cartilagineux [e], dont la partie antérieure eſt contiguë à la langue. Cette dernière eſt remarquable en ce que, fixée par ſa pointe, elle eſt mobile

[b] Voy. fig. 40.

[c] Voy. fig. 41 & 42.

[d] Voy. fig. 41, k, k.

[e] Voy. fig. 51, c, e, g, f, d.

poſtérieurement ; deux bronches très-courtes, & comme argentées [a], naiſſent immédiatement de la glotte.

La ſtructure eſt la même dans le crapaud ordinaire & dans le grand crapaud de Miſſiſſipi, que j'ai diſſéqué au Jardin du Roi [b] : on ne peut s'empêcher d'être ſurpris, qu'avec un organe auſſi bien diſpoſé, ces animaux ne produiſent que des ſons monotones & déſagréables.

Perrault a obſervé que dans le crocodile, la trachée-artère faiſoit divers contours.

Dans les animaux qui nous reſtent à examiner, nous ne trouverons plus que la glotte & la trachée-artère; telle eſt la ſtructure de la tortue, de la vipère, de la couleuvre, & des ſerpens en général. Dans la tortue, une pièce antérieure tient lieu du thyroïde ; les parois de la trachée-artère ſont minces ; ſes anneaux ſont continus : la glotte eſt très-étroite, & placée en devant, très-près de la face interne de la mâchoire inférieure [c] ; ce qui prouve que la voix, dans ces animaux, ne doit avoir aucun timbre. Dans la vipère [d] & dans la grande couleuvre, la glotte eſt plus étendue ; elle ſe trouve derrière la langue, qui tient peu de place entre les deux mâchoires, étant contenue dans une gaîne le long de l'œſophage [e] ; la trachée s'élargit un peu au-deſſous de cette ouverture ; ſes anneaux, qui ſont entiers dans ſon origine, ſe diviſent enſuite [f] pour adhérer au poumon, & ils ſe terminent en bec de flûte [g], au-delà de ce viſcère, dans une ſuite de cellules qui s'étendent juſqu'à l'extrémité de l'animal, lequel peut être gonflé dans toutes ſes dimenſions lorſqu'on y introduit de l'air. La glotte des oiſeaux eſt ſéparée d'avec l'organe, vraiment ſonore ; elle eſt la ſeule partie qui conſtitue l'organe de la voix dans les reptiles.

Je n'ai fait aucune mention des cétacées, quoique Pline, parmi les Anciens, & Mrs Anderſon & Klein, parmi les Modernes, aient avancé que la voix de la baleine & du dauphin eſt très-forte, parce que l'on ignore abſolument la ſtructure de leur larynx.

Je ne m'arrêterai point non plus ſur les inſectes ; à la vérité,

[a] Voy. fig. 42, d, c.

[b] Voy. fig. 43 & 44.

[c] Voy. fig. 45 & 46.

[d] Voy. fig. 47.

[e] Voy. fig. 48, c, d, a, b.

[f] Voy. fig. 48.

[g] Voy. fig. 52, a, b.

plusieurs de ces animaux, & sur-tout les femelles, font entendre des sons, mais les organes par lesquels l'air pénètre n'y ont aucune part; ce sont des bruits mécaniques, produits, soit par le choc de la partie antérieure du corselet, comme dans plusieurs coléoptères, soit avec des balanciers semblables à de petites baguettes de tambour qui frappent sur une peau sèche & tendue, comme dans les diptères, & principalement dans la cigale.

En se rappelant les observations dont je viens d'offrir le tableau, on peut en tirer les conséquences suivantes: Résultat général.

1.° La glotte étant formée dans la plupart des quadrupèdes, par des bords presqu'entièrement cartilagineux, qui ne sont susceptibles d'aucune tension graduée, cette ouverture étant dans les oiseaux très-éloignée de l'organe vraiment sonore, & ne produisant qu'un sifflement dans les serpens où elle est seule, ne peut-on pas en conclure qu'elle n'est point essentielle à la formation des sons?

2.° Les ligamens inférieurs étant dans plusieurs quadrupèdes & dans quelques reptiles, les seules parties capables de vibrer, des membranes élastiques en étant également susceptibles dans les oiseaux, n'est-on pas conduit à penser que ces différentes parties ont un usage marqué dans la formation des sons?

3.° Le timbre de la voix augmentant dans les conduits recourbés & dans les cavités formées par des parois cartilagineuses & élastiques, n'est-il pas probable que tout l'appareil, dont quelques animaux sont pourvus, ne tend qu'à augmenter la résonnance de la voix, sans influer sur son intonation?

Ces inductions sont les seules que je me permettrai en finissant ce Mémoire. Un Anatomiste qui se propose de découvrir le mécanisme de la voix dans les différentes classes d'animaux, peut être comparé à un Curieux qui, après avoir entendu dans un Concert l'effet de plusieurs instrumens de Musique, sans avoir d'ailleurs la moindre connoissance de leur disposition, chercheroit, en les examinant, à découvrir la manière dont on les emploie, & la nature du son qu'ils produisent. Les recherches que je viens d'exposer, ne sont

relatives qu'à la ſtructure anatomique des organes : il me reſte à publier dans un autre Mémoire, les expériences qui concernent leurs uſages.

EXPLICATION DES FIGURES.

Figure 1.re

b, c, la langue du mandrill & toute la pièce ſont vues de côté.

a, d, e, os hyoïde ; *e,* grande corne ; *d,* petite corne ; *a,* corps de l'os hyoïde prolongé, recourbé, & ſous lequel eſt le conduit qui communique avec la poche.

a, f, g, h, poche ſituée devant le larynx en dehors ; *h,* lieu de ſon rétréciſſement.

i, k, les deux lobes de la glande thyroïde.

l, trachée-artère.

Figure 2.

La langue & toute la pièce ſont vues en devant, la poche étant ôtée.

Les mêmes lettres de la *figure précédente* ſerviront à l'explication, ſi ce n'eſt qu'en *M,* on voit l'ouverture du conduit placé ſous le corps de l'os hyoïde, qui mène à la poche.

Figure 3.

Les mêmes lettres ſerviront à l'explication de la figure, ſi ce n'eſt 1.° qu'en *o, p, q,* on voit les vaiſſeaux de la poche ; & 2.° qu'en *f, g, h,* on aperçoit cette même poche en devant, tandis qu'elle eſt vue de côté dans la *figure 1.re*

Figure 4.

Cette figure préſente le larynx du mangabey extérieurement ; *a,* la glotte ; *b,* l'épiglotte ; *c,* la langue.

Figure 5.

Elle offre le larynx du mangabey ouvert ; *a, e, b, e,* ligamens des cordes vocales & les ventricules au-deſſus.

c, la langue ; *d,* l'épiglotte ; *f, g,* les cartilages arythénoïdes ; *h,* l'ouverture percée à la baſe de l'épiglotte qui mène à la poche : cette ouverture eſt ample.

Figure 6.

Elle montre le larynx du mangabey vu en dessus, en devant & un peu en dessous.

a, ouverture qui mène à la poche.

b, une partie de la poche ouverte.

c, la trachée-artère.

d, la langue.

Figure 7.

Cette figure présente le larynx de la mone ouvert & écarté.

a, *e*, *b*, *e*, ligamens des cordes vocales & ventricules au-dessus.

c, la langue; *d*, l'épiglotte; *h*, la trachée-artère également ouverte.

f, *g*, ouverture semi-circulaire par laquelle l'intérieur du larynx communique avec la poche placée en dehors & en devant.

Figure 8.

On voit dans cette figure le larynx du sajou gris ouvert longitudinalement.

a, *e*, *a*, *b*, ligamens des cordes vocales; ventricules au-dessus.

c, la langue; *d*, l'épiglotte; *e*, la trachée-artère; *f*, une très-petite ouverture placée à la base de l'épiglotte, où elle communique avec la poche située en devant.

Figure 9.

On y voit le larynx du sajou gris en dehors & en devant.

a, ouverture placée sous l'os hyoïde, & qui est le principe de la poche gutturale externe.

b, *b*, *b*, portions de la membrane qui formoit la poche; *c*, la trachée-artère; *d*, la langue.

Figure 10.

Dans cette figure, on voit le larynx du saï en dehors & en devant.

a, la langue; *b*, l'épiglotte; *c*, la glotte; *d*, la trachée-artère.

Figure 11.

Dans cette figure, on voit le larynx du saï ouvert.

a, la langue ; *b*, épiglotte ; *c*, base de l'épiglotte où il n'y a point d'ouverture ; *e*, *d*, *f*, *d*, ligamens des cordes vocales & ventricules au-dessus.

Figure 12.

Cette figure présente la poche du larynx du singe-hurleur, vue de côté.

Depuis *A* jusqu'à *B*, espace étroit, alongé & horizontal de la face supérieure de la poche.

C, dépression latérale de la face supérieure.

Depuis *D* jusqu'à *E*, face inférieure, arrondie, inégale & poreuse.

F, échancrure placée au haut & à un des côtés de l'ouverture.

G, une des petites facettes placées au haut & sur le côté de la face postérieure.

H, ouverture qui mène à la cavité de la poche.

Figure 13.

Cette figure montre la poche vue dans la face postérieure.

I, l'orifice.

J, le segment qui ferme l'orifice supérieurement.

K, bord ovalaire de l'orifice.

L, portion supérieure de la face postérieure.

M, *N*, les deux facettes placées au haut & sur les côtés de cette région.

Figure 14.

Cette figure présente le larynx du singe-hurleur avec ses annexes, vu obliquement de côté, un peu en dessus.

A, *B*, la langue.

G, isthme du gosier.

Depuis *D* jusqu'à *E*, le pharynx.

F, principe de l'œsophage.

E, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, ouverture ovale faite artificiellement au pharynx pour découvrir la glotte.

E, *M*, *N*, *O*, ouverture de la glotte.

M, *N*, lèvres de la glotte.

O, épiglotte

O, épiglotte.

P, chaton du crycoïde.

Q, partie antérieure du crycoïde.

R, cartilage thyroïde : on voit sa face latérale, qui est un peu excavée.

S, endroit où le cartilage thyroïde se recourbe en arrière.

T, bord extérieur du cartilage thyroïde.

V, U, la trachée-artère.

X, corne du cartilage thyroïde.

Y, Z, Δ, deux ligamens qui, des cornes du cartilage thyroïde, s'étendent vers la petite facette supérieure & latérale de la région postérieure de la poche.

Θ, facette à laquelle le ligament aboutit.

Σ, Υ, Φ, conduit qui établit une communication entre la poche osseuse & le cartilage thyroïde : il est plus étroit en Υ, & plus large en Σ, & en Φ.

Θ, Ψ, Ω, poche osseuse décrite dans les *figures 1 & 2* : on la voit de côté, comme dans la *figure 1.re*

Figure 15.

Cette figure offre la coupe longitudinale de la langue & de tout le larynx du singe-hurleur.

A, la langue coupée en long.

B, portion latérale du pharynx.

C, ligament qui s'étend de la poche osseuse du larynx vers le cartilage thyroïde.

D, moitié de l'épiglotte divisée.

E, commencement de l'œsophage, également divisé.

F, la poche osseuse du larynx, divisée & vue en dedans.

F, G, H, lames minces qui sont saillantes dans l'intérieur de la poche osseuse.

I, jonction du conduit horizontal avec la poche osseuse du larynx.

K, milieu du conduit horizontal, qui est plus étroit.

L, extrémité postérieure & plus large du conduit horizontal.

M, saillie du cartilage thyroïde qui divise intérieurement le conduit horizontal en deux.

N, une des rigoles qui résulte de cette division.

O, ventricule de la glotte avec lequel ce conduit communique & se continue.

P, ligament inférieur ou postérieur de la glotte, répondant à ce qu'on appelle *corde vocale*.

Q, facette interne du cartilage thyroïde.

R, bord extérieur du cartilage thyroïde divisé.

S, endroit où le cartilage crycoïde a été coupé.

T, face interne de la trachée-artère.

Nota. Les *figures 9, 10, 11 & 12*, sont dessinées en grandeur naturelle.

Figure 16.

Cette figure représente le larynx du chien : il été ouvert longitudinalement pour voir l'intérieur.

a, b, os hyoïde; *c*, épiglotte qui est triangulaire; *d, e*, ligamens inférieurs de la glotte; *f, g*, ventricules; *k*, partie moyenne de l'épiglotte; *l, m*, crochets formés par l'épiglotte & les ligamens inférieurs; *h, i*, trachée-artère.

Figure 17.

On voit dans cette figure le larynx du chat; *a, b*, os hyoïde; *e*, l'épiglotte; *h, i*, la glotte; *c, d, f, g*, représente les ligamens inférieurs de la glotte & deux petites membranes placées au-dessus, & qui frémissent aisément.

Figure 18.

Elle offre le larynx du lapin : il a été ouvert pour voir l'intérieur; *a*, l'épiglotte; *b*, petits corps arrondis, placés au bas de l'épiglotte du lapin; *c, d*, ventricules & ligamens inférieurs de la glotte; *e*, la trachée-artère.

Fig. 19.

Elle présente le larynx du phoque dans l'état naturel; *a*, la langue, qui est très-grande; *b*, épiglotte; *b, c*, la glotte; *e, d*, les ligamens inférieurs ou cordes vocales, qui sont très-près des lèvres de la glotte; *f*, la trachée-artère.

Figure 20.

C'est le même larynx ouvert; *a*, la langue; *b*, l'épiglotte; *d, e*, ligamens inférieurs & ventricules très-étroits; *f*, cavité au-dessous de la glotte; *g*, annexes de la trachée-artère.

Figure 21.

Larynx de la chauve-fouris-vampir de l'ile Sainte-Hélène à nez fimple & long; *a*, langue; *b*, faillie très-peu confidérable, tenant lieu d'épiglotte; *b*, *c*, glotte ovale & comme feftonnée; *d*, la trachée-artère.

Figure 22.

Même larynx ouvert; *a*, langue; *b*, *c*, *d*, *e*, petites bandes tenant lieu de ligamens ou de cordes vocales; *f*, la trachée-artère.

Figure 23.

Larynx de la grande chauve-fouris-vampir à nez compofé; *a*, langue; *b*, *c*, glotte; *d*, *e*, trachée-artère.

Figure 24.

Même larynx vu en deffous, avec une partie de la langue & l'os hyoïde.

Figure 25.

Larynx du canard repréfenté ouvert; *a*, *b*, pièce triangulaire qui tient lieu du thyroïde; *c*, petit éperon placé au milieu de ce cartilage en dedans; *d*, *e*, *f*, *g*, pièces latérales qui tiennent la place des arythénoïdes & en partie du crycoïde; *h*, la trachée-artère.

Figure 26.

Trachée-artère du dinde; *a*, *b*, trachée-artère; *c*, œfophage; *d*, endroit où étoit la poche & qui a été lié; *e*, *f*, *g*, *h*, artères; *i*, nœud où eft la partie inférieure du larynx; *k*, trou fitué entre les deux bronches; *l*, *m*, deux mufcles placés le long de la trachée-artère.

Figure 27.

La même trachée-artère vue en deffus, & dépouillée des parties acceffoires, excepté des mufcles; *a*, *b*, *c*, *d*, mufcles placés le long de la trachée-artère; *e*, trachée-artère; *f*, *g*, deux anneaux formant la pièce principale, fur laquelle eft foutenue la pièce aiguë placée dans le milieu des bronches; *h*, *i*, les bronches; *k*, trou fitué entre les bronches; *l*, ligament qui recouvre les bronches, & qui manque dans plufieurs grands oifeaux, tel que le butor, dans lequel il ne fe rencontre point.

Figure 28.

La même trachée-artère vue par-derrière; *a*, *b*, les membranes qui

forment la partie interne des bronches, & qui ſont ſuſceptibles de vibration, ſur-tout dans leurs bifurcations.

Figure 29.

On voit dans cette figure le profil de la trachée-artère du coq-d'inde; *a*, la trachée-artère; *b*, *c*, les muſcles placés le long de ce conduit; *d*, les anneaux qui ſont à l'origine des bronches, & qui ſont plus grands & plus aplatis que les autres.

Figure 30.

La trachée-artère du pigeon; *a*, la trachée artère; *b*, *c*, les deux muſcles longitudinaux; *d*, *e*, les deux anneaux cartilagineux qui ſoutiennent l'organe ſonore & entre leſquels s'insèrent les muſcles longitudinaux; *f*, *g*, les bronches.

Figure 31.

La même trachée-artère, vue de profil.

Figure 32.

La même trachée-artère ouverte; *a*, la pièce tranchante & verticale qui ſépare les bronches; *b*, *c*, les bronches.

Figure 33.

La glotte du pigeon; *a*, *b*, la glotte; *c*, *d*, pièces comme frangées ou hachées, qui accompagnent la langue & la glotte de pluſieurs oiſeaux; *e*, la trachée-artère.

Figure 34.

La glotte du ſerin; *a*, *b*, la glotte; près de *b*, ſont les pièces frangées ou hachées dont on a déjà parlé; *c*, la trachée-artère.

Figure 35.

La même trachée-artère ouverte: on y voit les deux bronches & la pièce qui les diviſe.

Figure 36.

Cette figure offre la glotte du roſſignol; ſa forme y eſt deſſinée en grandeur naturelle: derrière, ſont les pièces hachées ou frangées.

Figure 37.

Larynx de l'alouette, qui donnera une idée de cet organe, vu en dehors,

dans tous les petits oiseaux: on y voit la trachée-artère, ses deux muscles longitudinaux, les bronches, & en *a*, un muscle qui recouvre l'organe vraiment sonore.

Figure 38.

Le même larynx, vu de profil.

Figure 39.

Le même larynx, vu en dessous; en *a*, *b*, sont les deux tubercules qui terminent postérieurement le muscle dont il a été parlé.

Figure 40.

Glotte de la grenouille; *a*, *b*, la langue dont la partie postérieure est mobile; *c*, *d*, fente de la glotte, qui est susceptible de se fermer exactement.

Figure 41.

Larynx de la grenouille, les lèvres de la glotte étant ôtées; *a*, *b*, la langue; *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, espèce de losange cartilagineux qui soutient le larynx; *i*, *h*, *g*, cordes vocales ou ligamens de la glotte; *k*, *k*, intersection latérale de ces ligamens; *i*, *h*, *k*, *g*, ouverture du larynx qui est ronde, & divisée en trois par les cordes vocales.

Figure 42.

Dans cette figure, on voit ces parties en grandeur naturelle; *a*, la langue; *b*, l'ouverture du larynx dans lequel sont les cordes vocales; *c*, *d*, les bronches, qui sont très-courtes.

Figure 43.

Larynx du grand crapaud de Mississipi; *a*, *b*, sa glotte en grandeur naturelle.

Figure 44.

Le même larynx, les lèvres de la glotte ôtées; *a*, *b*, *c*, *d*, les cordes vocales; *e*, *f*, les intersections latérales; *a*, *f*, *b*, *d*, *e*, *c*, circonférence de l'ouverture du larynx.

Figure 45.

La glotte de la tortue, vue de face; *a*, *b*, glotte; *c*, trachée-artère.

Figure 46.

Le même larynx, vu dépouillé de toutes les partiequi le recouvroient

Figure 47.

Larynx de vipère; *a*, *b*, glotte étroite & ſans épiglotte; *b*, *c*, *d*, la langue bifurquée & placée dans un étui le long de l'œſophage; *e*, *f*, région où ſont les dents; *g*, la trachée-artère.

Figure 48.

La même trachée-artère, vue en deſſous; *a*, *b*, langue bifurquée & placée dans l'étui *c*, *d*; *f*, *e*, écailles inférieures; *g*, endroit où la trachée-artère commence à ſe bifurquer; *h*, endroit où la diviſion de la trachée-artère eſt encore plus marquée.

Figure 49.

Larynx de la grande couleuvre; *a*, *b*, la glotte; *c*, la trachée-artère; *d*, *e*, la langue bifurquée.

Figure 50.

La même pièce, vue en deſſous.

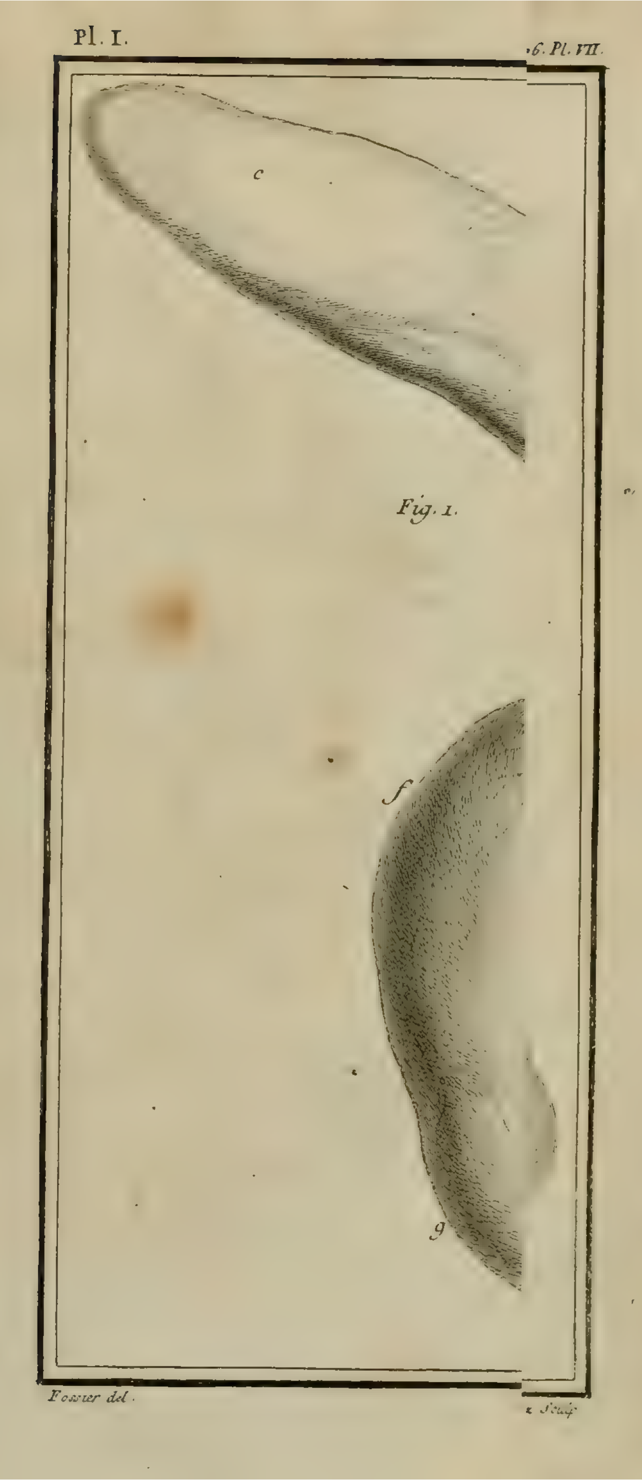
Figure 51.

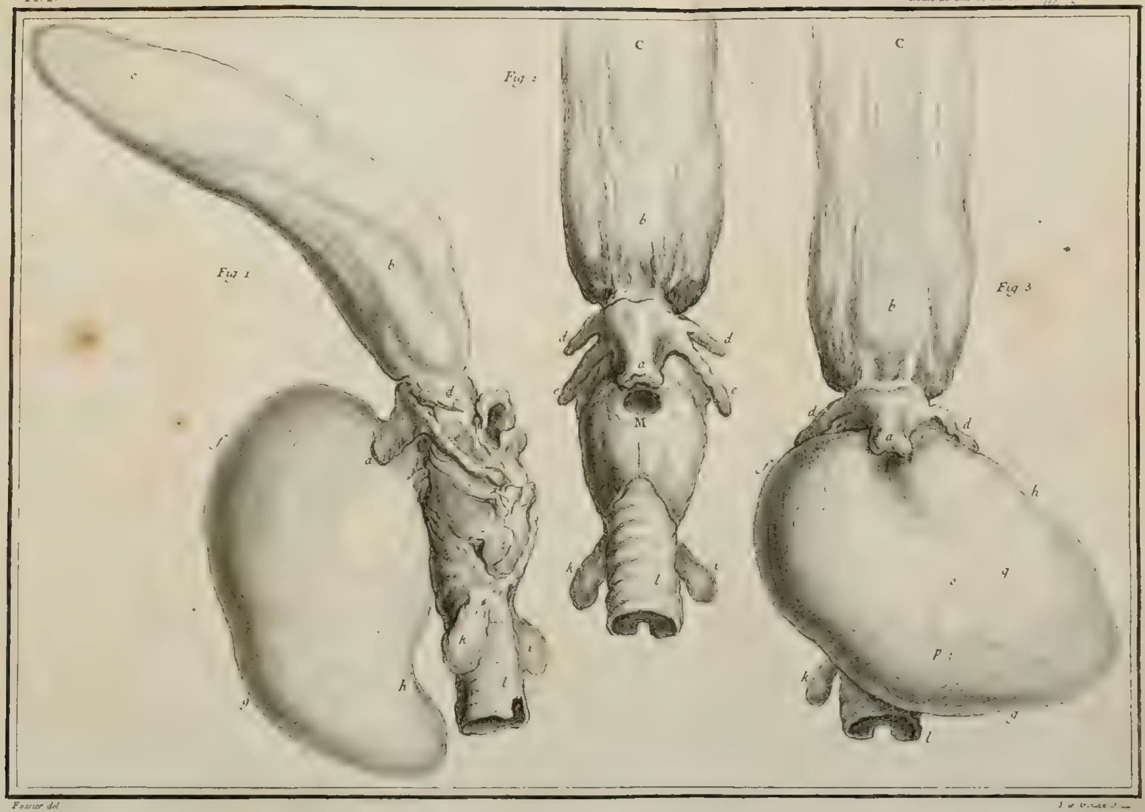
La même pièce, vue de profil; *a*, *b*, étui dans lequel la langue ſe renferme, & d'où elle ſe dégage avec beaucoup de facilité.

Figure 52.

Extrémités de la trachée-artère de la couleuvre & de la vipère; *a*, *b*, la fin de la trachée-artère; *b*, l'extrémité en bec de flûte; *c*, *d*, *e*, *f*, portion des ventricules dans leſquels la trachée-artère s'ouvre & ſe termine.

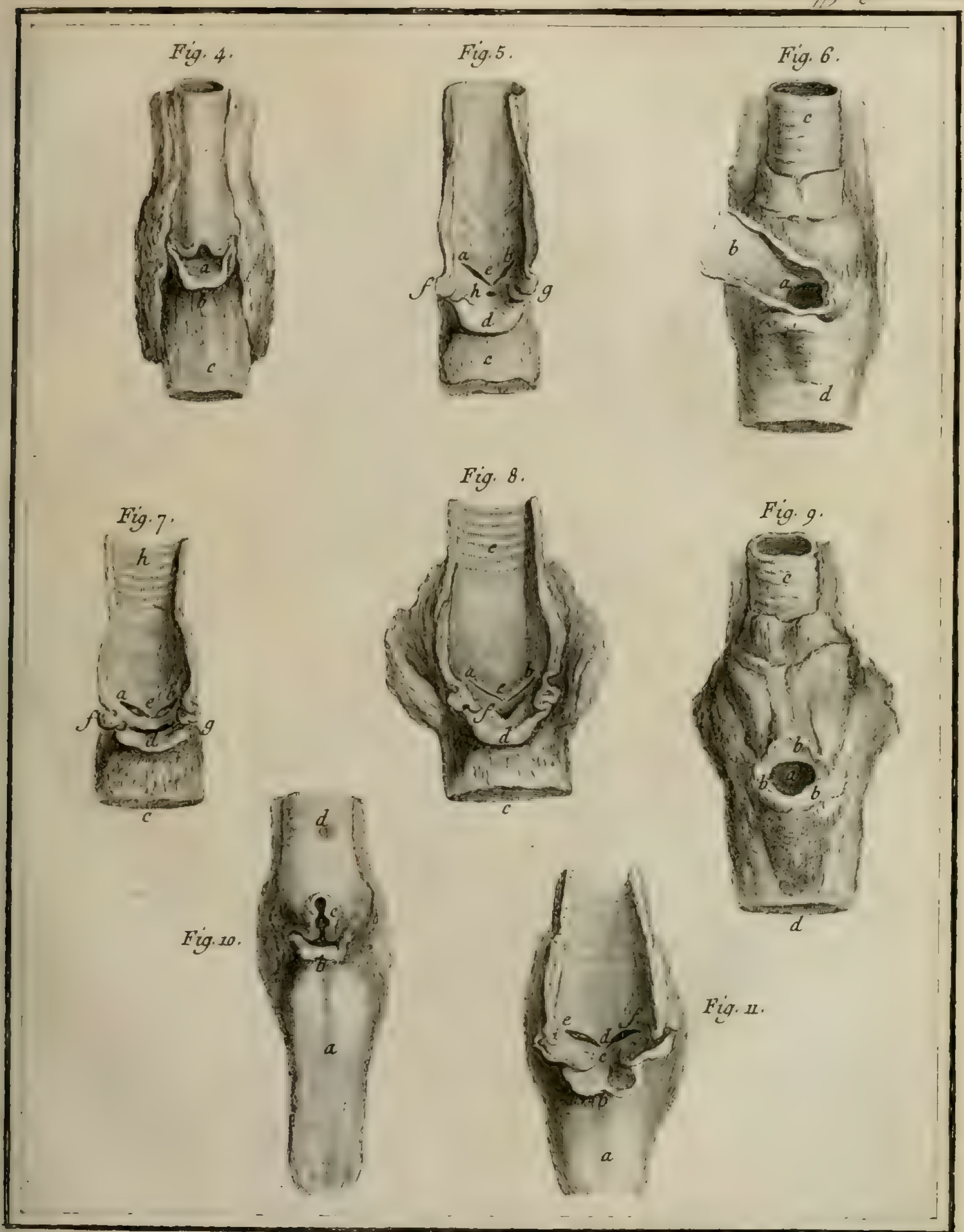



c
Fig. 1.
f
g
Fossier del.
Sculp.



Fossier del

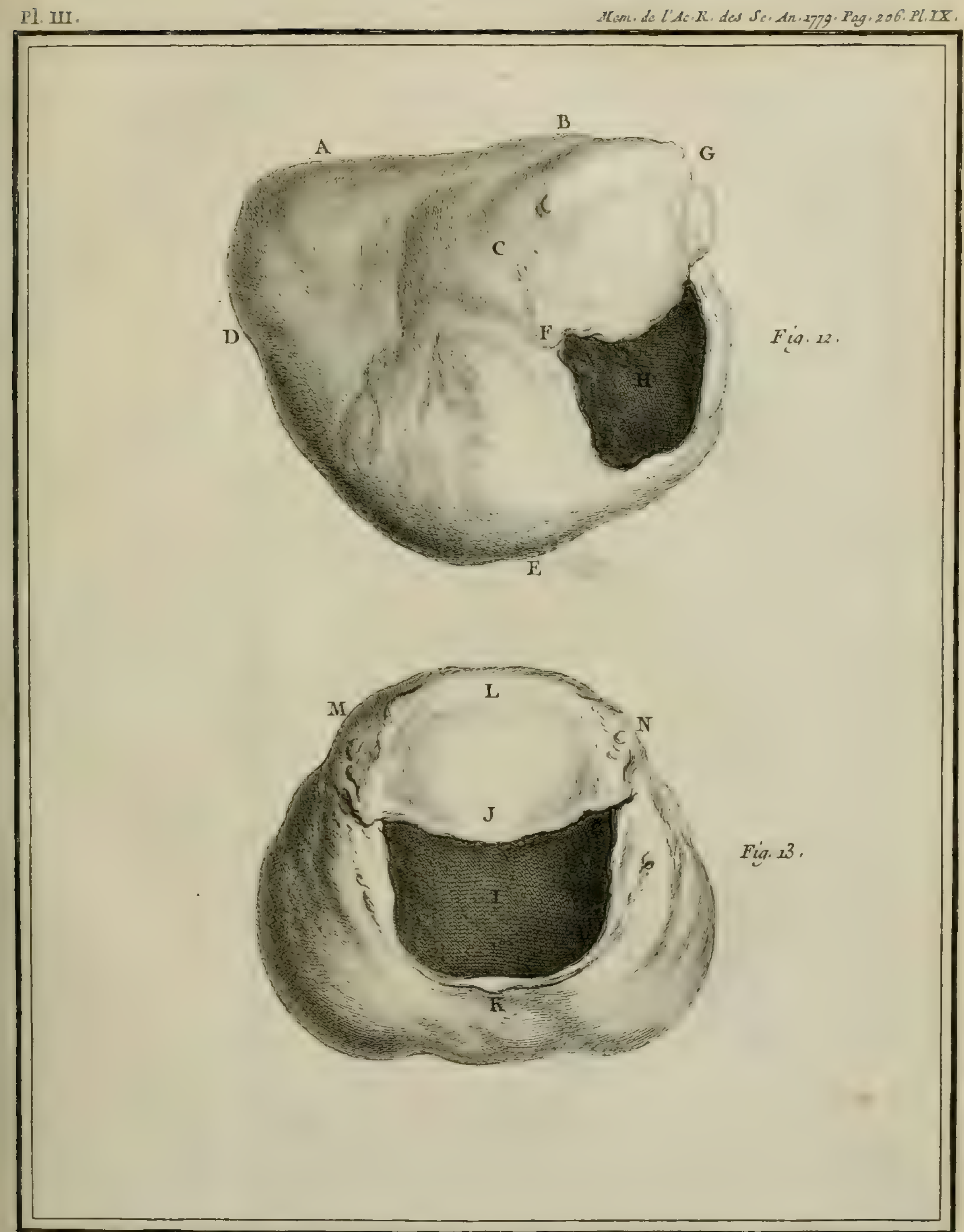
Mem. de l'Ac. R. des Sc. An. 1779. Pag. 206. Pl. VIII.



Fossier del.

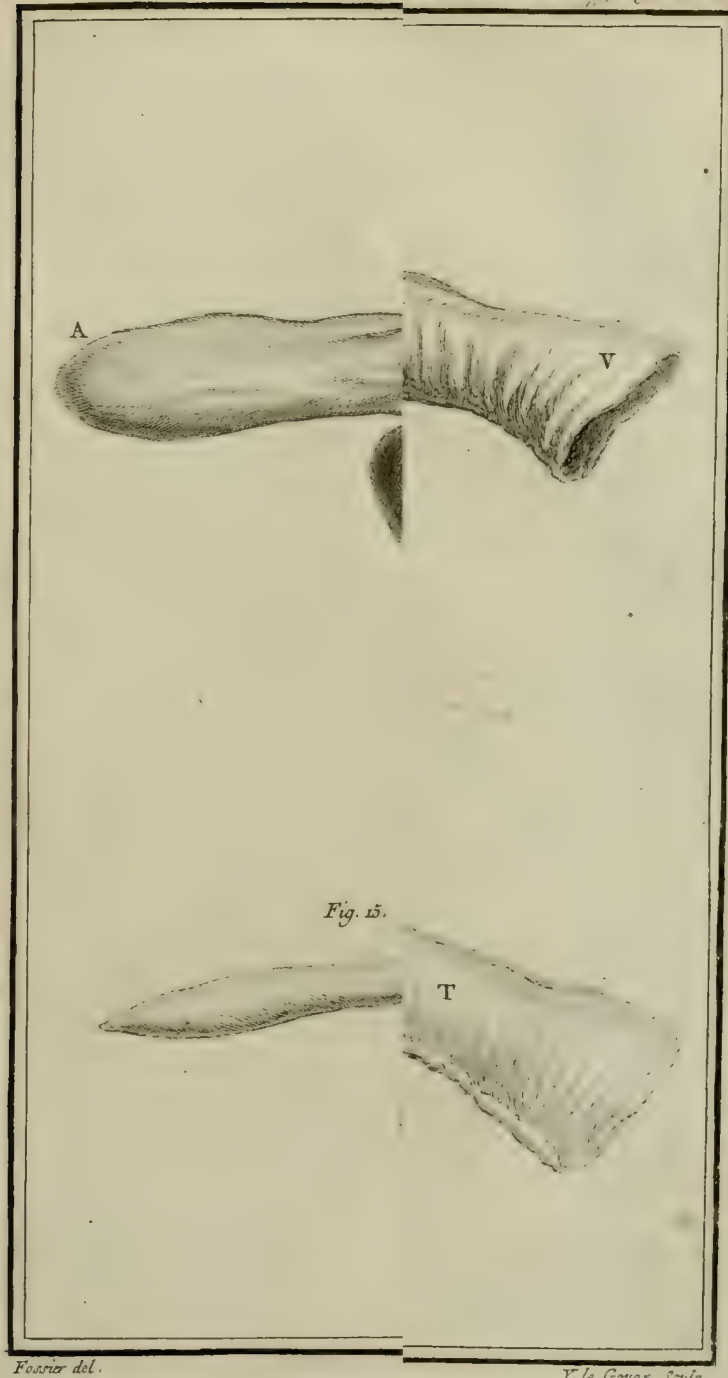
Y. le Gouaz Sc.

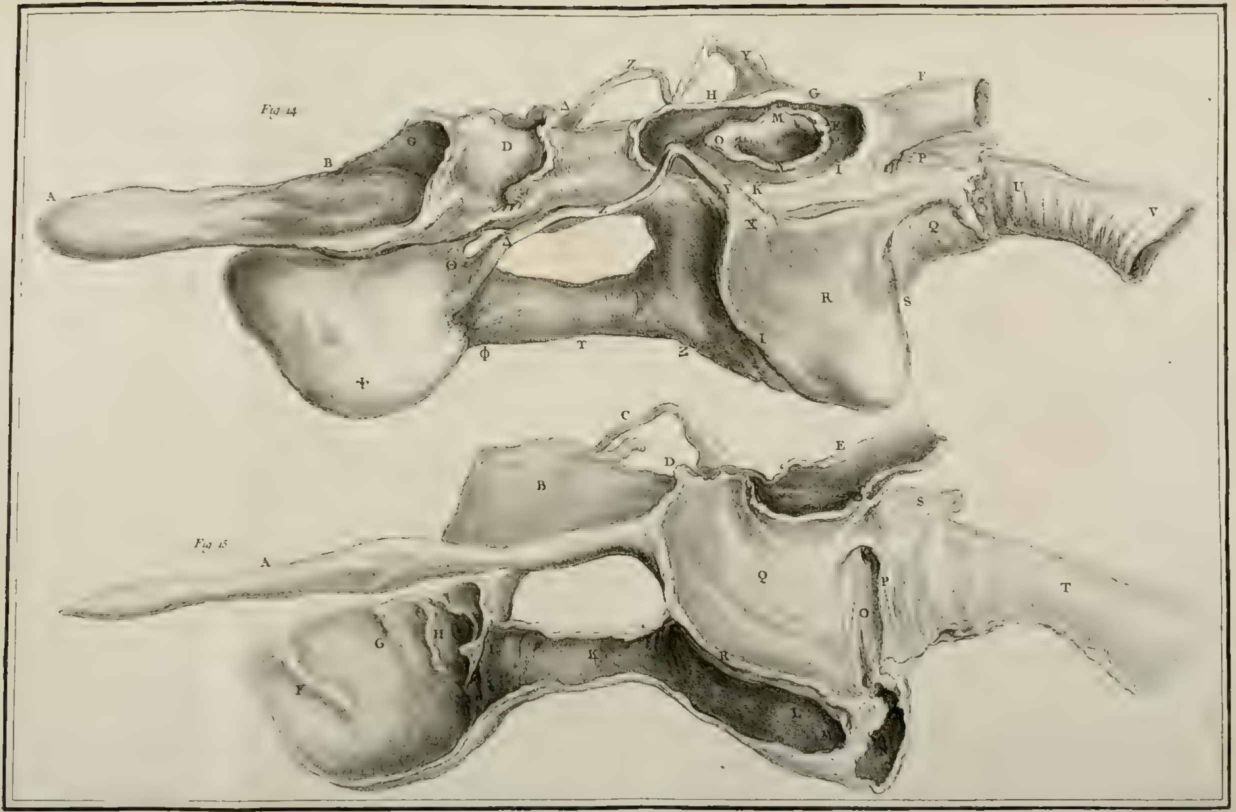

HISTO

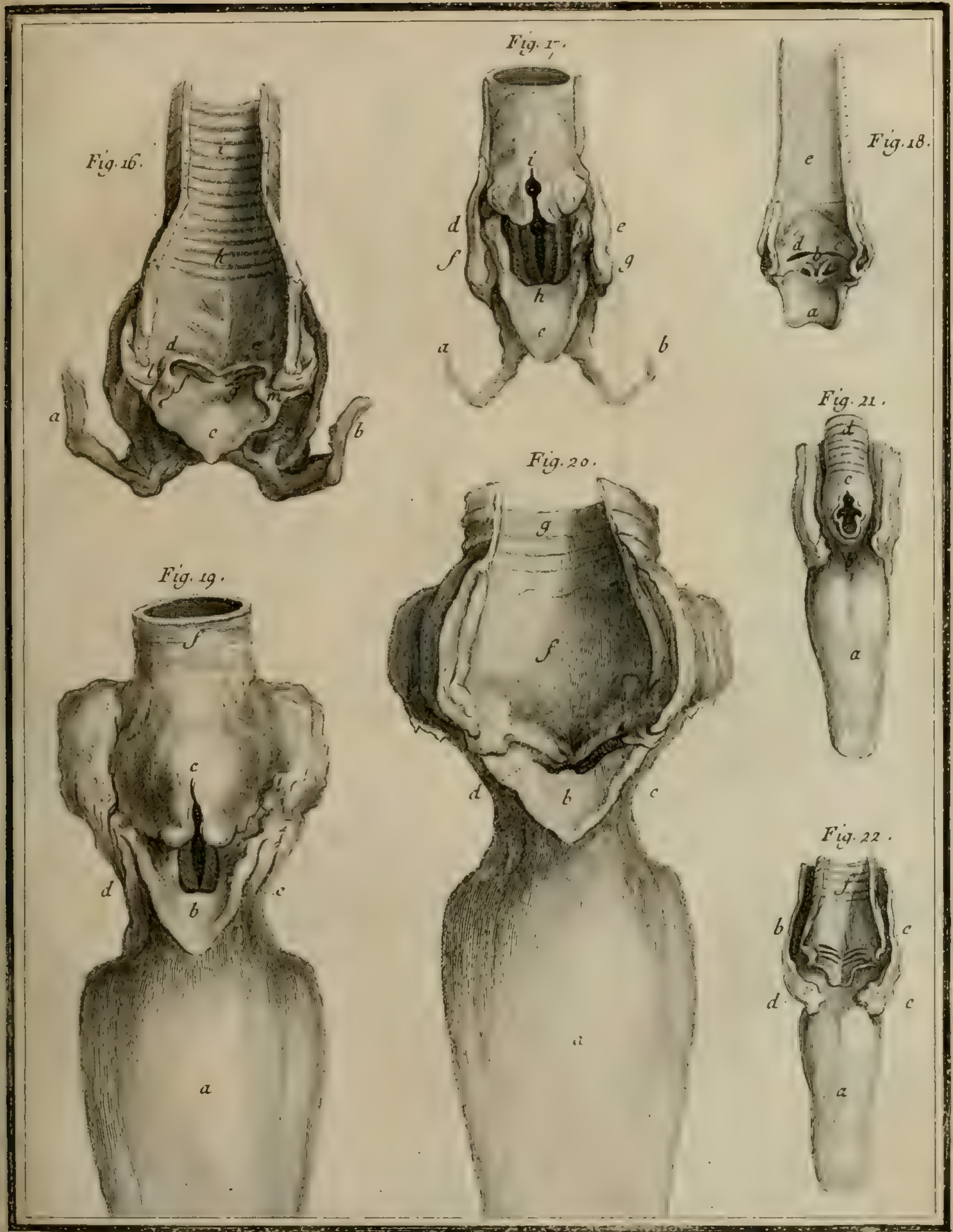


Fossier del. Y. le Gouaz Sculp.



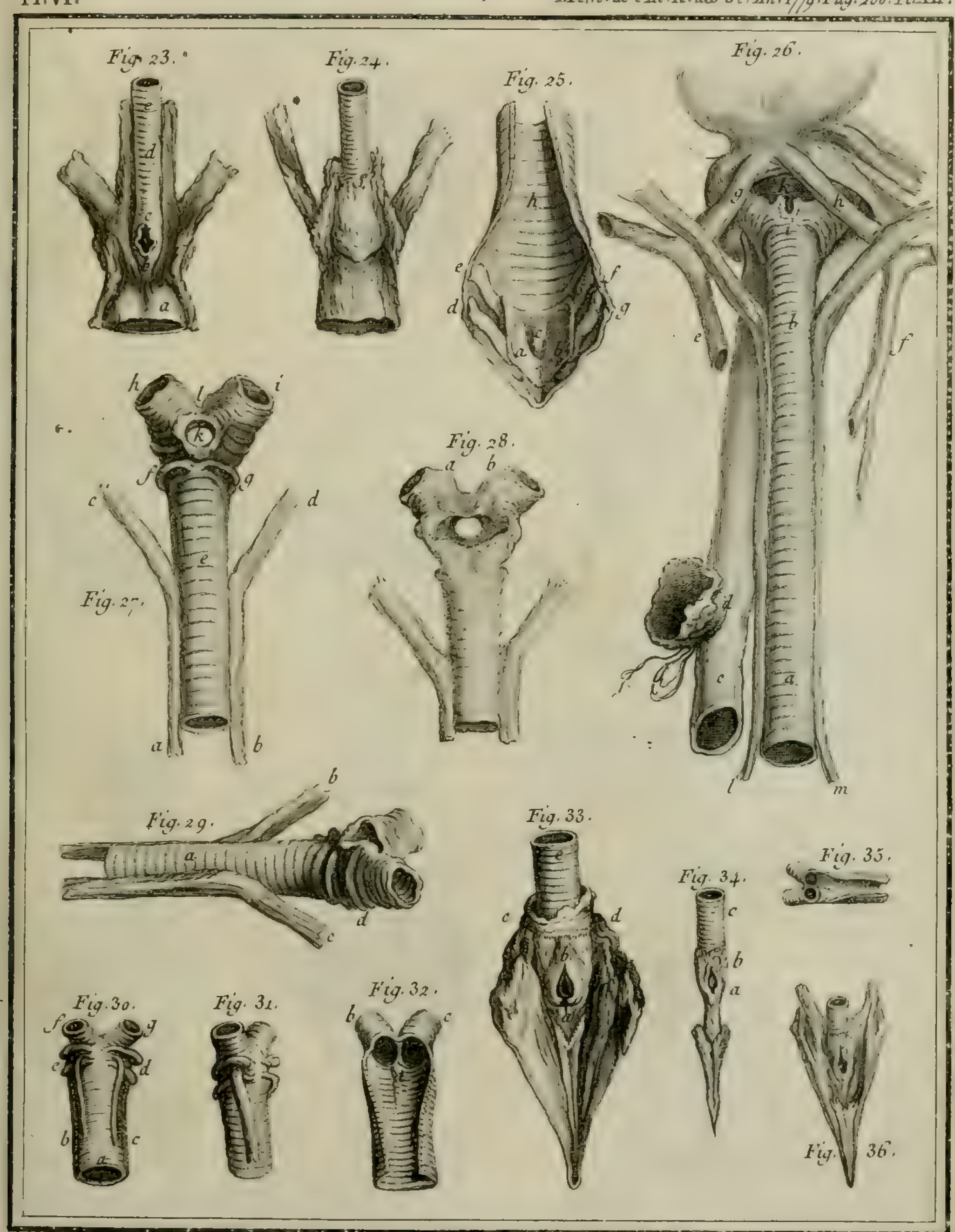

de l'Ac R. des Sc An 1779 Pag 206 Pl X.
A
V
Fig. 15.
T
Fossier del.
Y. le Gouaz Sculp.


Fig. 14
A
B
G
D
Δ
Z
Y
H
G
F
M
O
E
I
P
K
U
V
X
Q
Θ
R
S
Φ
T
Ψ
Fig. 15
A
B
C
D
E
S
Q
P
O
T
G
H
K
R
F
L
M



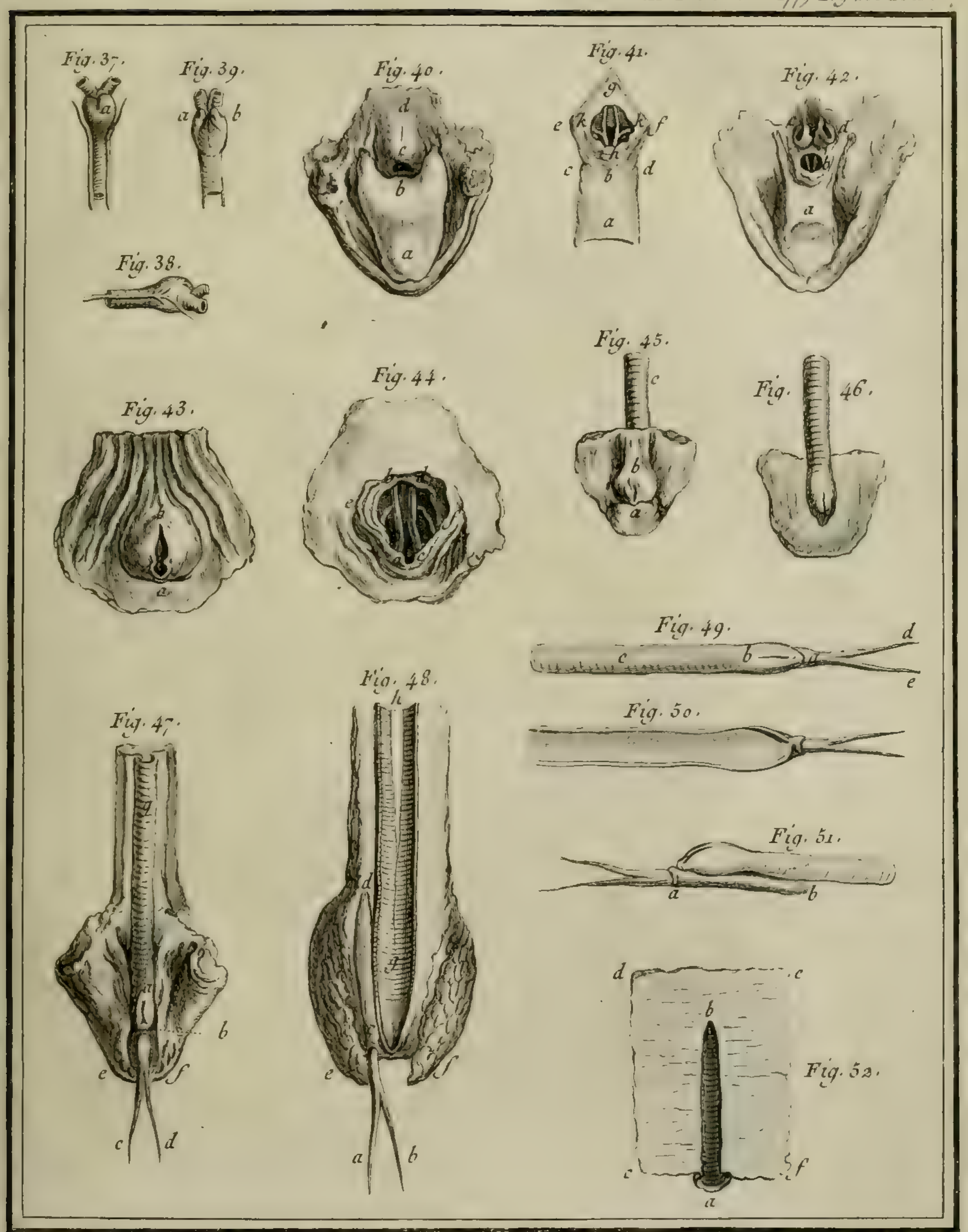
Fossier del. Y. le Gouaz Sc.





Fossier del. Y. le Gouaz Sc.





Fossier del. Y. le Gouaz Sc.

Fig. 52. d. e. c. f. Vesicules dans lesquelles se Termine la Trachée-Artère.



MÉMOIRE SUR LES SUITES.

Par M. DE LA PLACE.

I.

LA théorie des Suites eſt un des objets les plus importans de l'analyſe : tous les Problèmes qui ſe réduiſent à des approximations, & conſéquemment preſque toutes les applications des Mathématiques à la Nature, dépendent de cette théorie; auſſi voyons-nous qu'elle a principalement fixé l'attention des Géomètres; ils ont trouvé un grand nombre de beaux théorèmes & de méthodes ingénieuſes, ſoit pour développer les fonctions en ſéries, ſoit pour ſommer les ſuites exactement ou par approximation; mais ils n'y ſont parvenus que par des voies indirectes & particulières, & l'on ne peut douter que dans cette branche de l'analyſe, comme dans toutes les autres, il n'y ait une manière générale & ſimple de l'enviſager, dont les vérités déjà connues dérivent, & qui conduiſe à pluſieurs vérités nouvelles. La recherche d'une ſemblable méthode eſt l'objet de ce Mémoire; celle à laquelle je ſuis parvenu eſt fondée ſur la conſidération de ce que je nomme *fonctions génératrices :* c'eſt un nouveau genre de calcul, que l'on peut nommer *calcul des fonctions génératrices*, & qui m'a paru mériter d'être cultivé par les Géomètres. J'expoſe d'abord quelques réſultats très-ſimples ſur ces fonctions, & j'en déduis une méthode pour interpoler les ſuites, non-ſeulement lorſque les différences conſécutives des termes ſont convergentes, ce qui eſt le ſeul cas que l'on ait conſidéré juſqu'ici; mais encore lorſque la ſérie propoſée converge vers une ſuite récurrente, la dernière raiſon de ſes termes étant donnée par une équation linéaire aux différences finies, dont les coëfficiens ſont conſtans. L'intégration de ce genre d'équation eſt un corollaire de cette analyſe.

En paſſant enſuite du fini à l'infiniment petit, je donne une formule générale pour interpoler les ſuites, dont la dernière raiſon des termes eſt repréſentée par une équation linéaire aux différences infiniment petites, dont les coëfficiens ſont conſtans; d'où je conclus l'intégration de ces équations. En appliquant la même méthode à la transformation des ſuites, il en réſulte un moyen fort ſimple de les transformer en d'autres, dont les termes ſuivent une loi donnée: enfin, le rapport des fonctions génératrices aux variables correſpondantes, me conduit immédiatement à l'analogie ſingulière des puiſſances poſitives avec les différences, & des puiſſances négatives avec les intégrales, analogie obſervée d'abord par Léibnitz, & miſe depuis dans un plus grand jour par M. de la Grange *(Mémoires de Berlin, année 1772)*; tous les théorèmes auxquels le ſecond de ces deux grands Géomètres eſt parvenu dans les Mémoires cités d'après cette analogie, & beaucoup d'autres encore, ſe déduiſent avec la plus grande facilité, de ce rapport.

En conſidérant de la même manière les ſéries à deux variables, j'expoſe une méthode générale pour les interpoler, non-ſeulement dans le cas où les différences conſécutives des termes de la ſérie ſont convergentes; mais encore lorſque la ſérie converge vers une ſuite *récurrorécurrente*, la dernière raiſon de ſes termes étant donnée par une équation linéaire aux différences finies partielles dont les coëfficiens ſont conſtans; d'où réſulte l'intégration de ce genre d'équations. Cette matière eſt de la plus grande importance dans l'analyſe des haſards; je crois être le premier qui l'ait conſidérée *(voyez les tomes VI & VII des Savans étrangers)*; M. de la Grange l'a depuis traitée par une très-belle & très-ſavante analyſe, dans les Mémoires de Berlin, pour l'*année 1775*; j'oſe eſpérer que la manière nouvelle dont je l'enviſage dans ce Mémoire, ne déplaira pas aux Géomètres. Il ſuit de mes recherches, que l'intégration de toute équation linéaire aux différences finies partielles, dont les coëfficiens ſont conſtans, peut ſe ramener à celle d'une équation linéaire aux différences

infiniment

infiniment petites, au moyen d'*intégrales définies* prises par rapport à une nouvelle variable; je nomme *intégrale définie*, une intégrale prise depuis une valeur déterminée de la variable jusqu'à une autre valeur déterminée. Cette remarque plus curieuse qu'utile dans la théorie des différences finies, devient très-utile, lorsqu'on la transporte aux équations linéaires aux différences infiniment petites partielles; elle donne un moyen de les intégrer dans une infinité de cas qui se refusent à toutes les méthodes connues, & sans elle il m'eût été presque impossible de prévoir les formes dont les intégrales sont alors susceptibles. Mais pour rendre ce que je viens de dire plus sensible, il ne sera pas inutile de rappeler en peu de mots ce que l'on a découvert sur les équations linéaires aux différences infiniment petites partielles du second ordre. L'intégrale de ces équations renferme, comme l'on sait, deux fonctions arbitraires; on a de plus remarqué que ces fonctions peuvent être dans l'intégrale, affectées du signe différentiel *d*; & c'est, si je ne me trompe, à M.rs Euler & de la Grange que l'on doit cette remarque importante à laquelle ils ont été conduits par la théorie du son, dans le cas où l'air est considéré avec ses trois dimensions. Ces deux grands Géomètres ont ensuite étendu leurs méthodes à des équations plus compliquées que celles de ce Problème; mais il restoit à trouver une méthode au moyen de laquelle on pût généralement, ou intégrer une équation quelconque linéaire du second ordre, ou s'assurer que son intégrale est impossible en termes finis, en n'ayant égard qu'aux seules variables qu'elles renferment; c'est l'objet d'un Mémoire que j'ai inséré dans le volume de l'Académie, pour l'*année 1773*. Dans ce Mémoire, j'ai démontré 1.° Que les fonctions arbitraires ne peuvent exister dans l'intégrale que sous une forme linéaire: 2.° Que si l'intégrale est possible en termes finis, en ne considérant que les seules variables de l'équation, une des deux fonctions arbitraires est nécessairement délivrée du signe intégral $\int$. J'ai donné ensuite une méthode générale pour avoir dans ce cas l'intégrale complète de l'équation

différentielle, en ſuppoſant même que cette équation renferme un terme indépendant de la variable principale, & qui ſoit une fonction quelconque des deux autres variables; d'où il ſuit, que lorſqu'une équation propoſée ſe refuſe à cette méthode, on peut être aſſuré que ſon intégrale complète eſt impoſſible en termes finis, en n'ayant égard qu'aux ſeules variables de l'équation. Maintenant, la remarque dont j'ai parlé ci-deſſus, m'a fait voir que dans ce cas, l'intégrale eſt poſſible en termes finis, au moyen d'intégrales *définies* priſes par rapport à une nouvelle variable qu'il faut néceſſairement alors introduire dans le calcul. On verra ci-après, que ces formes d'intégrales ſont du même uſage dans la ſolution des Problèmes, que les formes connues; je donne pour les obtenir, une méthode qui s'étend à un grand nombre de cas, & ſpécialement à pluſieurs queſtions phyſiques importantes, telles que le mouvement des cordes vibrantes dans un milieu réſiſtant comme la vîteſſe, la propagation du ſon dans un plan, &c, dont on n'a pu trouver encore que des ſolutions particulières.

En tranſportant aux différences infiniment petites, les remarques que je fais ſur une équation particulière aux différences finies partielles, je parviens à m'aſſurer d'une manière inconteſtable, que dans le Problème des cordes vibrantes, on peut admettre des fonctions diſcontinues, pourvu qu'aucun des angles formés par deux côtés contigus de la figure initiale de la corde ne ſoit fini; d'où il me paroît que ces fonctions peuvent être généralement employées dans tous les Problèmes qui ſe rapportent aux différences partielles, pourvu qu'elles puiſſent ſubſiſter avec les équations différentielles & avec les conditions du Problème; ainſi, la ſeule condition qui ſoit néceſſaire dans la détermination des fonctions arbitraires d'une équation propoſée aux différences partielles de l'ordre n, eſt qu'il n'y ait point de ſaut entre deux valeurs conſécutives d'une différence de ces fonctions, plus petite que la différence $n^{ième}$; & par conſéquent, que dans les courbes, au moyen deſquelles on repréſente ces fonctions arbitraires, il n'y ait point de ſaut entre deux

tangentes consécutives, si, comme dans le Problème des cordes vibrantes, l'équation différentielle est du second ordre, ou qu'il n'y ait point de saut entre deux rayons osculateurs consécutifs, si l'équation est du troisième ordre, &c; ce qui est conforme à ce que M. le Marquis de Condorcet a trouvé par une autre méthode, dans les Mémoires de l'Académie, pour l'*année 1771, pages 70 & 71.* Mais il est essentiel d'observer que si l'intégrale renferme les différences des fonctions arbitraires, on doit considérer les différences les plus élevées comme les véritables fonctions arbitraires de l'intégrale, & n'appliquer la règle précédente qu'à ces différences. Cette manière d'éclairer les points délicats de la théorie des différences infiniment petites, par celle des différences finies, est, si je ne me trompe, la plus propre à remplir cet objet, & il me semble que d'après la théorie que j'expose, il ne doit rester aucun doute sur l'usage des fonctions discontinues dans le calcul intégral aux différences partielles. Enfin, je termine ce Mémoire par la considération des équations linéaires aux différences partielles, en parties finies, & en parties infiniment petites, & par quelques théorèmes sur la réduction en séries, des fonctions à deux variables. Toutes ces recherches n'étant que le développement d'une considération fort simple sur la nature des fonctions génératrices, j'ose me flatter que l'analyse dont j'ai fait usage, pourra mériter, par sa généralité, l'attention des Géomètres.

I I.

Des Suites à une seule variable.

SOIT y_x une fonction quelconque de x; si l'on forme la suite infinie

$$y_0 + y_1 . t + y_2 . t^2 + y_3 . t^3 ..... + y_x . t^x + y_{x+1} . t^{x+1} ..... + y_\infty . t^\infty,$$

& que l'on nomme u la somme de cette suite, ou ce qui revient au même, la fonction dont le développement forme

cette ſuite ; cette fonction ſera ce que je nomme *fonction génératrice* de la variable y_x.

Une fonction génératrice d'une variable quelconque y_x, eſt donc généralement une fonction de t, qui, développée ſuivant les puiſſances de t, a cette variable y_x pour coëfficient de t^x; & réciproquement, la variable correſpondante d'une fonction génératrice, eſt le coëfficient de t^x dans le développement de cette fonction ſuivant les puiſſances de t. Il ſuit de ces définitions, que u étant la fonction génératrice de y_x, celle de y_{x-r} ſera $u.t^r$; car il eſt viſible que le coëfficient de t^x dans $u t^r$, eſt égal à celui de t^{x-r} dans u, & par conſéquent égal à y_{x-r}.

Le coëfficient de t^x dans $u.(\frac{1}{t} - 1)$ eſt évidemment égal à $y_{x+1} - y_x$, ou à $\Delta.y_x$, Δ étant la caractériſtique des différences finies; on aura donc la fonction génératrice de la différence finie d'une quantité, en multipliant par $\frac{1}{t} - 1$, la fonction génératrice de la quantité elle-même; la fonction génératrice de $\Delta^2 y_x$ eſt ainſi, $u.(\frac{1}{t} - 1)^2$, & généralement, celle de $\Delta^i.y_x$ eſt $u.(\frac{1}{t} - 1)^i$; d'où l'on peut conclure que la fonction génératrice de $\Delta^i.y_{x-r}$ eſt $u.t^r.(\frac{1}{t} - 1)^i$.

Pareillement, le coëfficient de t^x dans

$$u.(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} \ldots\ldots + \frac{q}{t^n}) \text{ eſt}$$

$$a y_x + b.y_{x+1} + c.y_{x+2} + e.y_{x+3} \ldots\ldots + q.y_{x+n};$$

en nommant donc $\nabla.y_x$ cette quantité, ſa fonction génératrice ſera

$$u.(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} \ldots\ldots\ldots + \frac{q}{t^n}).$$

Si l'on nomme $\nabla^2 y_x$ la quantité

$$a\nabla . y_x + b . \nabla . y_{x+1} + c . \nabla . y_{x+2} \ldots\ldots + q . \nabla . y_{x+n},$$

$\nabla^3 . y_x$ la quantité

$$a\nabla^2 . y_x + b . \nabla^2 . y_{x+1} + c\nabla^2 . y_{x+2} \ldots\ldots + q . \nabla^2 . y_{x+n},$$

& ainſi de ſuite; leurs fonctions génératrices correſpondantes ſeront

$$u . \left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \ldots\ldots\ldots + \frac{q}{t^n}\right)^2,$$

$$u . \left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \ldots\ldots\ldots + \frac{q}{t^n}\right)^3,$$

&c.

& généralement, la fonction génératrice de $\nabla^i . y_x$ ſera

$$u . \left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \ldots\ldots \frac{q}{t^n}\right)^i.$$

Partant la fonction génératrice de $\Delta^i . \nabla^s . y_{x-r}$ ſera

$$u . t^r . \left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \ldots\ldots + \frac{q}{t^n}\right)^s . \left(\frac{1}{t} - 1\right)^i.$$

On peut généraliſer encore les théorèmes précédens, en ſuppoſant que $\nabla . y_x$ repréſente une fonction quelconque linéaire de y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, &c ; que $\nabla^2 . y_x$ repréſente une nouvelle fonction dans laquelle $\nabla . y_x$ entre de la même manière que y_x dans $\nabla . y_x$; que $\nabla^3 . y_x$ repréſente une fonction de $\nabla^2 y_x$ ſemblable à celle de $\nabla . y_x$ en y_x, & ainſi de ſuite; car u étant la fonction génératrice de y_x, ſi l'on nomme $u s$ celle de $\nabla . y_x$, $u s^2$, $u . s^3$, &c, ſeront les fonctions génératrices de $\nabla^2 . y_x$, $\nabla^3 . y_x$, &c; en multipliant donc la fonction u, par les puiſſances ſucceſſives de s, on aura les fonctions génératrices des produits de y_x, par les puiſſances correſpondantes de ∇, ∇ n'étant point une quantité, mais une caractériſtique ; & cela ſera encore vrai, en ſuppoſant ces puiſſances fractionnaires, & même incommenſurables.

s étant une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$, si l'on développe s^i, suivant les puissances de $\frac{1}{t}$, & que l'on désigne par $\frac{K}{t^m}$, un terme quelconque de ce développement, le coëfficient de t^x dans $\frac{K.u}{t^m}$, sera $K.y_{x+m}$; on aura donc le coëfficient de t^x dans us^i, ou ce qui revient au même, on aura $\nabla^i.y^x$, 1.° en substituant dans s, y_x au lieu de $\frac{1}{t}$; 2.° en développant ce que devient alors s^i, suivant les puissances de y_x, & en ajoutant à x, dans chaque terme, l'exposant de la puissance de y_x, c'est-à-dire en écrivant y_x, au lieu de $(y_x)^0$; y_{x+1}, au lieu de $(y_x)^1$; y_{x+2}, au lieu de $(y_x)^2$, & ainsi de suite.

Si au lieu de développer s^i, suivant les puissances de $\frac{1}{t}$, on le développe suivant les puissances de $\frac{1}{t} - 1$, & que l'on désigne par $K.(\frac{1}{t} - 1)^m$, un terme quelconque de ce développement, le coëfficient de t^x dans $Ku.(\frac{1}{t} - 1)^m$, sera $K.\Delta^m.y_x$; on aura donc $\nabla^i.y_x$, 1.° en substituant dans s, $\Delta.y_x$, au lieu de $\frac{1}{t} - 1$, ou, ce qui revient au même, $1 + \Delta y_x$, au lieu de $\frac{1}{t}$; 2.° en développant ce que devient alors s^i, suivant les puissances de $\Delta.y_x$, & en appliquant à la caractéristique Δ les exposans des puissances de $\Delta.y_x$, c'est-à-dire en écrivant $\Delta^0.y_x$, ou y_x, au lieu de $(\Delta.y_x)^0$; $\Delta^2 y_x$, au lieu de $(\Delta.y_x)^2$, & ainsi de suite.

En général, si l'on considère s comme une fonction de r, r étant une fonction de $\frac{1}{t}$, telle que le coëfficient de t^x dans ur, soit $\square.y_x$; on aura $\nabla^i.y_x$, en substituant dans

s, $\square \, . y_x$, au lieu de r; en développant enſuite ce que devient alors s^i, ſuivant les puiſſances de $\square \, . y_x$, & en appliquant à la caractériſtique $\square$, les expoſans des puiſſances de $\square \, . y_x$, c'eſt-à-dire en écrivant $\square^0 . y_x$, ou y_x, au lieu de $(\square \, . y_x)^0$; $\square^2 . y_x$, au lieu de $(\square \, . y^x)^2$, & ainſi du reſte. On aura donc ainſi les valeurs de $\nabla . y_x$, $\nabla^2 . y_x$, &c, par de ſimples développemens de fonctions algébriques.

Soit z la fonction génératrice de $\Sigma^i . y_x$, Σ étant la caractériſtique des intégrales finies; on aura, par ce qui précède, $z . (\frac{1}{t} - 1)^i$ pour la fonction génératrice de y_x; mais cette fonction doit, en n'ayant égard qu'aux puiſſances poſitives ou nulles de t, ſe réduire à u; on aura donc

$$z . (\frac{1}{t} - 1)^i = u + \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} \ldots + \frac{F}{t^i};$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{u t^i + A . t^{i-1} + B . t^{i-2} + C . t^{i-3} \ldots\ldots + F}{(1 - t)^i}.$$

A, B, C, ... F étant les i conſtantes arbitraires qu'introduiſent les i intégrations ſucceſſives de y_x. En faiſant abſtraction de ces conſtantes, la fonction génératrice de $\Sigma^i . y_x$ feroit $u . (\frac{1}{t} - 1)^{-i}$; on auroit donc la fonction génératrice de $\Sigma^i . y_x$, en changeant i en $-i$ dans la fonction génératrice de $\Delta^i . y_x$; & réciproquement, on auroit la variable correſpondante de la fonction $u . (\frac{1}{t} - 1)^i$, dans laquelle on ſuppoſe i négatif, en changeant i en $-i$ dans $\Delta^i . y_x$, & en ſuppoſant que les différences négatives repréſentent des intégrales; mais ſi l'on a égard aux conſtantes arbitraires, il faut, en paſſant des puiſſances poſitives aux puiſſances négatives de $\frac{1}{t} - 1$, augmenter u d'un nombre de termes $\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} +$ &c, égal à

l'expoſant de la puiſſance négative de $\frac{1}{t} - 1$. On voit par-là, comment les fonctions génératrices ſe forment de la loi des variables correſpondantes, & réciproquement de quelle manière ces variables ſe déduiſent de leurs fonctions génératrices. Appliquons maintenant ces réſultats à la théorie des ſuites.

III.

De l'interpolation des ſuites à une ſeule variable, & de l'intégration des équations différentielles linéaires.

TOUTE la théorie de l'interpolation des ſuites, conſiſte à déterminer, quel que ſoit i, la valeur de y_{x+i} en fonctions de y_x, & des termes qui précèdent ou qui ſuivent y_x. Pour cela, on doit obſerver que y_{x+i} eſt égal au coëfficient de t^{x+i} dans le développement de u, & par conſéquent, égal au coëfficient de t^x dans le développement de $\frac{u}{t^i}$; or on a

$$\frac{u}{t^i} = u\left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^i = u.\left\{1 + i.\left(\frac{1}{t} - 1\right) + \frac{i.(i-1)}{1.2}.\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + \frac{i.(i-1).(i-2)}{1.2.3}.\left(\frac{1}{t} - 1\right)^3 + \&c.\right\}$$

De plus, le coëfficient de t^x dans le développement de u, eſt y_x; ce coëfficient dans le développement de $u.\left(\frac{1}{t} - 1\right)$, eſt $\Delta.y_x$; dans le développement de $u.\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2$, il eſt égal à $\Delta^2.y_x$, & ainſi de ſuite; on aura donc, en repaſſant des fonctions génératrices aux variables correſpondantes,

$$y_{x+i} = y_x + i.\Delta.y_x + \frac{i.(i-1)}{1.2}.\Delta^2.y_x + \frac{i.(i-1).(i-2)}{1.2.3}.\Delta^3.y_x + \&c.$$

Cette équation ayant lieu, quel que ſoit i, ſervira à interpoler les ſuites dont les différences des termes vont en décroiſſant.

Toutes

Toutes les manières de développer la puiſſance $\frac{1}{t^i}$, donneront autant de méthodes différentes pour interpoler les ſuites; ſoit par exemple, $\frac{1}{t} = 1 + \frac{\alpha}{t^r}$; en développant $\frac{1}{t^i}$, ſuivant les puiſſances de α, au moyen du beau théorème de M. de la Grange, *(voyez les Mémoires de l'Académie, année 1777, page 115)* on trouvera facilement

$$\frac{u}{t^i} = u.\left\{1 + i.\alpha + \frac{i.(i+2r-1)}{1.2}.\alpha^2 + \frac{i.(i+3r-1).(i+3r-2)}{1.2.3}.\alpha^3 + \frac{i.(i+4r-1).(i+4r-2).(i+4r-3)}{1.2.3}.\alpha^4 + \&c.\right\}$$

Maintenant, α étant égal à $t^r.(\frac{1}{t} - 1)$, le coëfficient de t^x dans le développement de $u\alpha$, eſt par l'*article précédent*, $\Delta.y_{x-r}$; ce même coëfficient dans le développement de $u\alpha^2$, eſt $\Delta^2.y_{x-2r}$, & ainſi de ſuite; on aura donc

$$y_{x+i} = y_x + i.\Delta.y_{x-r} + \frac{i.(i+2r-1)}{1.2}.\Delta^2.y_{x-2r} + \frac{i.(i+3r-1).(i+3r-2)}{1.2.3}.\Delta^3.y_{x-3r} + \frac{i.(i+4r-1).(i+4r-2).(i+4r-3)}{1.2.3.4}.\Delta^4.y_{x-4r} + \&c.$$

IV.

Voici préſentement une méthode générale d'interpolation qui a l'avantage de s'appliquer, non-ſeulement aux ſuites dont les différences des termes finiſſent par être nulles, mais encore aux ſuites dont la dernière raiſon des termes eſt celle d'une ſuite récurrente quelconque.

Suppoſons d'abord que l'on ait

$$t.(\frac{1}{t} - 1)^2 = z,$$

& cherchons la valeur de $\frac{1}{t^i}$ en z.

Il eſt clair que $\frac{1}{t^i}$ eſt égal au coëfficient de θ^i, dans le

développement de la fraction $\frac{1}{1-\frac{\theta}{t}}$; si l'on multiplie le numérateur & le dénominateur de cette fraction par $1 - \theta t$, on aura celle-ci $\frac{1-\theta t}{1-\theta(\frac{1}{t}+t)+\theta^2}$; l'équation $t.(\frac{1}{t} - 1)^2 = z$, donne $\frac{1}{t} + t = 2 + z$, ce qui change la fraction précédente dans la suivante $\frac{1-\theta t}{(1-\theta)^2 - z\theta}$; or on a

$$\frac{1}{(1-\theta)^2 - z\theta} = \frac{1}{(1-\theta)^2} + \frac{z\theta}{(1-\theta)^4} + \frac{z^2.\theta^2}{(1-\theta)^6} + \frac{z^3.\theta^3}{(1-\theta)^8} + \&c.$$

D'ailleurs, le coëfficient de θ^r dans le développement de $\frac{1}{(1-\theta)^s}$, est égal à $\frac{\partial^r.(1-\theta)^{-s}}{1.2.3 \ldots\ldots r.\partial\theta^r}$, pourvu que l'on suppose $\theta = 0$ après les différenciations, ce qui donne $\frac{s.(s+1).(s+2)\ldots\ldots\ldots\ldots(s+r-1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots r}$ pour ce coëfficient; d'où il suit que le coëfficient de θ^i est

1.° $i + 1$ dans le développement de $\frac{1}{(1-\theta)^2}$;

2.° $\frac{i.(i+1).(i+2)}{1.2.3}$ dans le développement de $\frac{\theta}{(1-\theta)^4}$;

3.° $\frac{(i-1).i.(i+1).(i+2).(i+3)}{1.2.3.4.5}$ dans le développement de $\frac{\theta^2}{(1-\theta)^6}$,

& ainsi du reste; donc si l'on nomme Z le coëfficient de θ^i dans le développement de la fraction $\frac{1}{(1-\theta)^2 - z\theta}$, on aura

$$Z = (i+1) + \frac{i.(i+1).(i+2)}{1.2.3}.z + \frac{(i-1).i.(i+1).(i+2).(i+3)}{1.2.3.4.5}.z^2$$
$$+ \frac{(i-2).(i-1).i.(i+1).(i+2).(i+3).(i+4)}{1.2.3.4.5.6.7}.z^3 + \&c.$$

ou

$$Z = i + 1 + \frac{(i+1).[(i+1)^2 - 1]}{1.2.3}.z + \frac{(i+1).[(i+1)^2 - 1].[(i+1)^2 - 4]}{1.2.3.4.5}.z^2$$
$$+ \frac{(i+1).[(i+1)^2 - 1].[(i+1)^2 - 4].[(i+1)^2 - 9]}{1.2.3.4.5.6.7}.z^3 + \&c.$$

Si l'on nomme ensuite Z' le coëfficient de θ^i dans le développement de $\frac{\theta}{(1-\theta)^2 - z\theta}$, on aura Z', en changeant dans Z, i en $i - 1$, ce qui donne

$$Z' = i + \frac{i.(i^2 - 1)}{1.2.3}.z + \frac{i.(i^2 - 1).(i^2 - 4)}{1.2.3.4.5}.z^2$$
$$+ \frac{i.(i^2 - 1).(i^2 - 4).(i^2 - 9)}{1.2.3.4.5.6.7}.z^3 + \&c;$$

on aura ainsi $Z - tZ'$, pour le coëfficient de θ^i, dans le développement de la fraction $\frac{1 - \theta t}{(1-\theta)^2 - z\theta}$; ce sera par conséquent l'expression de $\frac{1}{t^i}$; partant

$$\frac{u}{t^i} = u.(Z - tZ').$$

Cela posé, le coëfficient de t^x dans $\frac{u}{t^i}$, est y_{x+i}; ce même coëfficient, dans un terme quelconque de $u.Z$, tel que Kuz^r, ou, ce qui revient au même, $Ku.t^r.(\frac{1}{t} - 1)^{2r}$, est, par l'*article II*, égal à $K.\Delta^{2r}.y_{x-r}$; dans un terme quelconque de utZ', tel que $Kut.z^r$, ce coëfficient est $K.\Delta^{2r}.y_{x-r-1}$; on aura donc, en repassant des fonctions génératrices aux variables correspondantes,

$$y_{x+i} = (i+1).y_x + \frac{(i+1).[(i+1)^2 - 1]}{1.2.3}.\Delta^2.y_{x-1}$$
$$+ \frac{(i+1).[(i+1)^2 - 1].[(i+1)^2 - 4]}{1.2.3.4.5}.\Delta^4.y_{x-2} + \&c.$$
$$- i.y_{x-1} - \frac{i.(i^2 - 1)}{1.2.3}.\Delta^2.y_{x-2}$$
$$- \frac{i.(i^2 - 1).(i^2 - 4)}{1.2.3.4.5}.\Delta^4.y_{x-3} - \&c.$$

On peut varier encore la forme précédente de y_{x+i}; pour cela, soit Z'' ce que devient Z', lorsqu'on y change i en $i - 1$, & par conséquent ce que devient Z, lorsqu'on y change i en $i - 2$; l'équation $\frac{1}{t^i} = Z - tZ'$ donnera $\frac{1}{t^{i-1}} = Z' - tZ''$; partant $\frac{1}{t^i} = \frac{Z'}{t} - Z''$; en ajoutant ces deux valeurs de $\frac{1}{t^i}$, & prenant la moitié de leur somme, on aura

$$\frac{1}{t^i} = \frac{1}{2} \cdot Z - \frac{1}{2} \cdot Z'' + \frac{1}{2}(1 + t) \cdot (\frac{1}{t} - 1) Z';$$

or on a

$$\frac{1}{2} \cdot Z - \frac{1}{2} \cdot Z'' = \frac{1}{2} \cdot \{i + 1 + \frac{i \cdot (i+1) \cdot (i+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot z + \&c.\}$$
$$- \frac{1}{2} \cdot \{i - 1 + \frac{(i-2) \cdot (i-1) \cdot i}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot z + \&c.\}$$
$$= 1 + \frac{i^2}{1 \cdot 2} + z \cdot \frac{i^2 \cdot (i^2 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot z^2 + \frac{i^2 \cdot (i^2 - 1) \cdot (i^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot z^3 + \&c.$$

Partant

$$\frac{u}{t^i} = u \cdot \{1 + \frac{i^2}{1 \cdot 2} \cdot t \cdot (\frac{1}{t} - 1)^2 + \frac{i^2 \cdot (i^2 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot t^2 \cdot (\frac{1}{t} - 1)^4$$
$$+ \frac{i^2 \cdot (i^2 - 1) \cdot (i^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot t^3 \cdot (\frac{1}{t} - 1)^6 + \&c.\}$$
$$+ \frac{i}{2} \cdot u \cdot (1 + t) \cdot \{\frac{1}{t} - 1 + \frac{i^2 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot t \cdot (\frac{1}{t} - 1)^3$$
$$+ \frac{(i^2 - 1) \cdot (i^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot t^2 \cdot (\frac{1}{t} - 1)^5 + \&c.\}$$

d'où l'on conclut, par l'*article II*, en repassant des fonctions génératrices aux variables correspondantes,

$$y_{x+i} = y_x + \frac{i^2}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^2 \cdot y_{x-1} + \frac{i^2 \cdot (i^2 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \Delta^4 \cdot y_{x-2}$$
$$+ \frac{i^2 \cdot (i^2 - 1) \cdot (i^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \Delta^6 \cdot y_{x-3} + \&c.$$
$$+ \frac{i}{2} \cdot \Delta \cdot (y_x + y_{x-1}) + \frac{i}{2} \cdot \frac{i^2 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \Delta^3 \cdot (y_{x-1} + y_{x-2})$$
$$+ \frac{i}{2} \cdot \frac{(i^2 - 1) \cdot (i^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \Delta^5 \cdot (y_{x-2} + y_{x-3}) + \&c.$$

Cette formule revient à celle que Newton a donnée dans l'opuſcule intitulé *Methodus differentialis*, pour interpoler entre un nombre impair de quantités équidiſtantes; dans ce cas, y_x déſigne la quantité du milieu, & i eſt la diſtance de cette quantité à celle que l'on cherche, qui par conſéquent eſt y_{x+i}, l'unité étant ſuppoſée l'intervalle commun des quantités données.

En différenciant aux différences finies, la formule précédente par rapport à i, on aura

$$y_{x+i+1} - y_{x+i} = \tfrac{1}{2} \cdot \Delta \cdot (y_x + y_{x-1}) + \frac{i.(i+1)}{1.2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \Delta^3 \cdot (y_{x-1} + y_{x-2})$$
$$+ \frac{(i-1).i.(i+1).(i+2)}{1.2.3.4} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \Delta^5 \cdot (y_{x-2} + y_{x-3}) + \&c.$$
$$+ (2i+1) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \Delta^2 \cdot y_{x-1} + \frac{(2i+1).(i+1).i}{1.2.3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \Delta^4 \cdot y_{x-2}$$
$$+ \frac{(2i+1).(i+2).(i+1).i.(i-1)}{1.2.3.4.5} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \Delta^6 \cdot y_{x-3} + \&c.$$

Soit $y_{x+1} - y_x = y'_x$, & $i = \frac{s-1}{2}$, on aura

$$y_{x+\frac{s-1}{2}} = \tfrac{1}{2} \cdot (y'_x + y'_{x-1}) + \frac{s^2-1}{2.4} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \Delta^2 \cdot (y'_{x-1} + y'_{x-2})$$
$$+ \frac{(s^2-1).(s^2-9)}{2.4.6.8} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \Delta^4 \cdot (y'_{x-2} + y'_{x-3}) + \&c.$$
$$+ \frac{s}{2} \cdot \Delta \cdot y'_{x-1} + \frac{s.(s^2-1)}{2.4.6} \cdot \Delta^3 \cdot y'_{x-2}$$
$$+ \frac{s.(s^2-1).(s^2-9)}{2.4.6.8.10} \cdot \Delta^5 \cdot y'_{x-3} + \&c.$$

Cette formule revient à celle que Newton a donnée dans l'opuſcule cité, pour interpoler entre un nombre pair de quantités équidiſtantes; y'_x exprime la ſeconde des deux quantités moyennes, & $\frac{s-1}{2}$ exprime ſa diſtance à celle que l'on cherche, & qui par conſéquent eſt $y'_{x+\frac{s-1}{1}}$, l'unité repréſentant l'intervalle commun des quantités données.

V.

SUPPOSONS généralement

$$z = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} \ldots\ldots + \frac{p}{t^{n-1}} + \frac{q}{t^n}; \; (a)$$

on aura

$$\frac{1}{t^n} = \frac{z-a}{q} - \frac{b}{qt} - \frac{c}{qt^2} \ldots\ldots - \frac{p}{qt^{n-1}},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{t^{n+1}} = \frac{z-a}{qt} - \frac{b}{qt^2} - \frac{c}{qt^3} \ldots\ldots - \frac{p}{qt^n};$$

en éliminant $\frac{1}{t^n}$ du ſecond membre de cette équation, au moyen de la propoſée *(a)*, on aura

$$\frac{1}{t^{n+1}} = -\frac{p.(z-a)}{q^2} + \frac{pb + q.(z-a)}{q^2.t} + \&c.$$

Cette expreſſion de $\frac{1}{t^{n+1}}$, ne renferme que des puiſſances de $\frac{1}{t}$, d'un ordre inférieur à n; & en continuant d'éliminer ainſi la puiſſance $\frac{1}{t^n}$, à meſure qu'elle ſe préſente, il eſt clair que l'on arrivera à une expreſſion de $\frac{1}{t^i}$, qui ne renfermera que des puiſſances de $\frac{1}{t}$, moindres que n, & qui, par conſéquent, aura cette forme,

$$\frac{1}{t^i} = Z + \frac{1}{t}.Z^{(1)} + \frac{1}{t^2}.Z^{(2)} + \frac{1}{t^3}.Z^{(3)} \ldots + \frac{1}{t^{n-1}}.Z^{(n-1)},$$

Z, $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$ ..... $Z^{(n-1)}$ étant des fonctions rationnelles & entières de z, dont la première ne ſurpaſſe pas le degré $\frac{i}{n}$, la ſeconde ne ſurpaſſe pas le degré $\frac{i}{n} - 1$, la troiſième le degré $\frac{i}{n} - 2$, & ainſi du reſte.

Cette manière de déterminer $\frac{1}{t^i}$, est très-pénible, lorsque i est un peu considérable; elle conduiroit d'ailleurs difficilement à l'expression générale de cette quantité; on pourra y parvenir directement par la méthode suivante.

$\frac{1}{t^i}$ étant égal au coëfficient de θ^i, dans le développement de la fraction $\frac{1}{1-\frac{\theta}{t}}$, on multipliera le numérateur & le dénominateur de cette fraction, par

$$(a-z).\theta^n + b.\theta^{n-1} + c.\theta^{n-2} \ldots + p\theta + q;$$

& en substituant dans le numérateur, au lieu de z, sa valeur $a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \&c$, on aura

$$\frac{b.\theta^{n-1}\left(1-\frac{\theta}{t}\right) + c\theta^{n-2}.\left(1-\frac{\theta^2}{t^2}\right) + e\theta^{n-3}.\left(1-\frac{\theta^3}{t^3}\right) \ldots\ldots + q.\left(1-\frac{\theta^n}{t^n}\right)}{\left(1-\frac{\theta}{t}\right).\left(a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + e\theta^{n-3} \ldots\ldots + p\theta + q - z\theta^n\right)};$$

le numérateur de cette fraction est divisible par $1-\frac{\theta}{t}$; on peut donc, en faisant la division, la mettre sous cette forme,

$$\left.\frac{\begin{array}{l} b.\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + e\theta^{n-3} \ldots + p\theta + q \\ + \frac{\theta}{t}.\left(c\theta^{n-2} + e\theta^{n-3} \ldots + p\theta + q\right) \\ + \frac{\theta^2}{t^2}.\left(e\theta^{n-3} + \&c. \ldots + p\theta + q\right) \\ + \&c. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{q\theta^{n-1}}{t^{n-1}} \end{array}}{a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + e\theta^{n-3} \ldots + p\theta + q - z\theta^n}\right\}; (A)$$

La recherche du coëfficient de θ^i dans le développement de

cette fraction, se réduit ainsi à déterminer, quel que soit r, le coëfficient de θ^r dans le développement de la fraction

$$\frac{1}{a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + e\theta^{n-3} \ldots + p\theta + q - z\theta^n}.$$

Pour cela, considérons généralement la fraction $\frac{P}{Q}$, P & Q étant des fonctions rationnelles & entières de θ, la première étant d'un ordre inférieur à celui de la seconde. Supposons que Q ait un facteur $\theta - \alpha$, élevé à la puissance s, & faisons $Q = (\theta - \alpha)^s . R$; on peut toujours, comme l'on fait, décomposer la fraction $\frac{P}{Q}$ en deux autres, $\frac{A}{(\theta - \alpha)^s} + \frac{B}{R}$, A & B étant des fonctions rationnelles & entières de θ, la première de l'ordre $s - 1$, & la seconde d'un ordre inférieur à celui de R; on aura donc

$$\frac{A}{(\theta - \alpha)^s} + \frac{B}{R} = \frac{P}{(\theta - \alpha)^s . R},$$

ce qui donne

$$A = \frac{P}{R} - \frac{B.(\theta - \alpha)^s}{R}.$$

Si l'on considère A, B, P & R, comme des fonctions rationnelles & entières de $\theta - \alpha$, A sera une fonction de l'ordre $s - 1$, & par conséquent, il sera égal au développement de $\frac{P}{R}$, dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de $\theta - \alpha$, pourvu que l'on s'arrête à la puissance $s - 1$.

Soit donc

$$\frac{P}{R} = y + y_1 . (\theta - \alpha) + y_2 . (\theta - \alpha)^2 + \&c,$$

on aura

$$\frac{A}{(\theta - \alpha)^s} = \frac{y}{(\theta - \alpha)^s} + \frac{y_1}{(\theta - \alpha)^{s-1}} + \frac{y_2}{(\theta - \alpha)^{s-2}} + \&c,$$

en

en rejetant les puissances positives ou nulles de $\theta - \alpha$; $\frac{A}{(\theta - \alpha)^s}$ sera par conséquent égal au coëfficient de t^{s-1}, dans le développement de

$$\frac{y + y_1 . t + y_2 . t^2 + \&c.}{\theta - \alpha - t}.$$

Or, si l'on nomme P' & R' ce que deviennent P & R, lorsqu'on y change $\theta - \alpha$ en t, ou ce qui revient au même, θ en $t + \alpha$, on aura

$$\frac{P'}{R'} = y + y_1 . t + y_2 . t^2 + \&c.$$

Partant $\frac{A}{(\theta - \alpha)^s}$ sera égal au coëfficient de t^{s-1} dans le développement de $\frac{P'}{R' . (\theta - \alpha - t)}$, & par conséquent, il sera égal à $\frac{1}{1.2.3\ldots(s-1).\partial t^{s-1}} . \partial^{s-1} . \frac{P'}{R'.(\theta - \alpha - t)}$, pourvu que l'on suppose $t = 0$, après les différenciations. Maintenant le coëfficient de θ^r, dans $\frac{P'}{R'.(\theta - \alpha - t)}$, étant égal à $- \frac{P'}{R'.(\alpha + t)^{r+1}}$; ce même coëfficient, dans $\frac{1}{1.2.3\ldots.(s-1).\partial t^{s-1}} . \partial^{s-1} . \frac{P'}{R'.(\theta - \alpha - t)}$, sera $- \frac{1}{1.2.3\ldots.(s-1).\partial t^{s-1}} . \partial^{s-1} . \frac{P'}{R'(\alpha + t)^{r-1}}$, t étant supposé nul après les différenciations. Cette dernière quantité sera donc le coëfficient de θ^r, dans le développement de $\frac{A}{(\theta - \alpha)^s}$; or, si l'on restitue dans P' & R', $\theta - \alpha$ au lieu de t, ce qui les change en P & R, on aura

$$\partial^{s-1} . \frac{\frac{P'}{R'(t+\alpha)^{r+1}}}{\partial t^{s-1}} = \partial^{s-1} . \frac{\frac{P}{R.\theta^{r+1}}}{\partial \theta^{r+1}},$$

pourvu que l'on suppose $\theta = \alpha$, après les différenciations

dans le ſecond membre de cette équation;

$$-\frac{1}{1.2.3\ldots(s-1).\partial\theta^{s-1}}.\partial^{s-1}.\frac{P}{R.\theta^{r+1}}$$

ſera donc, avec cette condition, le coëfficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{A}{(\theta-\alpha)^s}$.

Il ſuit de-là que ſi l'on ſuppoſe

$$Q = a.(\theta-\alpha)^s.(\theta-\alpha')^{s'}.(\theta-\alpha'')^{s''}.+\&c.$$

le coëfficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{P}{Q}$, ſera

$$-\frac{1}{1.2.3\ldots.(s-1).\partial\theta^{s-1}}.\partial^{s-1}.\left\{\frac{P}{a\theta^{r+1}.(\theta-\alpha')^{s'}.(\theta-\alpha'')^{s''}.\&c.}\right\}$$
$$-\frac{1}{1.2.3\ldots.(s'-1).\partial\theta^{s'-1}}.\partial^{s'-1}.\left\{\frac{P}{a\theta^{r+1}.(\theta-\alpha).(\theta-\alpha'').\&c.}\right\}$$
$$-\frac{1}{1.2.3\ldots.(s''-1).\partial\theta^{s''-1}}.\partial^{s''-1}.\left\{\frac{P}{a\theta^{r+1}.(\theta-\alpha).(\theta-\alpha').\&c.}\right\}$$

en faiſant après la différenciation, $\theta=\alpha$ dans le premier terme, $\theta=\alpha'$ dans le ſecond terme, $\theta=\alpha''$ dans le troiſième terme, & ainſi de ſuite. Cela poſé, ſoit

$$V = a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2}\ldots\ldots+p\theta+q,$$

& ſuppoſons qu'en mettant cette quantité ſous la forme d'un produit, on ait

$$V = a.(\theta-\alpha).(\theta-\alpha').(\theta-\alpha'').\&c.$$

en développant la fraction $\frac{1}{V-z\theta^n}$ dans une ſuite ordonnée par rapport aux puiſſances de z, on aura

$$\frac{1}{V}+\frac{z\theta^n}{V^2}+\frac{z^2.\theta^{2n}}{V^3}+\frac{z^3.\theta^{3n}}{V^3}+\&c.$$

& le coëfficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{1}{V^s}$, ſera par ce qui précède, égal à

$$-\frac{1}{1.2.3\ldots(s-1).\alpha^s.\partial\theta^{s-1}}.\partial^{s-1}.\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\theta^{r+1}.(\theta-\alpha')^s.(\theta-\alpha'')^s.\&c.} \\ + \frac{1}{\theta^{r+1}.(\theta-\alpha)^s.(\theta-\alpha'')^s.\&c.} \\ + \frac{1}{\theta^{r+1}.(\theta-\alpha)^s.(\theta-\alpha')^s.\&c.} \\ + \&c. \end{array}\right\}$$

pourvu qu'après les différenciations, on ſuppoſe $\theta = \alpha$ dans le premier terme, $\theta = \alpha'$ dans le ſecond terme, $\theta = \alpha''$ dans le troiſième terme, &c. Soit $Z_r^{(s-1)}$ ce que devient alors cette quantité; le coëfficient de θ^i dans le développement de la fraction $\frac{1}{V - z\theta^n}$, ſera

$$Z_i^{(0)} + Z_{i-n}^{(1)}.z + Z_{i-2n}^{(2)}.z^2 + Z_{i-3n}^{(3)}.z^3 + \&c.$$

on aura donc pour le coëfficient de θ^i dans le développement de la fraction *(A)*, & par conſéquent pour l'expreſſion de $\frac{1}{t^i}$,

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{t^i} = & b.Z_{i-n+1}^{(0)} + bz.Z_{i-2n+1}^{(1)} + bz^2.Z_{i-3n+1}^{(2)} \\ & + bz^3.Z_{i-4n+1}^{(3)} + \&c. \\ & + c.Z_{i-n+2}^{(0)} + cz.Z_{i-2n+2}^{(1)} + cz^2.Z_{i-3n+2}^{(2)} \\ & + cz^3.Z_{i-4n+2}^{(3)} + \&c. \\ & + e.Z_{i-n+3}^{(0)} + ez.Z_{i-2n+3}^{(1)} + ez^2.Z_{i-3n+3}^{(2)} \\ & + ez^3.Z_{i-4n+3}^{(3)} + \&c. \\ & + \&c. \\ & + \frac{1}{t}.\left\{\begin{array}{l} c.Z_{i-n+1}^{(0)} + cz.Z_{i-2n+1}^{(1)} + cz^2.Z_{i-3n+1}^{(2)} \\ + cz^3.Z_{i-4n+1}^{(3)} + \&c. \\ + e.Z_{i-n+2}^{(0)} + ez.Z_{i-2n+2}^{(1)} + cz^2.Z_{i-3n+2}^{(2)} \\ + ez^3.Z_{i-4n+2}^{(3)} + \&c. \\ + \&c. \end{array}\right\}; (\mu) \end{array}$$

$$+\frac{1}{t^2}\cdot\left\{\begin{array}{l} e.Z^{(0)}_{i-n+1}+ez.Z^{(1)}_{i-2n+1}+ez^2.Z^{(2)}_{i-3n+1} \\ +ez^3.Z^{(3)}_{i-4n+1}+\&c. \\ +\&c. \end{array}\right\}$$

$$+\ \&c.$$

....

$$+\frac{1}{t^{n-1}}\cdot\{q.Z^{(0)}_{i-n+1}+qz.Z^{(1)}_{i-2n+1}+qz^2.Z^{(2)}_{i-3n+1}+\&c.\}$$

Préſentement, ſi l'on déſigne par $\nabla.y_x$, la quantité $ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} \ldots\ldots + q.y_{x+n}$; par $\nabla^2.y_x$, la quantité $a.\nabla.y_x + b.\nabla.y_{x+1} + c.\nabla.y_{x+2}\ldots\ldots + q.\nabla.y_{x+n}$; par $\nabla^3.y_x$, la quantité $a.\nabla^2.y_x + b.\nabla^2.y_{x+1} + c.\nabla^2.y_{x+2} \ldots + q.\nabla^2.y_{x+n}$, & ainſi de ſuite; il eſt viſible, par l'*article II*, que le coëfficient de t^x dans le développement de $\frac{uz^s}{t^r}$, ſera $\nabla^s.y_{x+r}$; en multipliant donc l'équation précédente par u, & en ne conſidérant dans chaque terme que le coëfficient de t^x, c'eſt-à-dire en repaſſant des fonctions génératrices aux variables correſpondantes, on aura

$$\begin{array}{rl} y_{x+i} = & y_x.\{bZ^{(0)}_{i-n+1}+cZ^{(0)}_{i-n+2}+eZ^{(0)}_{i-n+3}\ldots+q.Z^{(0)}_{i}\} \\ & +\nabla.y_x.\{bZ^{(1)}_{i-2n+1}+cZ^{(1)}_{i-2n+2}+eZ^{(1)}_{i-2n+3}\ldots+q.Z^{(1)}_{i-n}\} \\ & +\nabla^2.y_x.\{bZ^{(2)}_{i-3n-1}+cZ^{(2)}_{i-3n+2}+eZ^{(2)}_{i-3n+3}\ldots+q.Z^{(2)}_{i-2n}\} \\ & +\ \&c. \\ & +\ y_{x+1}.\{cZ^{(0)}_{i-n+1}+eZ^{(0)}_{i-n+2}\ldots\ldots+q.Z^{(0)}_{i-1}\} \\ & +\nabla.y_{x+1}.\{cZ^{(1)}_{i-2n+1}+eZ^{(1)}_{i-2n+2}\ldots\ldots+q.Z^{(1)}_{i-n-1}\};\ (B) \\ & +\ \&c. \end{array}$$

$$+ \quad y_{x+2} \cdot \{e Z^{(0)}_{i-n+1} \cdots\cdots + q . Z^{(0)}_{i-2} \quad \}$$

$$+ \nabla \cdot y_{x+2} \cdot \{e Z^{(1)}_{i-2n+1} \cdots\cdots + q . Z^{(1)}_{i-n-2} \}$$

$+$ &c.

....

$$+ q \cdot y_{x+n-1} \cdot Z^{(0)}_{i-n+1} + q \cdot \nabla \cdot y_{x+n-1} \cdot Z^{(1)}_{i-2n+1}$$

$$+ q \cdot \nabla^2 y_{x+n-1} \cdot Z^{(2)}_{i-3n+1} + \text{\&c.}$$

Cette formule ſervira à interpoler les ſuites, dont la dernière raiſon des termes eſt celle d'une ſuite récurrente; car il eſt clair, que dans ce cas, $\nabla . y_x$, $\nabla^2 . y_x$, $\nabla^3 . y_x$, &c, iront toujours en diminuant, & finiront par être nuls dans l'infini.

Si l'une de ces quantités eſt nulle, par exemple, ſi l'on a $\nabla^r . y_x = 0$, la formule précédente donnera l'expreſſion générale de y_x, qui ſatisfait à cette équation. Pour le faire voir, ſuppoſons d'abord $\nabla . y_i = 0$, ou, ce qui revient au même,

$$0 = a y_i + b y_{i+1} + c y_{i+2} \cdots + q . y_{i+n};$$

ſi l'on fait dans ce cas $x = 0$, dans la formule précédente, elle deviendra

$$\begin{aligned} y_i = \quad & y_0 . \{b Z^{(0)}_{i-n+1} + c Z^{(0)}_{i-n+2} + e Z^{(0)}_{i-n+3} \cdots + q . Z^{(0)}_{i} \quad \} \\ & + y_1 . \{c Z^{(0)}_{i-n+1} + e Z^{(0)}_{i-n+2} \cdots\cdots\cdots + q . Z^{(0)}_{i-1} \} \\ & + y_2 . \{e Z^{(0)}_{i-n+1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + q . Z^{(0)}_{i-2} \} \\ & + \text{\&c.} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + q . y_{n-1} . Z^{(0)}_{i-n+1}. \end{aligned}$$

$y_0, y_1, y_2 \ldots\ldots y_{n-1}$ ſont les n premières valeurs de y_i; ce ſont les n conſtantes arbitraires que l'intégration de l'équation $\nabla \cdot y_i = 0$ introduit.

Si l'on a $\nabla^2 \cdot y_i = 0$, la formule générale *(B)* donnera, en y ſuppoſant encore $x = 0$,

$$\begin{aligned} y_i = y_0 \cdot \{ & b . Z^{(0)}_{i-n+1} + c\, Z^{(0)}_{i-n+2} + \&c. \ldots\ldots + q . Z^{(0)}_{i} \} \\ + \nabla \cdot y_0 . \{ & b . Z^{(1)}_{i-2n+1} + c\, Z^{(1)}_{i-2n+2} + \&c. \ldots + q . Z^{(1)}_{i-n} \} \\ + y_1 . \{ & c\, Z^{(0)}_{i-n+1} + \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + q . Z^{(0)}_{i-1} \} \\ + \nabla y_1 . \{ & c\, Z^{(1)}_{i-2n+1} + \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + q . Z^{(1)}_{i-n+1} \} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + q . Z^{(0)}_{i-n+1} & . y_{n-1} + q . Z^{(1)}_{i-2n+1} . \nabla . y_{n-1}, \end{aligned}$$

$y_0, \nabla . y_0, y_1, \nabla . y_1 \ldots\ldots . y_{n-1}, \nabla . y_{n-1}$ étant les $2n$ conſtantes arbitraires qu'introduit l'intégration de l'équation $\nabla^2 . y_i = 0$. On auroit de la même manière la valeur de y_i, dans le cas de $\nabla^3 . y_i = 0$, $\nabla^4 . y_i = 0$, &c. & l'on voit ainſi l'analogie qui exiſte entre l'interpolation des ſuites & l'intégration des équations linéaires aux différences finies.

VI.

SOIT $y_x = y_x^{\prime} + y_x^{\prime\prime}$, & ſuppoſons que $u^{\prime}$ ſoit la fonction génératrice de $y_x^{\prime}$, & $u^{\prime\prime}$ celle de $y_x^{\prime\prime}$; on aura $u = u^{\prime} + u^{\prime\prime}$; ſoit encore $u^{\prime\prime} . z^s = \lambda$, ou $u^{\prime\prime} = \frac{\lambda}{z^s}$; ſi l'on déſigne par X_{x+i} le coëfficient de t^{x+i} dans le développement de λ; on aura par l'*article II*, $X_{x+i} = \nabla^s . y^{\prime\prime}_{x+i}$; preſentement on a

$$\frac{1}{z^s} = \frac{t^{ns}}{(at^n + bt^{n-1} + ct^{n-2} \ldots\ldots + q)^s}.$$

Or le coëfficient de t^{x+i}, dans le développement du second membre de cette équation, eſt égal à celui de θ^{x+i-ns} dans le développement de $\frac{1}{(a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} \ldots + \gamma)^s}$, & par l'*article précédent*, ce dernier coëfficient eſt égal à $Z^{(s-1)}_{x+i-ns}$; donc le coëfficient de t^{x+i}, dans le développement de $\frac{\lambda}{z^s}$, ſera

$$X_{x+i-ns} \cdot Z_0^{(s-1)} + X_{x+i-ns-1} \cdot Z_1^{(s-1)} + \&c \ldots X_0 \cdot Z^{(s-1)}_{x+i-ns},$$

ou $\Sigma \cdot X_r \cdot Z^{(s-1)}_{x+i-ns-r}$, l'intégrale étant priſe relativement à r, & depuis $r = 0$ juſqu'à $r = x + i - ns$; cette intégrale ſera l'expreſſion de y^{11}_{x+i}.

Dans le cas préſent, il eſt facile de la réduire à des intégrales relatives à i; car il réſulte de l'expreſſion que nous avons donnée de $Z_i^{(s-1)}$ dans l'*article précédent*, que celle de $Z^{(i-1)}_{x+i-ns-r}$ eſt réductible à des termes de cette forme $K\beta^r \cdot r^\mu$, en ſorte que le terme correſpondant de $\Sigma \cdot X_r \cdot Z^{(s-1)}_{x+i-ns-r}$ ſera $K \cdot \Sigma \cdot \beta^r \cdot r^\mu X_r$, K étant fonction de $x + i - ns$; or ſi l'on déſigne par la caractériſtique Σ^1, l'intégrale relative à i, on aura

$$K \cdot \Sigma \cdot \beta^r \cdot r^\mu \cdot X_r = K \cdot \Sigma^1 \cdot \beta^{x+i-ns} \cdot (x + i - ns)^\mu \cdot X_{x+i-ns};$$

pourvu que l'on termine l'intégrale relative à r, lorſque $r = x + i - ns$; on réduira ainſi l'intégrale $\Sigma \cdot X_r \cdot Z^{(s-1)}_{x+i-ns-r}$ à des intégrales uniquement relatives à la variable i. Cela poſé, ſi dans la formule *(B)* on fait $x = 0$, & $\nabla^s \cdot y_i = 0$, elle donnera

$$y_i^{\mathrm{I}} + \Sigma \,.\, X_r \,.\, Z^{(s-1)}_{i-ns-r}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} + y_0 \,.\, \{ b \,.\, Z^{(0)}_{i-n+1} + c \,.\, Z^{(0)}_{i-n+2} \ldots\ldots + q \,.\, Z^{(0)}_{i} \} \\ + \nabla \,.\, y_1 \,.\, \{ b \,.\, Z^{(1)}_{i-2n+1} + c \,.\, Z^{(1)}_{i-2n+2} \ldots\ldots + q \,.\, Z^{(1)}_{i-n} \} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \nabla^{s-1} \,.\, y_1 \,.\, \{ b \,.\, Z^{(s-1)}_{i-sn+1} + c \,.\, Z^{(s-1)}_{i-sn+2} \ldots\ldots + q \,.\, Z^{(s-1)}_{i-sn+n} \} \end{array} \right\}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} y_1 \,.\, \{ c \,.\, Z^{(0)}_{i-n+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + q \,.\, Z^{(0)}_{i-1} \} \\ + \text{\&c.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \nabla^{s-1} \,.\, y_1 \,.\, \{ c \,.\, Z^{(s-1)}_{i-sn+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + q \,.\, Z^{(s-1)}_{i-sn+n-1} \} \end{array} \right\}$$

$+$ &c.

. . . .

$$+ q \,.\, Z^{(0)}_{i-n+1} \,.\, y_{n-1} + q \,.\, Z^{(1)}_{i-2n+1} \,.\, \nabla \,.\, y_{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + q \,.\, Z^{(s-1)}_{i-sn+1} \,.\, \nabla^{s-1} \,.\, y_{n-1},$$

y_0, $\nabla \,.\, y_0 \ldots \nabla^{s-1} \,.\, y_0$, y_1, $\nabla \,.\, y_1 \ldots \nabla^{s-1} \,.\, y_1$, &c. . . . . . y_{n-1}, $\nabla \,.\, y_{n-1} \ldots \nabla^{s-1} \,.\, y_{n-1}$ étant les sn arbitraires de l'intégrale de l'équation $\nabla^s \,.\, y_i = 0$, ou $\nabla^s \,.\, y_i^{\mathrm{I}} + \nabla^s \,.\, y_i^{\mathrm{II}} = 0$; or $\nabla^s \,.\, y_i^{\mathrm{II}}$ étant égal à X_i, cette équation devient

$$0 = \nabla^s \,.\, y_i^{\mathrm{I}} + X_i;$$

on aura donc, par la formule précédente, l'intégrale de toutes les équations linéaires aux différences finies, dont les coëfficiens ſont conſtans, dans le cas où elles ont un dernier terme qui eſt fonction de i.

VII.

On peut donner à l'expreſſion de $\frac{1}{t^i}$, une infinité d'autres formes parmi leſquelles il s'en trouve qui peuvent être

être utiles dans plusieurs cas. Voici comment on peut y parvenir.

Pour cela, supposons qu'au lieu de donner, comme ci-dessus, à $\frac{1}{t^i}$, cette forme

$$\frac{1}{t^i} = Z + \frac{1}{t} \cdot Z^{(1)} + \frac{1}{t^2} \cdot Z^{(2)} \ldots + \frac{1}{t^{n-1}} \cdot Z^{(n-1)},$$

on lui donne celle-ci,

$$\frac{1}{t^i} = Z + (\tfrac{1}{t} - 1) \cdot Z^{(1)} + (\tfrac{1}{t} - 1)^2 \cdot Z^{(2)} \ldots + (\tfrac{1}{t} - 1)^{n-1} \cdot Z^{(n-1)};$$

la question se réduit à déterminer Z, $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, &c.

On mettra d'abord l'équation

$$z = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \ldots\ldots + \frac{p}{t^{n-1}} + \frac{q}{t^n},$$

sous cette forme,

$$z = a^1 + b^1 \cdot (\tfrac{1}{t} - 1) + c^1 \cdot (\tfrac{1}{t} - 1)^2 \ldots$$
$$\ldots + p^1 \cdot (\tfrac{1}{t} - 1)^{n-1} + q \cdot (\tfrac{1}{t} - 1)^n,$$

& l'on aura

$$a = a^1 - b^1 + c^1 - \&c\ldots\ldots \mp p^1 \pm q^1;$$

les signes supérieurs ayant lieu si n est pair, & les signes inférieurs si n est impair. On multipliera ensuite, comme précédemment, le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{1}{1 - \frac{\theta}{t}}$, par

$$(a - z) \cdot \theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} \ldots + p\theta + q,$$

en observant de substituer dans le numérateur, 1.° au lieu de z,

$$a^1 + b^1 \cdot (\tfrac{1}{t} - 1) + c^1 \cdot (\tfrac{1}{t} - 1)^2 + \&c;$$

2.° au lieu de $a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} +$ &c. la quantité

$$\theta^n . \{a' + b' . (\tfrac{1}{\theta} - 1) + c' . (\tfrac{1}{\theta} - 1)^2 + \&c.\}$$

Si de plus, on fait, pour abréger, $\frac{1}{t} - 1 = \frac{1}{t'}$, on aura

$$\frac{b' . \theta^{n-1} . (1 - \theta - \frac{\theta}{t'}) + c' . \theta^{n-2} . [(1-\theta)^2 - \frac{\theta^2}{t'^2}] + \&c. \ldots + q . [(1-\theta)^n - \frac{\theta^n}{t'^n}]}{(1 - \frac{\theta}{t}) . (a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} \ldots\ldots + p\theta + q - z\theta^n)};$$

or on a $1 - \frac{\theta}{t} = 1 - \theta - \frac{\theta}{t'}$; en divisant donc le numérateur de la fraction précédente, par cette quantité, elle se réduira à celle-ci,

$$\frac{b' . \theta^{n-1} + c'\theta^{n-2} . (1 - \theta + \frac{\theta}{t'}) + e'\theta^{n-3} . [(1-\theta)^2 + (1-\theta) . \frac{\theta}{t'} + \frac{\theta^2}{t'^2}] + \&c. + q . [(1-\theta)^{n-1} + (1-\theta)^{n-2} . \frac{\theta}{t'} + (1-\theta)^{n-3} . \frac{\theta^2}{t'^2} + \&c.]}{a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + p\theta + q - z\theta^n},$$

ou, ce qui revient au même, à

$$\frac{\begin{array}{l} b'\theta^{n-1} + c'\theta^{n-1} . (\frac{1}{\theta} - 1) + e' . \theta^{n-1} . (\frac{1}{\theta} - 1)^2 \ldots + q\theta^{n-1} . (\frac{1}{\theta} - 1)^{n-1} \\ + \frac{\theta^{n-1}}{t'} . \{c' + e' . (\frac{1}{\theta} - 1) \ldots\ldots\ldots + q . (\frac{1}{\theta} - 1)^{n-2}\} \\ + \frac{\theta^{n-1}}{t'^2} . \{e' + \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + q . (\frac{1}{\theta} - 1)^{n-3}\}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{q\theta^{n-1}}{t'^{n-1}} \end{array}}{a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + p\theta + q - z\theta^n}.$$

De-là, il est facile de conclure que si l'on conserve à $Z_r^{(s-1)}$, la même signification que nous lui avons donnée dans l'*article V*, & que l'on considère qu'en désignant par q_i, le coëfficient de θ^i dans le développement d'une fonction

quelconque de θ, ce même coëfficient dans le développement de cette fonction multipliée par $(\frac{1}{\theta} - 1)^{\mu}$, sera, par l'*article II*, $\Delta^{\mu} . q_i$, on aura

$$\frac{1}{t^i} = \left. \begin{array}{l} b'.Z^{(0)}_{i-n+1} + b'.z.Z^{(1)}_{i-2n+1} + b'.z^2.Z^{(2)}_{i-3n+1} + \&c. \\ + c'.\Delta.Z^{(0)}_{i-n+1} + c'.z.\Delta.Z^{(1)}_{i-2n+1} \\ + c'.z^2.\Delta.Z^{(2)}_{i-3n+1} + \&c. \\ + e'.\Delta^2.Z^{(0)}_{i-n+1} + e'.z.\Delta^2.Z^{(1)}_{i-2n+1} \\ + e'.z^2.\Delta^2.Z^{(2)}_{i-3n+1} + \&c. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + q.\Delta^{n-1}.Z^{(0)}_{i-n+1} + q.z.\Delta^{n-1}.Z^{(1)}_{i-2n+1} \\ + q.z^2.\Delta^{n-1}.Z^{(2)}_{i-3n+1} + \&c. \end{array} \right\} ; (\mu')$$

$$+ \frac{1}{t^{i}} . \left\{ \begin{array}{l} c'.Z^{(0)}_{i-n+1} + c'.z.Z^{(1)}_{i-2n+1} + \&c. \\ + e'.\Delta.Z^{(0)}_{i-n+1} + e'.z'.\Delta Z^{(1)}_{i-2n+1} + \&c. \\ + \&c. \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{1}{t^{i^2}} . \left\{ \begin{array}{l} e'.Z^{(0)}_{i-n+1} + e'.z.Z^{(1)}_{i-2n+1} + \&c. \\ + \&c. \end{array} \right\}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \frac{q}{t^{i^{n-1}}} . \left\{ Z^{(0)}_{i-n+1} + z.Z^{(1)}_{i-2n+1} + \&c. \right\}$$

Présentement, il est visible par l'*article II*, que le coëfficient de t^x dans le développement de la fonction $\frac{u z^s}{t^{i\mu}}$, est $\Delta^{\mu}.\nabla^s.y_x$; l'équation précédente donnera donc en la

multipliant par u, & en repaſſant des fonctions génératrices aux variables correſpondantes,

$$y_{x+i} = y_x . \{b^1 . Z^{(0)}_{i-n+1} + c^1 . \Delta . Z^{(0)}_{i-n+1} + e^1 . \Delta^2 . Z^{(0)}_{i-n+1} \ldots$$
$$\ldots + q . \Delta^{n-1} . Z^{(0)}_{i-n+1}\}$$
$$+ \nabla . y_x . \{b^1 . Z^{(1)}_{i-2n+1} + c^1 . \Delta . Z^{(1)}_{i-2n+1} + e^1 . \Delta^2 . Z^{(1)}_{i-2n+1} \ldots$$
$$\ldots + q . \Delta^{n-1} . Z^{(1)}_{i-2n+1}\}$$
$$+ \nabla^2 . y_x . \{b^1 . Z^{(2)}_{i-3n+1} + c^1 . \Delta . Z^{(2)}_{i-3n+1} + e^1 . \Delta^2 . Z^{(2)}_{i-3n+1} \ldots$$
$$\ldots + q . \Delta^{n-1} . Z^{(2)}_{i-3n+1}\}$$
$$+ \&c.$$
$$+ \quad \Delta . y_x . \{c^1 . Z^{(0)}_{i-n+1} + e^1 . \Delta . Z^{(0)}_{i-2n+1} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + q . \Delta^{n-2} . Z^{(0)}_{i-n+1}\}$$
$$+ \Delta . \nabla . y_x . \{c^1 . Z^{(1)}_{i-2n+1} + e^1 . \Delta . Z^{(1)}_{i-2n+1} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + q . \Delta^{n-2} . Z^{(1)}_{i-2n+1}\}$$
$$+ \Delta . \nabla^2 . y_x . \{c^1 . Z^{(2)}_{i-3n+1} + e^1 . \Delta . Z^{(2)}_{i-3n+1} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + q . \Delta^{n-2} . Z^{(2)}_{i-3n+1}\}$$
$$+ \&c.$$
$$+ \quad \Delta^2 . y_x . \{e^1 . Z^{(0)}_{i-n+1} \ldots + q . \Delta^{n-3} . Z^{(0)}_{i-n+1}\}$$
$$+ \Delta^2 . \nabla . y_x . \{e^1 . Z^{(1)}_{i-2n+1} \ldots + q . \Delta^{n-3} . Z^{(1)}_{i-2n+1}\}$$
$$+ \&c.$$
$$+ q . Z^{(0)}_{i-n+1} . \Delta^{n-1} . y_x + q . Z^{(1)}_{i-2n+1} . \Delta^{n-1} . \nabla . y_x$$
$$+ q . Z^{(2)}_{i-3n+1} . \Delta^{n-1} . \nabla^2 . y_x + \&c.$$

VIII.

SUPPOSONS dans la formule précédente, x & i infiniment grands, de manière que l'on ait $i = \frac{x^1}{\partial x^1}$ & $x = \frac{\varpi}{\partial x^1}$, y_{x+i}

deviendra une fonction de $\varpi + x'$, que nous désignerons par $\varphi(\varpi + x')$; supposons de plus

$$a' = a''; \; b' = \frac{b''}{\partial x'}; \; c' = \frac{c''}{\partial x'^2} \; \ldots\ldots \; q = \frac{q''}{\partial x'^n};$$

l'équation

$$o = a' + b' \cdot (\frac{1}{\theta} - 1) + c' \cdot (\frac{1}{\theta} - 1)^2 \ldots\ldots + q \cdot (\frac{1}{\theta} - 1)^n,$$

donnera pour θ, n racines de cette forme,

$$\theta = 1 + f\partial x'; \; \theta = 1 + f'\partial x'; \; \theta = 1 + f''\partial x', \text{ \&c.}$$

ce seront les quantités que nous avons nommées α, α', α'', &c. dans l'expression de $Z_r^{(s-1)}$ de l'*article V*, & les valeurs de f, f', f'', &c. seront données par les n racines de l'équation

$$o = a'' - b''f + c''f^2 \ldots\ldots \pm q'' \cdot f^n.$$

Maintenant, si l'on fait $\theta = 1 + h\partial x'$, on aura $\frac{1}{\theta^i} = \frac{1}{(1 + h\partial x')^i}$; le logarithme hyperbolique de cette dernière quantité est $- i \log. (1 + h\partial x') = - ih\partial x' = - hx'$; d'où l'on tire $\frac{1}{\theta^i} = e^{-hx'}$, e étant ici le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; on a d'ailleurs

$$a = a' - b' + c' - \text{\&c.} \ldots\ldots \pm q = a'' - \frac{b''}{\partial x'} + \frac{c''}{\partial x'^2} \ldots\ldots \pm \frac{q''}{\partial x'^n};$$

& cette valeur de a se réduit au terme $\pm \frac{q''}{\partial x'^n}$, parce qu'il est infiniment plus grand que les autres; l'expression de $Z_r^{(s-1)}$ de l'*article V*, donnera donc en y changeant r en $i - 1$,

$$Z_{i-1}^{(s-1)} = - \frac{\partial x'}{1.2.3 \ldots (s-1) \cdot (\pm q'')^s \partial h^{s-1}} \cdot \partial^{s-1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{e^{-hx'}}{(h-f')^s \cdot (h-f'')^s \cdot \text{\&c.}} \\ + \frac{e^{-hx'}}{(h-f)^s \cdot (h-f'')^s \cdot \text{\&c.}} \\ + \frac{e^{-hx'}}{(h-f)^s \cdot (h-f')^s \cdot \text{\&c.}} \\ + \text{\&c.} \end{array} \right\}$$

la différence ∂^{s-1} étant priſe en ne faiſant varier que h, & en ſubſtituant, après les différenciations, f au lieu de h dans le premier terme, f' au lieu de h dans le ſecond terme, & ainſi de ſuite. Nommons $X^{(s-1)} . \partial x'$ la quantité précédente, nous aurons, à l'infiniment petit près,

$$Z_{i \pm \mu}^{(s-1)} = Z_{i-1}^{(s-1)} = X^{(s-1)} . \partial x';$$

d'ailleurs, on a $y_x = \varphi(\varpi)$, & la caractériſtique Δ des différences finies doit ſe changer ici dans la caractériſtique ∂ des différences infiniment petites; en ſorte que l'équation

$$\nabla . y_x = a y_x + b y_{x+1} + c . y_{x+2} + \&c.$$

ou, ce qui revient au même, celle-ci,

$$\nabla . y_x = a'' + \frac{b''}{\partial x'} . \Delta . y_x + \frac{c''}{\partial x'^2} . \Delta^2 . y_x + \&c.$$

devient, en y changeant $\partial x'$ en $\partial \varpi$,

$$\nabla . y_x = a'' + b'' . \frac{\partial . \varphi(\varpi)}{\partial \varpi} + c'' . \frac{\partial^2 . \varphi(\varpi)}{\partial \varpi^2} + e'' . \frac{\partial^3 . \varphi(\varpi)}{\partial \varpi^3} \ldots + q'' . \frac{\partial^n . \varphi(\varpi)}{\partial \varpi^n};$$

l'expreſſion de y_{x+i}, trouvée dans l'*article précédent*, deviendra donc

$$\varphi . (\varpi + x') =$$

$$\varphi(\varpi) . \{b'' X^{(0)} + c'' . \frac{\partial X^{(0)}}{\partial x'} + e'' . \frac{\partial^2 . X^{(0)}}{\partial x'^2} + \&c.\}$$

$$+ \nabla . \varphi(\varpi) . \{b'' X^{(1)} + c'' . \frac{\partial X^{(1)}}{\partial x'} + e'' . \frac{\partial^2 . X^{(1)}}{\partial x'^2} + \&c.\}$$

$$+ \nabla^2 . \varphi(\varpi) . \{b'' X^{(2)} + c'' . \frac{\partial X^{(2)}}{\partial x'} + e'' . \frac{\partial^2 . X^{(2)}}{\partial x'^2} + \&c.\}$$

$$+ \&c.$$

$$+ \frac{\partial.\varphi(\varpi)}{\partial\varpi}.\{c'' X^{(0)} + e''.\frac{\partial X^{(0)}}{\partial x'} + \&c.\}$$

$$+ \frac{\partial.\nabla.\varphi(\varpi)}{\partial\varpi}.\{c'' X^{(1)} + e''.\frac{\partial X^{(1)}}{\partial x'} + \&c.\}$$

$$+ \frac{\partial.\nabla^2.\varphi(\varpi)}{\partial\varpi}.\{c'' X^{(2)} + e''.\frac{\partial X^{(2)}}{\partial x'} + \&c.\}$$

$$+ \&c.$$

$$+ \frac{\partial^2.\varphi(\varpi)}{\partial\varpi^2}.\{e'' X^{(0)} + \&c.\} \qquad (C)$$

$$+ \frac{\partial^2.\nabla.\varphi(\varpi)}{\partial\varpi^2}.\{e'' X^{(1)} + \&c.\}$$

$$+ \&c.$$

$$+ q''.\frac{\partial^{n-1}.\varphi(\varpi)}{\partial\varpi^{n-1}}.X^{(0)} + q''.\frac{\partial^{n-1}.\nabla.\varphi(\varpi)}{\partial\varpi^{n-1}}.X^{(1)}$$

$$+ q''.\frac{\partial^{n-1}.\nabla^2.\varphi(\varpi)}{\partial\varpi^{n-1}}.X^{(2)} + \&c.$$

Cette formule ſervira à interpoler les ſuites, dont la dernière raiſon des termes eſt celle d'une équation linéaire aux différences infiniment petites dont les coëfficiens ſont conſtans.

Si l'on a

$$\nabla.\varphi(\varpi) = a''.\varphi(\varpi) + b''.\frac{\partial.\varphi(\varpi)}{\partial\varpi},$$

on aura $f = \frac{a''}{b''}$, & $\nabla.\varphi(\varpi) = b''.e^{-f\varpi}.\frac{\partial.[e^{f\varpi}.\varphi(\varpi)]}{\partial\varpi}$; l'expreſſion de $X^{(s-1)}$ devient dans ce cas particulier,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(s-1).b''^{s}}.x^{s-1}.e^{-fx'};$$

on aura donc

$$\varphi.(\varpi + x') = e^{-f\varpi - fx'}.\{e^{f\varpi}.\varphi(\varpi) + \frac{x'}{b''}.\frac{\partial.[e^{f\varpi}.\varphi(\varpi)]}{\partial\varpi}$$

$$+ \frac{x'^2}{b''^2}.\frac{\partial^2.[e^{f\varpi}.\varphi(\varpi)]}{1.2.\partial\varpi^2} + \&c.\}$$

En supposant $b'' = 1$, & $f = 0$, par conséquent, $a'' = 0$, on aura la formule connue de Taylor.

La formule *(C)* se terminera toutes les fois que l'on aura $\nabla^s \cdot \varphi(\varpi) = 0$; si par exemple, $\nabla \cdot \varphi(\varpi) = 0$, on aura

$$\varphi . (\varpi + x') =$$

$$\varphi(\varpi) . \{b'' . X^{(0)} + c'' . \frac{\partial X^{(0)}}{\partial x'} + \&c. \ldots + q'' . \frac{\partial^{n-1} X^{(0)}}{\partial x'^{n-1}}\}$$

$$+ \frac{\partial . \varphi(\varpi)}{\partial \varpi} . \{c'' . X^{(0)} + e'' . \frac{\partial X^{(0)}}{\partial x'} + \&c. \ldots + q'' . \frac{\partial^{n-2} X^{(0)}}{\partial x'^{n-2}}\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ q'' X^{(0)} . \frac{\partial^{n-1} . \varphi(\varpi)}{\partial \varpi^{n-1}},$$

ce sera l'intégrale de l'équation $0 = \nabla \varphi(\varpi + x')$, ou, ce qui revient au même, de celle-ci,

$$0 = a'' . \varphi(\varpi + x') + b'' . \frac{\partial . \varphi(\varpi + x')}{\partial x'} + c'' . \frac{\partial^2 . \varphi(\varpi + x')}{\partial x'^2} \ldots + q'' . \frac{\partial^n . \varphi(\varpi + x')}{\partial x'^n};$$

$\varphi(\varpi)$, $\frac{\partial . \varphi(\varpi)}{\partial \varpi}$, $\frac{\partial^2 . \varphi(\varpi)}{\partial \varpi^2}$ .... $\frac{\partial^{n-1} . (\varpi)}{\partial \varpi^{n-1}}$ étant les n constantes arbitraires que l'intégration introduit. On aura, par la même formule, les intégrales des équations $\nabla^2 . \varphi(\varpi + x') = 0$, $\nabla^3 . \varphi(\varpi + x') = 0$, &c.

Si l'on fait $\varphi(\varpi + x') = y'_{x'} + y''_{x'}$ & que l'on suppose $\nabla^s . y''_{x'} = V$, V étant une fonction donnée de x'; on trouvera facilement, par l'*article VI*, que si l'on change dans l'expression de $X^{(s-1)}$, x' en $\varpi + x' - r$, & dans V, x' en $r - \varpi$, & que l'on nomme R ce que devient la première de ces deux quantités, & S ce que devient la seconde, on aura $y''_{x'} = \int R S \partial r$, l'intégrale étant prise depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \varpi + x'$; si l'on suppose de plus, dans la formule *(C)*, $\nabla^s . \varphi(\varpi + x') = 0$, elle

elle donnera

$$y^{\mathrm{I}}_{x^{\mathrm{I}}} + \int RS\partial r = y_0 \cdot \{ b^{\mathrm{II}}\, X^{(0)} + c^{\mathrm{II}} \cdot \frac{\partial X^{(0)}}{\partial x^{\mathrm{I}}} + \&c. \}$$

$$+ \nabla \cdot y_0 \cdot \{ b^{\mathrm{II}}\, X^{(1)} + c^{\mathrm{II}} \cdot \frac{\partial X^{(1)}}{\partial x^{\mathrm{I}}} + \&c. \}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \nabla^{(s-1)} \cdot y_0 \cdot \{ b^{\mathrm{II}} X^{(s-1)} + c^{\mathrm{II}} \cdot \frac{\partial X^{(s-1)}}{\partial x^{\mathrm{I}}} + \&c. \}$$

$$+ \left(\frac{\partial y_0}{\partial \varpi}\right) \cdot \{ c^{\mathrm{II}} \cdot X^{(0)} + \&c. \}$$

$$+ \nabla \cdot \left(\frac{\partial y_0}{\partial \varpi}\right) \cdot \{ c^{\mathrm{II}} \cdot X^{(1)} + \&c. \}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \nabla^{(s-1)} \cdot \left(\frac{\partial y_0}{\partial \varpi}\right) \cdot \{ c^{\mathrm{II}} \cdot X^{(s-1)} + \&c. \}$$

$$+ \&c.$$

$$+ q^{\mathrm{II}} \cdot \left(\frac{\partial^{n-1} \cdot y_0}{\partial \varpi^{n-1}}\right) \cdot X^{(0)} + q^{\mathrm{II}} \cdot \nabla \cdot \left(\frac{\partial^{n-1} \cdot y_0}{\partial \varpi^{n-1}}\right) \cdot X^{(1)} \ldots$$

$$\ldots + q^{\mathrm{II}} \cdot \nabla^{s-1} \cdot \left(\frac{\partial^{n-1} \cdot y_0}{\partial \varpi^{n-1}}\right) \cdot X^{(s-1)},$$

y_0, $\left(\frac{\partial y_0}{\partial \varpi}\right)$, &c. $\nabla \cdot y_0$, $\nabla \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \varpi}\right)$, &c. étant les sn conſtantes arbitraires de l'intégrale de l'équation

$$0 = \nabla^{s} \cdot \varphi(\varpi + x^{\mathrm{I}}), \text{ ou } \nabla^{s} \cdot y^{\mathrm{I}}_{x^{\mathrm{I}}} + V = 0;$$

la formule précédente ſervira donc à intégrer toutes les équations linéaires aux différences infiniment petites, dont les coëfficiens ſont conſtans, lorſqu'elles ont un dernier terme qui eſt fonction de x^{I} ſeul.

IX.

De la transformation des Suites.

ON voit par ce qui précède, avec quelle facilité toute la théorie des ſuites récurrentes découle de la conſidération

des fonctions génératrices ; cette considération peut servir encore à transformer d'une manière plus générale & plus simple que par les méthodes connues, une suite dans une autre dont les termes suivent une loi donnée.

Pour cela, considérons la suite

$$y_0 + y_1 + y_2 + y_3 \ldots + y_x + y_{x+1} \ldots + y_\infty; \ (\gamma)$$

& nommons, comme ci-dessus, u la somme de la série,

$$y_0 + y_1 . t + y_2 . t^2 + y_3 . t^3 \ldots + y_x . t^x + y_{x+1} . t^{x+1} \ldots + y_\infty . t^\infty;$$

il est visible que le coëfficient de t^x, dans le développement de la fraction $\frac{u}{1 - \frac{1}{t}}$, sera égal à la somme de la suite proposée (γ), depuis le terme y_x jusqu'à l'infini : or, si l'on multiplie le numérateur & le dénominateur de cette fraction par

$$a + b + c + e + \&c. - (a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} + \&c.),$$

le numérateur sera divisible par $1 - \frac{1}{t}$, & le quotient de la division sera

$$u . \left\{ \begin{array}{l} \qquad b + c + e + \&c. \\ + \frac{1}{t} (c + e + \&c.) + \frac{1}{t^2} (e + \&c.) \\ + \&c. \end{array} \right\};$$

donc si l'on fait pour abréger,

$$a + b + c + e + \&c. = K,$$
$$a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} + \&c. = z,$$

on aura

$$\frac{u}{1 - \frac{1}{t}} = u . \frac{[b + c + e + \&c. + \frac{1}{t} . (c + e + \&c.) + \frac{1}{t^2} . (e + \&c.) + \&c.]}{K - z};$$

en développant le second membre de cette équation, par rapport aux puissances de z, on aura

$$u \cdot \left\{ \begin{array}{l} b + c + e + \&c. \\ + \frac{1}{t} \cdot (c + e + \&c.) \\ + \frac{1}{t^2} \cdot (e + \&c.) \\ + \&c. \end{array} \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{K} + \frac{z}{K^2} + \frac{z^2}{K^3} + \frac{z^3}{K^4} + \&c. \right\}$$

Maintenant, le coëfficient de t^x, dans un terme quelconque tel que $\frac{u z^s}{t^r}$, est, par l'*article II*, égal à $\nabla^s \cdot y_{x+r}$; ce coëfficient sera donc, dans la quantité précédente, égal à

$$\begin{array}{l} (b + c + e + \&c.) . \left\{ \frac{y_x}{K} + \frac{\nabla \cdot y_x}{K^2} + \frac{\nabla^2 \cdot y_x}{K^3} + \frac{\nabla^3 \cdot y_x}{K^4} + \&c. \right\} \\ + (c + e + \&c.) . \left\{ \frac{y_{x+1}}{K} + \frac{\nabla \cdot y_{x+1}}{K^2} + \frac{\nabla^2 \cdot y_{x+1}}{K^3} + \frac{\nabla^3 \cdot y_{x+1}}{K^4} + \&c. \right\} \\ + (e + \&c.) . \left\{ \frac{y_{x+2}}{K} + \frac{\nabla \cdot y_{x+2}}{K^2} + \frac{\nabla^2 \cdot y_{x+2}}{K^3} + \frac{\nabla^3 \cdot y_{x+2}}{K^4} + \&c. \right\} \\ + \&c. \end{array}$$

ce sera la valeur de la suite proposée (γ) depuis le terme y_x jusqu'à l'infini.

Si l'on fait $x = 0$, on aura une nouvelle suite égale à la proposée, mais dont les termes suivront une autre loi; & si les quantités $\nabla \cdot y_x$, $\nabla^2 y_x$, &c. vont en décroissant, cette nouvelle suite sera convergente; elle se terminera toutes les fois que l'on aura $\nabla^s \cdot y_x = 0$, ce qui aura lieu lorsque la suite proposée sera récurrente; on aura donc de cette manière la somme des séries récurrentes.

La transformation des suites se réduit à déterminer l'intégrale $\Sigma \cdot y_x$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, & toutes les manières d'exprimer cette intégrale donneront autant de tranformées différentes; ce qui consiste, par ce qui

précède, à déterminer le coëfficient de t^x dans le développement de $\frac{u}{1 - \frac{1}{t}}$. Pour cela, soit généralement z une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$, & nommons $\nabla . y_x$ le coëfficient de t^x dans uz; les coëfficiens de t^x dans uz^2, uz^3, uz^4, &c. seront $\nabla^2 . y_x$, $\nabla^3 . y_x$, $\nabla^4 . y_x$, &c. Cela posé, on multipliera le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{u}{1 - \frac{1}{t}}$ par $K - z$, & l'on prendra K de manière qu'il soit égal à z, lorsqu'on fait t égal 1 dans cette dernière quantité; $K - z$ sera ainsi divisible par $1 - \frac{1}{t}$. Soit $q + \frac{q^{(1)}}{t} + \frac{q^{(2)}}{t^2} + \frac{q^{(3)}}{t^3} +$ &c. le quotient de la division; on aura

$$\begin{aligned}\frac{u}{1 - \frac{1}{t}} = \; & \frac{uq}{K} . \left(1 + \frac{z}{K} + \frac{z^2}{K^2} + \frac{z^3}{K^3} + \&c.\right) \\ & + \frac{uq^{(1)}}{K.t} . \left(1 + \frac{z}{K} + \frac{z^2}{K^2} + \frac{z^3}{K^3}\right) \\ & + \&c.\end{aligned}$$

ce qui donne, en repassant des fonctions génératrices à leurs variables correspondantes,

$$\begin{aligned}\Sigma . y_x = \; & \frac{q . y_x}{K} + \frac{q . \nabla . y_x}{K^2} + \frac{q . \nabla^2 . y_x}{K^3} + \&c. \\ & + \frac{q^{(1)} . y_{x+1}}{K} + \frac{q^{(1)} . \nabla . y_{x+1}}{K^2} + \frac{q^{(1)} . \nabla^2 . y_{x+1}}{K^3} + \&c. \\ & + \frac{q^{(2)} . y_{x+2}}{K} + \frac{q^{(2)} . \nabla . y_{x+2}}{K^2} + \frac{q^{(2)} . \nabla^2 . y_{x+2}}{K^3} + \&c. \\ & + \&c.\end{aligned}$$

l'intégrale $\Sigma . y_x$ étant prise depuis y_x jusqu'à y_∞; & si l'on fait dans l'équation précédente $x = 0$, on aura une nouvelle suite égale à la proposée, & qui sera par conséquent sa transformée.

X.

THÉORÈMES sur le développement des fonctions & de leurs différences, en séries.

En appliquant à des cas particuliers les résultats que nous avons donnés dans l'*article II*, on aura une infinité de théorèmes sur le développement de fonctions en suites; nous allons présenter ici les plus remarquables.

On a généralement

$$u \cdot (\frac{1}{t^i} - 1)^n = u \cdot \{(1 + \frac{1}{t} - 1)^i - 1\}^n;$$

or il est clair que le coëfficient de t^x dans le premier membre de cette équation, est la différence $n^{ième}$ de y_x, x variant de i; car ce coëfficient dans $u \cdot (\frac{1}{t^i} - 1)$, est $y_{x+i} - y_x$, ou $'\Delta \cdot y_x$, en désignant par la caractéristique $'\Delta$ les différences finies, lorsque x varie de la quantité i; d'où il est aisé de conclure que ce même coëfficient dans le développement de $u.(\frac{1}{t^i} - 1)^n$, est $'\Delta^n \cdot y_x$. D'ailleurs, si l'on développe $u \cdot \{(1 + \frac{1}{t} - 1)^i - 1\}^n$, suivant les puissances de $\frac{1}{t} - 1$, les coëfficiens de t^x dans les développemens de $u \cdot (\frac{1}{t} - 1)$, $u \cdot (\frac{1}{t} - 1)^2$, $u \cdot (\frac{1}{t} - 1)^3$, &c. seront, par l'*article II*, $\Delta \cdot y_x$, $\Delta^2 \cdot y_x$, $\Delta^3 \cdot y_x$, &c. en sorte que ce coëfficient dans $u \cdot \{(1 + \frac{1}{t} - 1)^i - 1)^n$, sera $\{(1 + \Delta \cdot y_x)^i - 1\}^n$, pourvu que dans le développement de cette quantité, on applique à la caractéristique Δ les exposans des puissances de $\Delta \cdot y_x$, & qu'ainsi au lieu d'une puissance quelconque $(\Delta \cdot y_x)^m$, on écrive $\Delta^m \cdot y_x$; on aura donc

$$'\Delta^n \cdot y_x = \{(1 + \Delta \cdot y_x)^i - 1\}^n; \quad (1)$$

Si l'on désigne par la caractéristique $'\Sigma$ l'intégrale finie, lorsque x varie de i, $'\Sigma^n . y_x$ sera visiblement égal par l'*article II,* au coëfficient de t^x dans le développement de la fonction $u . (\frac{1}{t^i} - 1)^{-n}$, en faisant abstraction ici des constantes arbitraires que l'intégration doit introduire; or on a

$$u . (\frac{1}{t^i} - 1)^{-n} = u . \{(1 + \frac{1}{t})^i - 1\}^{-n};$$

de plus, le coëfficient de t^x dans $u . (\frac{1}{t} - 1)^{-m}$, est, quel que soit m, $\Sigma^m . y_x$, en faisant abstraction des constantes arbitraires, & ce coëfficient dans $u . (\frac{1}{t} - 1)^m$, est $\Delta^m . y_x$; on aura donc, en faisant toujours abstraction des constantes arbitraires,

$$'\Sigma^n . y_x = \{(1 + \Delta . y_x)^i - 1\}^{-n}; \quad (2)$$

pourvu que dans le développement du second membre de cette équation, on applique à la caractéristique Δ les exposans des puissances de $\Delta . y_x$, & que l'on change les différences négatives en intégrales; & comme dans ce développement, l'intégrale $\Sigma^n . y_x$ se rencontre, & que cette intégrale peut être censée renfermer n constantes arbitraires, l'équation (2) est encore vraie en ayant égard aux constantes arbitraires.

On peut observer ici que cette équation se déduit de l'équation (1), en y faisant n négatif, & en y changeant les différences négatives en intégrales, c'est-à-dire en écrivant $'\Sigma^n . y_x$ au lieu de $'\Delta^{-n} . y_x$, & $\Sigma^m . y_x$ au lieu de $\Delta^{-m} . y_x$.

Les équations (1) & (2) auroient également lieu si x, au lieu de varier de l'unité dans $\Delta . y_x$, y varioit d'une quantité quelconque ϖ; mais alors la variation de x dans $'\Delta . y_x$, au lieu d'être i, seroit $i\varpi$. En effet, il est clair que si dans y_x on fait $x = \frac{x'}{\varpi}$, x' variera de ϖ lorsque x variera de

l'unité; $\Delta . y_x$ se changera ainsi dans $\Delta . y_{x'}$, la variation de x' étant ϖ, & $'\Delta . y_x$ se changera dans $'\Delta . y_{x'}$, la variation de x' étant $i\varpi$. Cela posé, si l'on suppose dans ces équations, que la variation de x est infiniment petite & égale à ∂x dans $\Delta . y_x$; cette différence se changera dans la différentielle infiniment petite ∂y_x; si de plus on fait i infini & $i\partial x = \alpha$, α étant une quantité finie, la variation de x dans $'\Delta . y_x$ sera α; on aura donc

$$'\Delta^n . y_x = \{(1 + \partial y_x)^i - 1\}^n$$

$$\therefore {}'\Sigma^n . y_x = \frac{1}{[(1 + \partial y_x)^i - 1]^n}.$$

or on a

$$\log.(1 + \partial y_x)^i = i . \log.(1 + \partial y_x) = i\partial y_x = i\partial x . \frac{\partial y_x}{\partial x} = \alpha . \frac{\partial y_x}{\partial x},$$

ce qui donne

$$(1 + \partial y_x)^i = e^{\alpha . \frac{\partial y_x}{\partial x}},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; donc

$$'\Delta^n . y_x = (e^{\alpha . \frac{\partial y_x}{\partial x}} - 1)^n; \quad (3)$$

$$'\Sigma^n . y_x = \frac{1}{(e^{\alpha . \frac{\partial y_x}{\partial x}} - 1)^n}; \quad (4)$$

en ayant soin d'appliquer à la caractéristique ∂ les exposans des puissances de ∂y_x, & de changer les différences négatives en intégrales.

Si dans les équations (1) & (2), on suppose encore i infiniment petit & égal à ∂x, on aura $'\Delta^n . y_x = \partial^n . y_x$, & $'\Sigma^n . y_x = \frac{1}{\partial x^n} \int^n . y\partial x^n$; on a d'ailleurs

$$(1 + \Delta y_x)^i = e^{\partial x \log.(1 + \Delta y_x)} = 1 + \partial x \log.(1 + \Delta y_x);$$

ces équations deviendront ainſi

$$\frac{\partial^n . y_x}{\partial x^n} = [\log. (1 + \Delta . y_x)]^n; \quad (5)$$

$$\int^n . y_x . \partial x^n = \frac{1}{[\log. (1 + \Delta . y_x)]^n}; \quad (6)$$

On peut remarquer ici une analogie ſingulière entre les puiſſances poſitives & les différences; l'équation

$$^{i}\Delta . y_x = (1 + \Delta y_x)^i - 1$$

a encore lieu en élevant ſes deux membres à la puiſſance n, pourvu que l'on applique aux caractériſtiques Δ & $^{i}\Delta$ les puiſſances de $\Delta . y_x$ & de $^{i}\Delta . y_x$; car il eſt clair que dans ce cas on aura l'équation (1).

La même analogie ſubſiſte entre les puiſſances négatives & les intégrales, & l'équation précédente a lieu encore en élevant ſes deux membres à la puiſſance $-n$, pourvu que l'on change en intégrales du même ordre, les puiſſances négatives de $\Delta . y_x$ & de $^{i}\Delta . y_x$; on formera ainſi l'équation (2).

Il en eſt de même de l'équation

$$^{i}\Delta . y_x = e^{\alpha . \frac{\partial y_x}{\partial x}} - 1,$$

en élevant ſes deux membres aux puiſſances n & $-n$; elle ſera encore vraie, & ſe changera dans les équations (3) & (4), pourvu que l'on change les puiſſances poſitives de $^{i}\Delta . y_x$ & de ∂y_x en différences du même ordre, & les puiſſances négatives en intégrales du même ordre. On voit au reſte, que ces analogies tiennent à ce que les produits de la fonction u, génératrice de y_x, par les puiſſances ſucceſſives de $\frac{1}{t} - 1$, ſont les fonctions génératrices des différences finies ſucceſſives de y_x, tandis que les quotiens de u, par ces mêmes puiſſances, ſont les fonctions génératrices des intégrales finies de y_x.

XI. LES

XI.

Les formules précédentes ne peuvent être d'ufage que dans le cas où les différences finies & infiniment petites de y_x vont en décroiffant ; mais il y a une infinité de cas dans lefquels cela n'a pas lieu, & où il eft cependant utile d'avoir l'expreffion des différences & des intégrales, en féries convergentes ; le plus fimple de tous, eft celui dans lequel les termes d'une férie dont les différences font convergentes, font multipliés par les termes d'une progreffion géométrique : nous allons nous en occuper d'abord.

Le terme général des fuites ainfi formées, peut être repréfenté par $h^x . y_x$, y_x étant le terme général d'une fuite dont les différences font convergentes. Cela pofé, nommons u la fomme de la fuite infinie

$$y_0 + y_1 . h . t + y_2 . h^2 . t^2 + y_3 . h^3 . t^3 + \&c. \dots + y_\infty . h^\infty . t^\infty ;$$

on a

$$u . \left(\frac{1}{t^i} - 1 \right)^n = u . \left\{ h^i . \left(1 + \frac{1}{h\,t} - 1 \right)^i - 1 \right\}^n .$$

Le coëfficient de t^x, dans le premier membre de cette équation, eft la différence finie $n^{ième}$ de $h^x . y_x$, x variant de la quantité i ; d'ailleurs, fi l'on développe le fecond membre, par rapport aux puiffances de $\frac{1}{h\,t} - 1$, le coëfficient de t^x, dans $u . \left(\frac{1}{h\,t} - 1 \right)^r$, fera, quel que foit r, $h^x . \Delta^r . y_x$; l'équation précédente donnera donc, en repaffant par l'*article II*, des fonctions génératrices à leurs variables correfpondantes,

$$ {}^i\Delta^n . h^x . y_x = h^x . \{ h^i . (1 + \Delta . y_x)^i - 1 \}^n ; \quad (7)$$

pourvu que dans le développement du fecond membre de cette équation, on applique à la caractériftique Δ, les expofans des puiffances de $\Delta . y_x$, & qu'ainfi, au lieu de $(\Delta\, y_x)^0$, on écrive $\Delta^0 . y_x$, c'eft-à-dire y_x.

En changeant n en $-n$, on aura, comme dans l'*article précédent*,

$$ {}^{i}\Sigma^{n}.h^{x}.y_{x} = \frac{h^{x}}{[h^{i}.(1+\Delta y_{x})^{i}-1]^{n}} + a x^{n-1} + b x^{n-2} + \&c.... + f; \quad (8) $$

$a, b, \ldots . f$, étant les n constantes arbitraires de l'intégrale du premier membre, dont l'addition devient inutile dans le cas où $h = 1$, parce qu'alors le second membre renferme l'intégrale $\Sigma^{n}.y_{x}$, qu'il ne renferme plus lorsque h diffère de l'unité.

Si l'on suppose y_{x} égal à une fonction y' de x', x' étant égal à $\frac{x}{r}$, & r étant supposé infini; on aura $\Delta y_{x} = \partial y'$; la différence $\partial x'$ étant égale à $\frac{1}{r}$; de plus, si l'on fait $h^{r} = p$, on aura $h^{x} = p^{x'}$, & la fonction $h^{x}.y_{x}$ se changera dans $p^{x'}.y'$; or, si l'on suppose i infiniment grand, & $\frac{i}{r} = \alpha$, il est clair que x variant de i, x' variera de α; en sorte que ${}^{i}\Delta^{n}.p^{x'}.y'$ & ${}^{i}\Sigma^{n}.p^{x'}.y'$ seront la différence & l'intégrale finie $n^{\text{ième}}$ de $p^{x'}.y'$, x' variant de la quantité α; on a d'ailleurs $h^{i} = p^{\alpha}$; les équations (7) & (8) deviendront conséquemment

$$ {}^{\alpha}\Delta^{n}.p^{x'}.y' = p^{x'}.\{p^{\alpha}.(1+\partial y')^{i}-1\}^{n}, $$

$$ {}^{\alpha}\Sigma^{n}.p^{x'}.y' = \frac{p^{x'}}{[p^{\alpha}.(1+\partial y')^{i}-1]^{n}} + a x'^{n-1} + b x'^{n-2} + \&c. $$

or on a

$$ (1+\partial y')^{i} = e^{\alpha.\frac{\partial y'}{\partial x'}}; \text{ donc} $$

$$ {}^{\alpha}\Delta^{n}.p^{x'}.y' = p^{x'}.(p^{\alpha}.e^{\alpha.\frac{\partial y'}{\partial x'}}-1)^{n}; \quad (9) $$

$$ {}^{\alpha}\Sigma^{n}.p^{x'}.y' = \frac{p^{x'}}{\left\{p^{\alpha}.e^{\alpha.\frac{\partial y'}{\partial x'}}-1\right\}^{n}} + a x'^{n-1} + b x'^{n-2} \ldots + f; \quad (10) $$

en ayant soin, dans le développement de ces équations, d'écrire y^1, au lieu de $(\frac{\partial y^1}{\partial x^1})^0$, & $\frac{\partial^\mu . y^1}{\partial x^{1\mu}}$, au lieu de $(\frac{\partial y^1}{\partial x^1})^\mu$, μ étant quelconque.

Si dans les formules (7) & (8), on suppose i infiniment petit & égal à ∂x, ${}^1\Delta^n . h^x . y_x$ se changera dans $\partial^n . h^x . y_x$, & ${}^1\Sigma^n . h^x . y_x$ dans $\int^n . h^x . y_x$; on a d'ailleurs

$$h^i . (1 + \Delta . y_x)^i = 1 + \partial x . \log . [h(1 + \Delta . y_x)];$$

partant on aura

$$\frac{\partial^n . h^x . y_x}{\partial x^n} = h^x . [\log . h . (1 + \Delta . y_x)]^n; \quad (11)$$

$$\int^n . h^x . y_x . \partial x^n = \frac{h^x}{[\log . h . (1 + \Delta . y_x)]^n} + a x^{n-1} + b x^{n-2} ..... + f; (12)$$

Je dois observer ici que les équations (1), (2), (3), (4), (5) & (6) de l'*article précédent*, ont été trouvées par M. de la Grange, dans les Mémoires de Berlin pour l'*année 1771*, au moyen de l'analogie qui existe entre les puissances positives & les différences, & entre les puissances négatives & les intégrales; mais cet illustre Auteur se contente de la supposer sans en donner la démonstration qu'il regarde comme très-difficile: quant aux équations (7), (8), (9), (10), (11) & 12, elles sont nouvelles, à l'exception de l'équation (10), dont M. Euler a donné le cas particulier où $n = 1$, dans ses Institutions de Calcul différentiel.

XII.

On auroit une infinité de théorèmes analogues à ceux des *articles précédens*, si au lieu de considérer les différences & les intégrales de y_x, on considéroit toute autre fonction de cette variable; il sera facile de les déduire de la solution générale du Problème suivant.

$\Gamma . (y_x)$ *représentant une fonction quelconque linéaire* de y_x,

y_{x+1}, y_{x+2}, *&c. &* $\nabla . y_x$ *une autre fonction linéaire de ces mêmes variables; on propose de trouver l'expression de* $\Gamma . y_x$, *dans une suite ordonnée suivant les quantités* $\nabla . y_x$, $\nabla^2 . y_x$, $\nabla^3 . y_x$, *&c.*

Pour cela, soit u la fonction génératrice de y_x, us celle de $\Gamma . y_x$, & uz celle de $\nabla . y_x$, s & z étant fonctions de $\frac{1}{t}$; on commencera par tirer de l'équation qui exprime la relation de $\frac{1}{t}$ & de z, la valeur de $\frac{1}{t}$ en z, & en la substituant dans s, on aura la valeur de s en z; mais comme il peut arriver que l'on ait plusieurs valeurs de $\frac{1}{t}$ en z, on aura autant d'expressions différentes de s. Pour en avoir une qui puisse appartenir indifféremment à toutes ces valeurs de s, nous supposerons que le nombre des valeurs de $\frac{1}{t}$ en z soit n, & nous donnerons à l'expression de s la forme suivante,

$$s = Z + \frac{1}{t} . Z^{(1)} + \frac{1}{t^2} . Z^{(2)} \ldots + \frac{1}{t^{n-1}} . Z^{(n-1)},$$

Z, $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, &c. étant des fonctions de Z, qu'il s'agit de déterminer; or si l'on substitue successivement dans cette équation, au lieu de $\frac{1}{t}$, ses n valeurs en z, on formera n équations au moyen desquelles on déterminera les n quantités Z, $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, &c. il ne s'agira plus ensuite que de réduire ces quantités en séries ordonnées par rapport aux puissances de z, & de les substituer dans l'équation précédente. Cela posé, si l'on multiplie cette équation par u, le coëfficient de t^x dans us, sera $\Gamma . y_x$; ce même coëfficient dans un terme quelconque, tel que $\frac{uz^s}{t^r}$, sera par l'*article II*, égal à $\nabla^s . y_{x+r}$; l'équation précédente donnera donc, en repassant des fonctions génératrices aux variables correspondantes, une expression de

$\Gamma . y_x$ par une ſuite ordonnée ſuivant les quantités $\nabla . y_x$, $\nabla^2 . y_x$, $\nabla^3 . y_x$, &c. $\nabla . y_{x+1}$, $\nabla^2 . y_{x+1}$, &c. . . . . $\nabla . y_{x+n-1}$, &c.

On peut ſuppoſer encore pour plus de généralité, que les quantités $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, $Z^{(3)}$, &c. au lieu d'être multipliées par $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{t^2}$, $\frac{1}{t^3}$, &c. ſont multipliées par des fonctions quelconques de $\frac{1}{t}$, & l'on aura par ce moyen, une infinité d'expreſſions différentes de $\Gamma . y_x$.

Si l'on ſuppoſe

$$s = \frac{1}{t^i},$$

$$z = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \ldots\ldots + \frac{q}{t^n},$$

$\Gamma . y_x$ ſe changera dans y_{x+i}; on aura donc, par ce procédé, la valeur de y_{x+i} en fonction de $\nabla . y_x$, $\nabla^2 . y_x$, &c. mais la méthode que nous avons donnée pour cet objet dans l'*article V*, eſt d'un uſage beaucoup plus facile.

XIII.

Des Suites à deux variables.

Conſidérons une fonction $y_{x,x'}$ de deux variables x & x', & nommons u la ſuite infinie,

$$\begin{aligned} & y_{0,0} + y_{1,0}.t + y_{2,0}.t^2 + y_{3,0}.t^3 \ldots\ldots + y_{x,0}.t^x + y_{x+1,0}.t^{x+1} \ldots\ldots \\ & \qquad \ldots + y_{\infty,0}.t^\infty \\ & + y_{0,1}.t' + y_{1,1}.t'.t + y_{2,1}.t'.t^2 \ldots + y_{x-1,1}.t'.t^{x-1} + y_{x,1}.t'.t^x \ldots \\ & \qquad \ldots + y_{\infty,1}.t'.t^\infty \\ & + y_{0,2}.t'^2 + y_{1,2}.t'^2.t \ldots + y_{x-2,2}.t'^2.t^{x-2} \ldots\ldots \\ & \qquad \ldots + y_{\infty,2}.t'^2.t^\infty \\ & + \text{\&c.} \end{aligned}$$

le coëfficient de $t^x . t'^{x'}$, ſera $y_{x,x'}$; ainſi u ſera la fonction génératrice de $y_{x,x'}$, & ſi l'on déſigne par la caractériſtique Δ, les différences finies lorſque x ſeul varie, & par la caractériſtique Δ', ces différences lorſque x' ſeul varie, la fonction génératrice de $\Delta . y_{x,x'}$ ſera, par l'*article II*, $u . (\frac{1}{t} - 1)$, & celle de $\Delta' . y_{x,x'}$ ſera $u . (\frac{1}{t'} - 1)$; partant la fonction génératrice de $\Delta . \Delta' . y_{x,x'}$ ſera $u . (\frac{1}{t} - 1) . (\frac{1}{t'} - 1)$; d'où il eſt facile de conclure que celle de $\Delta^i . \Delta'^{i'} . y_{x,x'}$ ſera $u . (\frac{1}{t} - 1)^i . (\frac{1}{t'} - 1)^{i'}$.

En général, ſi l'on déſigne par $\nabla . y_{x,x'}$ la quantité

$$\begin{array}{llll} A . y_{x,x'} + B . y_{x+1,x'} & + C . y_{x+2,x'} & + \&c. \\ \phantom{A . y_{x,x'}} + B' . y_{x,x'+1} & + C' . y_{x+1,x'+1} & + \&c. \\ & + C'' . y_{x,x'+2} & + \&c. \\ & & + \&c. \end{array}$$

Si l'on déſigne pareillement par $\nabla^2 . y_{x,x'}$, une fonction dans laquelle $\nabla . y_{x,x'}$ entre de la même manière que $y_{x,x'}$ entre dans $\nabla . y_{x,x'}$; ſi l'on déſigne encore par $\nabla^3 . y_{x,x'}$, une fonction dans laquelle $\nabla^2 . y_{x,x'}$ entre de la même manière que $y_{x,x'}$ dans $\nabla . y_{x,x'}$, & ainſi de ſuite; la fonction génératrice de $\nabla^n . y_{x,x'}$ ſera

$$u . \left\{ \begin{array}{llll} A + \frac{B}{t} & + \frac{C}{t^2} & + \&c. \\ + \frac{B'}{t'} & + \frac{C'}{t . t'} & + \&c. \\ & + \frac{C''}{t'^2} & + \&c. \\ & & + \&c. \end{array} \right\}^n$$

Partant

$$u.t^r.t'^{r'}.\left(\frac{1}{t}-1\right)^i.\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{i'}.\left\{\begin{array}{l}A+\frac{B}{t}+\&c.\\ \quad +\frac{B'}{t'}+\&c.\end{array}\right\}^n$$

est la fonction génératrice de $\Delta^i.\Delta'^{i'}.\nabla^n.y_{x-r,x'-r'}$.

s étant supposée une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$ & de $\frac{1}{t'}$, si l'on développe s^i suivant les puissances de ces variables, & que l'on désigne par $\frac{K}{t^m.t'^{m'}}$ un terme quelconque de ce développement; le coëfficient de $t^x.t'^{x'}$ dans $\frac{K.u}{t^m.t'^{m'}}$ sera $K.y_{x+m,x'+m'}$; on aura donc le coëfficient de $t^x.t'^{x'}$ dans us^i, ou ce qui revient au même, on aura $\nabla^i.y_{x,x'}$, 1.° en substituant dans s, y_x au lieu de $\frac{1}{t}$, & $y_{x'}$ au lieu de $\frac{1}{t'}$; 2.° en développant ce que devient alors us^i suivant les puissances de y_x & de $y_{x'}$, & en écrivant au lieu d'un terme quelconque, tel $K.(y_x)^m.(y_{x'})^{m'}$, $K.y_{x+m,x'+m'}$, & par conséquent en substituant $K.y_{x,x'}$ au lieu du terme tout constant K ou $K.(y_x)^0.(y_{x'})^0$.

Si au lieu de développer s^i suivant les puissances de $\frac{1}{t}$ & de $\frac{1}{t'}$, on le développe suivant les puissances de $\frac{1}{t}-1$ & de $\frac{1}{t'}-1$, & que l'on désigne par $K.\left(\frac{1}{t}-1\right)^m.\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{m'}$, un terme quelconque de ce développement; le coëfficient de $t^x.t'^{x'}$, dans $K.u\left(\frac{1}{t}-1\right)^m.\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{m'}$, sera $K.\Delta^m.\Delta'^{m'}.y_{x,x'}$; on aura donc $\nabla^i.y_{x,x'}$, 1.° en substituant dans s, $\Delta.y_{x,x'}$ au lieu de

$\frac{1}{t} - 1$, & $\Delta' . y_{x, x'}$ au lieu de $\frac{1}{t'} - 1$; 2.° en développant ce que devient alors s^i ſuivant les puiſſances de $\Delta . y_{x, x'}$ & de $\Delta' . y_{x, x'}$, & en appliquant aux caractériſtiques Δ & Δ' les expoſans de ces puiſſances, c'eſt-à-dire en écrivant au lieu d'un terme quelconque tel que $K . (\Delta . y_{x, x'})^m . (\Delta' . y_{x, x'})^{m'}$, celui-ci, $K . \Delta^m . \Delta'^{m'} . y_{x, x'}$.

Soit Σ la caractériſtique des intégrales finies relatives à x, & Σ' celle des intégrales relatives à x'; ſoit de plus z la fonction génératrice de $\Sigma^i . \Sigma'^{i'} . y_{x, x'}$; on aura $z . (\frac{1}{t} - 1)^i . (\frac{1}{t'} - 1)^{i'}$ pour la fonction génératrice de $y_{x, x'}$; cette fonction génératrice doit, en n'ayant égard qu'aux puiſſances poſitives ou nulles de t & de t', ſe réduire à u; on aura ainſi

$$z . (\frac{1}{t} - 1)^i . (\frac{1}{t'} - 1)^{i'} = u + \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t^3} \ldots + \frac{q}{t^i} + \frac{a'}{t'} + \frac{b'}{t'^2} + \frac{c'}{t'^3} \ldots + \frac{q'}{t'^{i'}},$$

a, b, c .... q, étant des fonctions arbitraires de t', & a', b', c' ... q', étant des fonctions arbitraires de t; partant

$$z = \frac{u t^i . t'^{i'} + a . t^{i-1} . t'^{i'} + b . t^{i-2} . t'^{i'} \ldots + q . t'^{i'} + a' . t^i . t'^{i'-1} + b' . t^i . t'^{i'-2} \ldots + q' . t^i}{(1 - t)^i . (1 - t')^{i'}}.$$

X I V.

De l'interpolation des Suites à deux variables, & de l'intégration des équations linéaires aux différences partielles finies & infiniment petites.

$y_{x+i, x'+i'}$, eſt évidemment égal au coëfficient de $t^x . t'^{x'}$, dans le développement de $\frac{u}{t^i . t'^{i'}}$; or on a

$$\frac{u}{t^{i}.t'^{i'}} = u.\left(1+\frac{1-t}{t}\right)^{i}.\left(1+\frac{1-t'}{t'}\right)^{i'} =$$

$$u.\left\{\begin{array}{l}
1 + i.\frac{1-t}{t} + \frac{i.(i-1)}{1.2}.\left(\frac{1-t}{t}\right)^{2} \\
+ \frac{i.(i-1).(i-2)}{1.2.3}.\left(\frac{1-t}{t}\right)^{3} + \&c. \\
+ i'.\left(\frac{1-t'}{t'}\right) + i'.i.\left(\frac{1-t'}{t'}\right).\left(\frac{1-t}{t}\right) \\
+ i'.\frac{i.(i-1)}{1.2}.\left(\frac{1-t'}{t'}\right).\left(\frac{1-t}{t}\right)^{2} + \&c. \\
+ \frac{i'.(i'-1)}{1.2}.\left(\frac{1-t'}{t'}\right)^{2} \\
+ \frac{i'.(i'-1)}{1.2}.i.\left(\frac{1-t'}{t'}\right)^{2}.\frac{1-t}{t} + \&c. \\
+ \&c.
\end{array}\right.$$

le coëfficient de $u.\left(\frac{1}{t}-1\right)^{r}.\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}$ étant égal à $\frac{i.(i-1).(i-2)\ldots(i-r+1)}{1.2.3\ldots.r}.\frac{i'.(i'-1).(i'-2)\ldots(i'-r'+1)}{1.2.3\ldots.r'}$.

Maintenant, le coëfficient de $t^{x}.t'^{x'}$, dans le développement de $u.\left(\frac{1}{t}-1\right)^{r}.\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}$, est $\Delta^{r}.\Delta'^{r'}.y_{x,x'}$; on aura donc en passant des fonctions génératrices aux variables correspondantes,

$$\begin{array}{rl}
y_{x+i,\,x'+i'} = y_{x,x'} + i.\Delta.y_{x,x'} + \frac{i.(i-1)}{1.2}.\Delta^{2}.y_{x,x'} + \&c. \\
+ i'.\Delta'.y_{x,x'} + i'.i.\Delta'.\Delta.y_{x,x'} + \&c. \\
+ \frac{i'.(i'-1)}{1.2}.\Delta'^{2}.y_{x,x'} + \&c. \\
+ \&c.
\end{array}$$

équation qui peut être mise sous cette forme très-simple,

$$y_{x+i,\,x'+i'} = (1+\Delta.y_{x,x'})^{i}.(1+\Delta'.y_{x,x'})^{i'};$$

pourvu que dans le développement du ſecond membre de cette dernière équation, on applique aux caractériſtiques Δ & Δ^1 les expoſans des puiſſances de $\Delta \,.\, y_{x,x^1}$ & de $\Delta^1 \,.\, y_{x,x^1}$, & par conſéquent qu'au lieu du terme tout conſtant, ou multiplié par $(\Delta \,.\, y_{x,x^1})^0 \,.\, (\Delta^1 \,.\, y_{x,x^1})^0$, on écrive y_{x,x^1}.

X V.

SUPPOSONS maintenant qu'au lieu d'interpoler ſuivant les différences de la fonction y_{x,x^1}, on veuille interpoler ſuivant d'autres loix; pour cela, ſoit

$$z = A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \frac{D}{t^3} \dots\dots + \frac{P}{t^{n-1}} + \frac{q}{t^n};$$

$$+ \frac{B^1}{t^1} + \frac{C^1}{t^1 \,.\, t} + \frac{D^1}{t^1 \,.\, t^2} + \&c.$$

$$+ \frac{C^{11}}{t^{1^2}} + \frac{D^{11}}{t^{1^2} \,.\, t} + \&c,$$

$$+ \&c.$$

$$[\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots]$$

$$+ \frac{1}{t^{1n^1}}.$$

Si l'on fait

$$A + \frac{B^1}{t^1} + \frac{C^{11}}{t^{1^2}} \dots\dots\dots\dots\dots + \frac{1}{t^{1n^1}} = a;$$

$$B + \frac{C^1}{t^1} + \frac{D^{11}}{t^{1^2}} + \&c. = b,$$

$$C + \frac{D^1}{t^1} + \&c. = c,$$

&c.

on aura

$$z = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \&c. \dots\dots + \frac{q}{t^n}.$$

Il eſt facile d'en conclure, comme dans l'*article V,* les valeurs

ſucceſſives de $\frac{1}{t^{n+1}}$, $\frac{1}{t^{n+2}}$, $\frac{1}{t^{n+3}}$, &c. en fonctions de a, b, c, &c. & z; & il eſt viſible que dans aucun terme de l'expreſſion de $\frac{1}{t^i}$, la ſomme des puiſſances de $\frac{1}{t}$ & de $\frac{1}{t^1}$, ne ſurpaſſera pas i, lorſque i ſera un nombre entier poſitif, u^1 étant ſuppoſé égal ou moindre que n.

Conſidérons maintenant la formule (μ) de l'*article V*, & ſuppoſons qu'en développant ſuivant les puiſſances de $\frac{1}{t^1}$, la quantité

$$\begin{aligned} & b.Z^{(0)}_{i-n+1} + bz.Z^{(1)}_{i-2n+1} + \&c. \\ & + c\,Z^{(0)}_{i-n+2} + cz.Z^{(1)}_{i-2n+2} + \&c. \\ & + \&c. \end{aligned}$$

on ait

$$\begin{aligned} & M + Nz + \&c. + \frac{1}{t^1}.(M^{(1)} + N^{(1)}z + \&c.) \\ & + \frac{1}{t^{1^2}}.(M^{(2)} + N^{(2)}.z + \&c.) \ldots + \frac{1}{t^{1^i}}.M^{(i)}; \end{aligned}$$

les puiſſances ultérieures de $\frac{1}{t^1}$ ſe détruiſant réciproquement, puiſque l'expreſſion de $\frac{1}{t^i}$ ne doit point les renfermer. Suppoſons pareillement qu'en développant la quantité

$$\begin{aligned} & c.Z^{(0)}_{i-n+1} + cz.Z^{(1)}_{i-2n+1} + \&c. \\ & + e\,Z^{(0)}_{i-n+2} + ez.Z^{(1)}_{i-2n+2} + \&c. \end{aligned}$$

on ait

$$\begin{aligned} & M_1 + N_1.z + \&c. + \frac{1}{t^1}.(M_1^{(1)} + N_1^{(1)}.z + \&c.) \\ & + \frac{1}{t^{1^2}}.(M_1^{(2)} + N_1^{(2)}.z + \&c.) \ldots + \frac{1}{t^{1^{i-1}}}.M_1^{(i-1)}; \end{aligned}$$

qu'en développant la quantité

$$e Z^{(0)}_{i-n+1} + \&c.$$
$$+ \&c.$$

on ait

$$M_2 + N_2 . z + \&c. \frac{1}{t^2} . (M^{(1)}_2 + N^{(1)}_2 . z + \&c.) \dots$$

$$\dots\dots\dots + \frac{1}{t^{2\,i-2}} . M^{(i-2)}_2,$$

& ainſi de ſuite ; on aura

$$\frac{y}{t^i} = M + Nz + \&c. + \frac{1}{t^2} . (M^{(1)} + N^{(1)} . z + \&c.)$$
$$+ \frac{1}{t^{2\,2}} . (M^{(2)} + N^{(2)} . z + \&c.)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \frac{1}{t^{2\,i}} . M^{(i)}$$

$$+ \frac{1}{t} . \left\{ \begin{array}{l} M_1 + N_1 . z + \&c. \\ + \frac{1}{t^2} . (M^{(1)}_1 + N^{(1)}_1 . z + \&c.) \\ + \frac{1}{t^{2\,2}} . (M^{(2)}_1 + N^{(2)}_1 . z + \&c.) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + \frac{1}{t^{2\,i-1}} . M^{(i-1)}_1 \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{1}{t^2} . \left\{ \begin{array}{l} M_2 + N_2 . z + \&c. \\ + \frac{1}{t^2} . (M^{(1)}_2 + N^{(1)}_2 . z + \&c.) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + \frac{1}{t^{2\,i-2}} . M^{(i-2)}_2 \end{array} \right\}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \frac{1}{t^{n-1}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} M_{n-1} + N_{n-1} \cdot z + \&c. \\ + \frac{1}{t^1} \cdot (M^{(1)}_{n-1} + N^{(1)}_{n-1} \cdot z + \&c.) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \frac{1}{t^{1\,i-n+1}} \cdot M^{(i-n+1)}_{n-1} \end{array} \right\}$$

Cela posé, si l'on nomme $\nabla \cdot y_{x,x^1}$ la quantité

$$\begin{array}{r} A \cdot y_{x,x^1} + B \cdot y_{x+1,x^1} + C \cdot y_{x+2,x^1} + \&c. \\ + B^1 \cdot y_{x,x^1+1} + C^1 \cdot y_{x+1,x^1+1} + \&c. \\ + C^{11} \cdot y_{x,x^1+2} + \&c. \\ + \&c. \end{array}$$

le coëfficient de $t^x \cdot t^{1x^1}$ dans le développement de la quantité $\frac{u \cdot z^{\mu}}{t^r \cdot t^{1r^1}}$, sera par l'*article XIII*, $\nabla^{\mu} \cdot y_{x+r,\,x^1+r^1}$; l'équation précédente donnera conséquemment, en la multipliant par u, & en passant des fonctions génératrices aux variables correspondantes,

$$y_{x+i,\,x^1} = \left\{ \begin{array}{l} M \cdot y_{x,x^1} + N \cdot \nabla \cdot y_{x,x^1} + \&c. \\ + M^{(1)} \cdot y_{x,x^1+1} + N^{(1)} \cdot \nabla \cdot y_{x,x^1+1} + \&c. \\ + M^{(2)} \cdot y_{x,x^1+2} + N^{(2)} \cdot \nabla \cdot y_{x,x^1+2} + \&c. \\ + \&c. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + M^{(i)} \cdot y_{x,x^1+i} \end{array} \right\}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} M_1 \cdot y_{x+1,x^1} + N_1 \cdot \nabla \cdot y_{x+1,x^1} + \&c. \\ + M_1^{(1)} \cdot y_{x+1,x^1+1} + N_1^{(1)} \cdot \nabla \cdot y_{x+1,x^1+1} + \&c. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + M_1^{(i-1)} \cdot y_{x+1,x^1+i-1} \end{array} \right\}$$

$$+ \&c.$$

$$+\left\{\begin{array}{l} M_{n-1} \cdot y_{x+n-1,x'} + N_{n-1} \cdot \nabla \cdot y_{x+n-1,x'} + \&c. \\ + M^{(1)}_{n-1} \cdot y_{x+n-1,x'+1} + N^{(1)}_{n-1} \cdot \nabla \cdot y_{x+n-1,x'+1} + \&c. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + M^{(i-n+1)}_{n-1} \cdot y_{x+n-1,x'+i-n+1} \end{array}\right\}.$$

XVI.

SI l'on suppose $\nabla \cdot y_{i,x'} = 0$, on aura, en faisant $x = 0$ dans l'équation précédente,

$$\begin{array}{rl} y_{i,x'} = & M \cdot y_{0,x'} + M^{(1)} \cdot y_{0,x'+1} + M^{(2)} \cdot y_{0,x'+2} \dots\dots \\ & \dots\dots + M^{(i)} \cdot y_{0,x'+i} \\ & + M_1 \cdot y_{1,x'} + M_1^{(1)} \cdot y_{1,x'+1} + M_1^{(2)} \cdot y_{1,x'+2} \dots\dots \\ & \dots\dots + M_1^{(i-1)} \cdot y_{1,x'+i-1} \\ & + \&c. \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + M_{n-1} \cdot y_{n-1,x'} + M^{(1)}_{n-1} \cdot y_{n-1,x'+1} \dots\dots \\ & \dots\dots + M^{(i-n+1)}_{n-1} \cdot y_{n-1,x'+i-n+1} \end{array}$$

$M^{(r)}$, $M_1^{(r)}$, $M_2^{(r)}$, &c. étant des fonctions de i & de r, l'expression précédente de $y_{i,x'}$ peut être mise sous cette forme très-simple,

$$y_{i,x'} = \Sigma \cdot \left\{\begin{array}{l} M^{(r)} \cdot y_{0,x'+r} + M_1^{(r-1)} \cdot y_{1,x'+r-1} + M_2^{(r-2)} \\ \cdot y_{2,x'+r-2} \dots\dots + M^{(r-n+1)}_{n-1} \cdot y_{n-1,x'+r-n+1} \end{array}\right\}; \quad (\lambda)$$

l'intégrale étant prise par rapport à r, depuis $r = 0$ jusqu'à $r = i + 1$, par rapport au premier terme; depuis $r = 1$ jusqu'à $r = i + 1$, par rapport au second terme, & ainsi de suite. Cette expression de $y_{i,x'}$ sera l'intégrale complète de l'équation $\nabla \cdot y_{x,x'} = 0$, ou, ce qui revient au même, de celle-ci,

$$0 = A.y_{i,x^1} + B.y_{i+1,x^1} + C.y_{i+2,x^1} \ldots + P.y_{i+n-1,x^1} + q.y_{i+n,x^1}$$
$$+ B^1.y_{i,x^1+1} + C^1.y_{i+1,x^1+1} + \&c.$$
$$+ C^{11}.y_{i,x^1+2} + \&c.$$
$$+ \&c.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ y_{i,x^1+n}.$$

Il eſt viſible que dans cette intégrale, les quantités y_{0,x^1}, y_{1,x^1}, y_{2,x^1}, ... y_{n-1,x^1} ſont les n fonctions arbitraires qu'introduit l'intégration de l'équation $\nabla y_{i,x^1} = 0$; pour les déterminer, il faut connoître immédiatement, ou du moins pouvoir conclure des conditions du Problème, les n premiers rangs verticaux de la Table ſuivante,

$$\begin{array}{l} y_{0,0},\ y_{1,0},\ y_{2,0},\ y_{3,0}\ \ldots\ldots\ y_{x,0},\ y_{x+1,0}\ \ldots\ldots\ y_{\infty,0} \\ y_{0,1},\ y_{1,1},\ y_{2,1},\ y_{3,1}\ \ldots\ldots\ y_{x,1},\ y_{x+1,1}\ \ldots\ldots\ y_{\infty,1} \\ y_{0,2},\ y_{1,2},\ y_{2,2},\ y_{3,2}\ \ldots\ldots\ y_{x,2},\ y_{x+1,2}\ \ldots\ldots\ y_{\infty,2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{0,x^1},\ y_{1,x^1},\ y_{2,x^1},\ y_{3,x^1}\ \ldots\ldots\ y_{x,x^1},\ y_{x+1,x^1}\ \ldots\ldots\ y_{\infty,x^1} \end{array} \quad ;(Q)$$

&c.

REMARQUE.

DANS un grand nombre de Problèmes, & principalement dans ceux qui concernent l'analyſe des haſards, les n premiers rangs verticaux ſont des ſuites récurrentes dont la loi eſt connue; dans ce cas, y_{0,x^1}, y_{1,x^1}, &c. ſont données par des termes de la forme $A.p^{x^1}$; ſuppoſons conſéquemment que l'expreſſion de y_{0,x^1} renferme le terme $A.p^{x^1}$, la partie correſpondante de $\Sigma.M^{(r)}.y_{0,x^1+r}$ ſera

$$A.p^{x^1}.\{M^0 + M^{(1)}.p + M^{(2)}.p^2 + M^{(3)}.p^3 \ldots + M^{(i)}.p^i\};$$

mais $M^{(0)} + \frac{M^{(1)}}{t^1} + \frac{M^{(2)}}{t^{1^2}} \ldots + \frac{M^{(i)}}{t^{1^i}}$ eſt le développement de $b.Z^{(0)}_{i-n+1} + c.Z^{(0)}_{i-n+2} + \&c.$

ſuivant les puiſſances de $\frac{1}{t^{i}}$; en changeant donc dans cette dernière quantité $\frac{1}{t^{i}}$ en p, & nommant P ce qu'elle devient alors, on aura $A.P.p^{x'}$ pour la partie de $\Sigma.M^{(r)}.y_{0,x'+r}$, qui répond au terme $A.p^{x'}$. Il ſuit de-là, que ſi la valeur de $y_{0,x'}$ eſt égale à $A.p^{x'} + A'.p'^{x'} + A''.p''^{x'} +$ &c. & que l'on nomme P', P'', &c. ce que devient P, en y changeant ſucceſſivement p en p', p'', &c. on aura

$$\Sigma.M^{(r)}.y_{0,x'+r} = A.P.p^{x'} + A'.P'.p'^{x'} + A''.P''.p''^{x'} + \&c.$$

On trouvera pareillement que ſi la valeur de $y_{1,x'}$ eſt exprimée par $B.q^{x'} + B'.q'^{x'} + B''.q''^{x'} +$ &c. & que l'on nomme Q, Q', Q'', &c. ce que devient la quantité $cZ^{(0)}_{i-n+1} + eZ^{(0)}_{i-n+2} +$ &c. lorſqu'on y change ſucceſſivement $\frac{1}{t^{i}}$ en q, q', q'', &c. on aura

$$\Sigma.M_1^{(r-1)}.y_{1,x'+r-1} = BQ.q^{x'} + B'Q'.q'^{x'} + B''Q''.q''^{x'} + \&c.$$

& ainſi de ſuite; on aura ainſi l'expreſſion de $y_{i,x'}$ la plus ſimple à laquelle on puiſſe parvenir.

Si l'on a $\nabla^{2}.y_{x,x'} = 0$, on aura, en faiſant $x = 0$ dans l'expreſſion générale de $y_{x+i,x'}$ de l'*article précédent*,

$$\begin{aligned}
y_{i,x'} = {} & M.y_{0,x'} + M^{(1)}.y_{0,x'+1} + \&c. \ldots\ldots \\
& \ldots\ldots + M^{(i)}.y_{0,x'+i} \\
& + N.\nabla.y_{0,x'} + N^{(1)}.\nabla.y_{0,x'+1} + \&c. \\
& + M_1.y_{1,x'} + M_1^{(1)}.y_{1,x'+1} + \&c. \ldots\ldots \\
& \ldots\ldots + M_1^{(i-1)}.y_{1,x'+i-1} \\
& + N_1.\nabla.y_{1,x'} + N_1^{(1)}.\nabla.y_{1,x'+1} + \&c. \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + M_{n-1}.y_{n-1,x'} + M_{n-1}^{(1)}.y_{n-1,x'+1} \ldots\ldots \\
& \ldots\ldots + M_{n-1}^{(i-n+1)}.y_{n-1,x'+i-n+1} \\
& + N_{n-1}.\nabla.y_{n-1,x'} + \&c.
\end{aligned}$$

$y_{0,x'}$, $y_{1,x'}$ ... $y_{n-1,x'}$, $\nabla . y_{0,x'}$, $\nabla . y_{1,x'}$ ... $\nabla . y_{n-1,x'}$ étant les $2n$ fonctions arbitraires de l'intégrale de l'équation $\nabla^2 . y_{i,x'} = 0$; on aura de la même manière, les intégrales des équations $\nabla^3 . y_{i,x'} = 0$; $\nabla^4 . y_{i,x'} = 0$, &c.

J'ai nommé ailleurs *(voyez les Tomes VI & VII des Mémoires des Savans Étrangers)* les séries formées d'après l'équation $\nabla^r . y_{i,x} = 0$, *suites récurrorécurrentes;* elles diffèrent des suites récurrentes, en ce que dans celles-ci les termes ne sont fonctions que d'une seule variable : ainsi tous leurs termes dans la *Table (Q),* sont ou dans un même rang vertical, ou dans un même rang horizontal, ou sur une même droite inclinée à l'horizon d'une manière quelconque; au lieu que les termes d'une suite *récurrorécurrente* étant fonctions de deux variables, remplissent toute l'étendue de la *Table (Q),* & forment une surface, de sorte que les quantités arbitraires qui dans le cas des suites récurrentes, sont déterminées par autant de points de la ligne sur laquelle leurs termes sont disposés, se déterminent ici par des lignes droites ou par des polygones placés arbitrairement dans la Table précédente. L'équation qui exprime la loi d'une suite récurrente est aux différences finies; celle qui exprime la loi d'une suite *récurrorécurrente* est aux différences finies partielles, & son intégrale renferme un nombre de fonctions arbitraires égal au degré de cette équation.

XVII.

La valeur de $y_{i,x'}$ dans la formule (λ) de l'*article précédent*, dépendant de la connoissance de $M^{(r)}$, $M_1^{(r-1)}$, &c. il est visible que ces quantités seront connues lorsque l'on aura le coëfficient de $\frac{1}{t^{x'}}$ dans le développement de $Z^{(0)}_{i-n+1}$; tout se réduit donc à déterminer ce coëfficient; or on a par l'*article V*,

$$Z_i^{(0)} = -\frac{1}{a \,.\, \alpha^{i+1} \,.\, (\alpha - \alpha') \,.\, (\alpha - \alpha'') \,.\, \&c.},$$

$$-\frac{1}{a \,.\, \alpha'^{i+1} \,.\, (\alpha' - \alpha) \,.\, (\alpha' - \alpha'') \,.\, \&c.},$$

$$-\frac{1}{a \,.\, \alpha''^{i+1} \,.\, (\alpha'' - \alpha) \,.\, (\alpha'' - \alpha') \,.\, \&c.},$$

$$- \&c.$$

$\alpha, \alpha', \alpha''$, &c. étant fonctions de $\frac{1}{t^1}$. Si l'on fait $\frac{1}{t^r} = s$, & que l'on différencie l'expression précédente de $Z_i^{(0)}$, n fois de suite par rapport à s, on aura $n + 1$ équations au moyen desquelles en éliminant les n quantités $\alpha^i, \alpha'^i, \alpha''^i$, &c. on parviendra à une équation entre $Z_i^{(0)}$, $\frac{\partial \,.\, Z_i^{(0)}}{\partial s}$, $\frac{\partial^2 \,.\, Z_i^{(0)}}{\partial s^2}$, &c. dont les coëfficiens seront fonctions de α^1, α^{11}, &c. & de leurs différences : or il est clair que $\alpha, \alpha^1, \alpha^{11}$, &c. doivent entrer de la même manière dans ces coëfficiens; on pourra donc, par les méthodes connues, les déterminer en fonctions rationnelles des coëfficiens de l'équation qui donne les valeurs de α, α^1, &c. & des différences de ces coëfficiens, & par conséquent en fonctions rationnelles de s; en faisant ensuite disparoître les dénominateurs de ces fonctions, on aura une équation linéaire entre $Z_i^{(0)}$ & ses différentielles, dont les coëfficiens seront des fonctions rationnelles & entières de s, ou, ce qui revient au même, de $\frac{1}{t^r}$. Cela posé, considérons un terme quelconque de cette équation, tel que $\frac{K}{t^{rm}} \,.\, \frac{\partial^\mu \,.\, Z_i^{(0)}}{\partial s^\mu}$, & nommons λ, le coëfficient de $\frac{1}{t^{r r}}$ dans le développement de $Z_i^{(0)}$; ce coëfficient, dans le développement de $\frac{K}{t^{rm}} \,.\, \frac{\partial^\mu \,.\, Z_i^{(0)}}{\partial s^\mu}$, sera $K \,.\, (r - m + \mu)$,

$(r - m + \mu - 1) . (r - m + \mu - 2) \ldots \ldots$ $\ldots\ldots (r - m) . \lambda_{r-m+\mu}$; en repaſſant ainſi des fonctions génératrices à leurs variables correſpondantes, l'équation précédente entre $Z^{(0)}_{i-n+1}$ & ſes différences, donnera une équation entre λ_r, λ_{r+1}, &c. dont les coëfficiens ſont variables, & en l'intégrant, on aura la valeur de λ_r.

Il ſuit de-là que l'intégration de toute équation linéaire aux différences finies partielles dont les coëfficiens ſont conſtans, dépend 1.° de l'intégration d'une équation linéaire aux différences finies dont les coëfficiens ſont variables; 2.° d'une intégrale *définie;* je nomme ainſi toute intégrale priſe depuis une valeur déterminée de la variable juſqu'à une autre valeur déterminée. L'intégrale définie dont dépend la valeur de $y_{i,x}$ dans la formule (λ), eſt relative à r, & doit s'étendre depuis $r = 0$ juſqu'à $r = i$. Relativement aux équations différentielles du premier ordre, on a

$$Z_i^{(0)} = - \frac{1}{a . \alpha^{i+1}};$$

on a de plus,

$$a = A + B' s,$$

$$\alpha = - \frac{B}{a},$$

ce qui donne

$$Z_i^{(0)} = - \frac{(A + B' s)^i}{(- B)^{i+1}};$$

d'où l'on tire cette équation différentielle,

$$0 = \frac{\partial Z_i^{(0)}}{\partial s} . (A + B' s) - i B' . Z_i^{(0)},$$

ce qui donne l'équation aux différences finies,

$$0 = A (r + 1) . \lambda_{r+1} + B' r . \lambda_r - i B' \lambda_r;$$

on a enſuite dans ce cas,

$$M^{(r)} = B . \lambda_r;$$

la formule (λ) de l'*article précédent*, deviendra donc

$$y_{i,x'} = B.\Sigma.\lambda_r.y_{0,x'+r},$$

ce fera l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles,

$$0 = Ay_{i,x'} + B.y_{i+1,x'} + B'.y_{i,x'+1},$$

pourvu que l'intégrale foit prife depuis $r = 0$, jufqu'à $r = i + 1$, & que la conftante arbitraire de la valeur de λ_r, foit telle que $\lambda_0 = - \frac{A^i}{(-B)^{i+1}}$.

En paffant du fini à l'infiniment petit, la méthode précédente donnera l'intégrale des équations linéaires aux différences infiniment petites partielles dont les coëfficiens font conftans, 1.° en intégrant une équation linéaire aux différences infiniment petites; 2.° au moyen d'intégrales définies; ce qui donne l'intégration de ces équations dans une infinité de cas qui fe refufent aux méthodes connues; mais comme le paffage du fini à l'infiniment petit peut offrir ici quelques difficultés, j'ai préféré de chercher une méthode directement applicable aux équations linéaires aux différences infiniment petites partielles, & j'ai trouvé la fuivante qui a l'avantage de s'étendre aux équations linéaires dont les coëfficiens font variables. Je me bornerai à confidérer les équations différentielles du fecond ordre, comme étant celles qui fe préfentent le plus fréquemment dans l'application de l'analyfe aux queftions phyfiques.

XVIII.

TOUTES les équations linéaires aux différences infiniment petites partielles du fecond ordre, peuvent être mifes fous cette forme,

$$0 = \left(\frac{\partial\partial u}{\partial s \partial s'}\right) + m\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + n\left(\frac{\partial u}{\partial s'}\right) + lu \; (S);$$

m, n & l étant des fonctions quelconques données de s & de s',

& si l'on nomme $\varphi_1(s)$, l'intégrale $\int \partial s \,.\, \varphi(s)$; $\varphi_2(s)$, l'intégrale $\int \partial s \,.\, \varphi_2(s)$; $\varphi_3(s)$, l'intégrale $\int \partial s \,.\, \varphi_2(s)$, & ainsi de suite; si l'on nomme pareillement $\psi_1(s')$, l'intégrale $\int \partial s' \,.\, \psi(s')$; $\psi_2(s')$, l'intégrale $\int \partial s' \,.\, \psi_1(s')$; $\psi_3(s')$, l'intégrale $\int \partial s' \,.\, \psi_2(s')$, & ainsi de suite, la valeur de u peut être exprimée par une suite de cette forme,

$$u = A \,.\, \varphi_1(s) + A^{(1)} \,.\, \varphi_2(s) + A^{(2)} \,.\, \varphi_3(s) + A^{(3)} \,.\, \varphi_4(s) + \&c. + B \,.\, \psi_1(s') + B^{(1)} .\, \psi_2(s') + B^{(2)} .\, \psi_3(s') + B^{(3)} .\, \psi_4(s') + \&c.$$

$\varphi(s)$ & $\psi(s')$ étant deux fonctions arbitraires, l'une de s, & l'autre de s'; *(voyez sur cela les Mémoires de l'Académie pour l'année 1773, page 355 & suiv.)*. Cela posé, si l'on substitue cette valeur de u dans l'équation (S), & que l'on compare séparément les termes multipliés par $\varphi(s)$, $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, &c. $\psi(s)$, $\psi_1(s')$, $\psi_2(s')$, &c. on aura pour déterminer A, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, &c. B, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, &c. les équations suivantes,

$$0 = \left(\frac{\partial A}{\partial s'}\right) + mA;$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial s'}\right) + mA^{(1)} + \left(\frac{\partial\partial A}{\partial s \partial s'}\right) + m\left(\frac{\partial A}{\partial s}\right) + n\left(\frac{\partial A}{\partial s'}\right) + l.A \\ 0 &= \left(\frac{\partial A^{(2)}}{\partial s'}\right) + mA^{(2)} + \left(\frac{\partial\partial A}{\partial s \partial s'}\right) + m\left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial s}\right) + n\left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial s'}\right) + l.A^{(1)} \end{aligned}\right\}; (\gamma)$$

&c.

$$0 = \left(\frac{\partial B}{\partial s}\right) + nB;$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial s}\right) + nB^{(1)} + \left(\frac{\partial\partial B}{\partial s \partial s'}\right) + m\left(\frac{\partial B}{\partial s}\right) + n\left(\frac{\partial B}{\partial s'}\right) + l.B \\ 0 &= \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial s}\right) + nB^{(2)} + \left(\frac{\partial\partial B^{(1)}}{\partial s \partial s'}\right) + m\left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial s}\right) + n\left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial s'}\right) + l.B^{(1)} \end{aligned}\right\}; (\gamma')$$

&c.

Lorsqu'en satisfaisant à ces équations, on parvient à trouver $A^{(\mu)} = 0$, ou $B^{(\mu)} = 0$, μ étant un nombre entier

positif, alors u peut toujours s'exprimer en termes finis, en n'ayant égard qu'aux seules variables s & s' de l'équation; j'ai donné dans les Mémoires cités une méthode générale & fort simple, pour avoir dans ce cas l'intégrale complète de cette équation; mais si l'une ou l'autre des deux équations $A^{(\mu)} = 0$, & $B^{(\mu)} = 0$, ne peut avoir lieu, il faut nécessairement, pour avoir l'expression de u en termes finis, y introduire une nouvelle variable de la manière suivante.

Pour cela, nous observerons que si l'on fait commencer l'intégrale $\int \partial s . \varphi(s)$, lorsque $s = 0$, on aura

$$\int \partial s . \varphi(s) = \partial s . \{\varphi(0) + \varphi(\partial s) + \varphi(2\partial s) + \varphi(3\partial s) \ldots \\ \ldots + \varphi(r\partial s) + \varphi[(r+1).\partial s] \ldots + \varphi(s)\};$$

donc si l'on nomme T la suite

$$\varphi(0) + t.\varphi(\partial s) + t^2.\varphi(2\partial s) + t^3.\varphi(3\partial s) \ldots \\ \ldots + t^r.\varphi(r\partial s) + t^{r+1}.\varphi[(r+1).\partial s] \ldots + t^{\frac{s}{\partial s}}.\varphi(s),$$

$\int \partial s . \varphi(s)$ ou $\varphi_1(s)$ sera égal au coëfficient de $t^{\frac{s}{\partial s}}$ dans le développement de la fonction $\frac{T.\partial s}{1-t}$; il est aisé d'en conclure, que $\varphi_2(s)$ sera égal au coëfficient de $t^{\frac{s}{\partial s}}$ dans le développement de $\frac{T\partial s^2}{(1-t)^2}$, & généralement que $\varphi_\mu.(s)$ sera égal au coëfficient de $t^{\frac{s}{\partial s}}$ dans le développement de $\frac{T.\partial s^\mu}{(1-t)^\mu}$; d'ailleurs, il est visible que le coëfficient de $\varphi(r\partial s)$ dans $\varphi_\mu.(s)$ est égal au coëfficient de $t^{\frac{s}{\partial s}-r}$ dans le développement de $\frac{\partial s^\mu}{(1-t)^\mu}$, & par conséquent égal à

$$\frac{(\frac{s}{\partial s} - r + 1).(\frac{s}{\partial s} - r + 2).(\frac{s}{\partial s} - r + 3)\ldots(\frac{s}{\partial s} - r + \mu - 1).\partial s^{\mu}}{1.2.3\ldots\ldots(\mu - 1)};$$

Suppofons r infini & égal à $\frac{z}{\partial s}$, nous aurons $\frac{(s-z)^{\mu-1}.\partial s}{1.2.3\ldots(\mu-1)}$ pour ce coëfficient; d'où il fuit que le coëfficient de $\varphi(r\partial s)$ ou $\varphi(z)$ dans l'expreffion de u, fera

$$\partial s.\left\{\begin{array}{l} A + A^{(1)}.(s-z) + \frac{A^{(2)}}{1.2}.(s-z)^2 + \frac{A^{(3)}}{1.2.3}.(s-z)^3 \\ \qquad + \frac{A^{(4)}}{1.2.3.4}(s-z)^4 + \&c. \end{array}\right\}$$

donc fi l'on nomme $\Gamma.(s-z)$ la fomme de la fuite

$$A + A^{(1)}.(s-z) + \frac{A^{(2)}}{1.2}.(s-z)^2 + \frac{A^{(3)}}{1.2.3}.(s-z)^3 + \&c.$$

& que l'on fuppofe $\partial s = \partial z$, on aura $\int \partial z.\Gamma.(s-z).\varphi(z)$ égal à la fuite

$$A.\varphi_1.(s) + A^{(1)}.\varphi_2.(s) + A^{(2)}.\varphi_3.(s) + A^{(3)}.\varphi_4.(s) + \&c.$$

pourvu que l'intégrale foit prife depuis $z = 0$ jufqu'à $z = s$.

Si l'on nomme pareillement $\Pi.(s^1 - z)$, la fomme de la fuite

$$B + B^{(1)}.(s^1 - z) + \frac{B^{(2)}}{1.2}.(s^1-z)^2 + \frac{B^{(3)}}{1.2.3}.(s^1-z)^3 + \&c.$$

on trouvera, par le même procédé, que $\int \partial z.\Pi.(s^1-z).\psi(z)$ eft égal à la fuite

$$B.\psi_1.(s^1) + B^{(1)}.\psi_2.(s^1) + B^{(2)}.\psi_3.(s^1) + \&c.$$

pourvu que l'intégrale foit prife depuis $z = 0$ jufqu'à $z = s^1$; on aura donc

$$u = \int \partial z.\Gamma.(s-z).\varphi(z) + \int \partial z.\Pi.(s^1-z).\psi(z),$$

l'intégrale du premier terme étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s$, & celle du second terme étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s'$. On peut observer ici que les fonctions $\Gamma.(s - z)$, & $\Pi.(s' - z)$, sont autant de valeurs particulières qui satisfont pour u, à l'équation proposée aux différences partielles. En effet, il est clair, par la nature des valeurs de A, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, &c. que si l'on substitue dans cette équation, au lieu de u, la suite

$$A + A^{(1)}.(s - z) + \frac{A^{(2)}}{1.2}.(s - z)^2 + \&c.$$

z étant regardé comme constant, elle sera satisfaite. Mais parmi toutes les valeurs particulières de u, qui renferment une constante arbitraire z, il faut choisir pour $\Gamma.(s - z)$ celle qui donne $0 = (\frac{\partial u}{\partial s'}) + mu$, lorsque $z = s$; parce qu'alors u se réduit à A, & que l'on doit avoir $0 = (\frac{\partial A}{\partial s'}) + mA$; il faut pareillement choisir pour $\Pi.(s' - z)$ une valeur particulière de u, qui renferme une constante arbitraire z, & dans laquelle on ait $0 = (\frac{\partial u}{\partial s}) + nu$, lorsque $z = s'$, parce que dans ce cas, u se réduit à B, & que l'on doit avoir $0 = (\frac{\partial B}{\partial s}) + nB$. On peut parvenir directement à ces résultats, de la manière suivante.

Supposons que l'intégrale $\int p\,\partial z.\varphi(z)$, prise depuis z égal à une constante quelconque jusqu'à $z = s$, soit une valeur particulière de u; on aura dans ce cas,

$$(\frac{\partial u}{\partial s'}) = \int(\frac{\partial p}{\partial s'}).\partial z.\varphi(z),$$

$$(\frac{\partial u}{\partial s}) = \int(\frac{\partial p}{\partial s}).\partial z.\varphi(z) + P.\varphi(s),$$

P étant

P étant ce que devient p, lorſqu'on y fait $z = s$; de-là, on tirera

$$\left(\frac{\partial\partial u}{\partial s\partial s'}\right) = \int\left(\frac{\partial\partial p}{\partial s\partial s'}\right).\partial z.\varphi(z) + \left(\frac{\partial P}{\partial s'}\right).\varphi(s);$$

en ſubſtituant ces valeurs dans l'équation (S) aux différences partielles, on aura

$$0 = \left\{\left(\frac{\partial P}{\partial s'}\right) + mP\right\}.\varphi(s)$$
$$+ \int\partial z.\varphi(z).\left\{\left(\frac{\partial\partial p}{\partial s\partial s'}\right) + m\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) + n\left(\frac{\partial p}{\partial s'}\right) + lp\right\},$$

ce qui donne, en égalant ſéparément à zéro, les termes affectés du ſigne intégral,

$$0 = \left(\frac{\partial P}{\partial s'}\right) + mP,$$

$$0 = \left(\frac{\partial\partial p}{\partial s\partial s'}\right) + m.\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) + n.\left(\frac{\partial p}{\partial s'}\right) + l.p.$$

On voit ainſi que ſi l'on a deux valeurs particulières de u, repréſentées par p & p', qui renferment une conſtante arbitraire z, & qui ſoient telles que l'on ait

$$0 = \left(\frac{\partial P}{\partial s'}\right) + mP,$$

$$0 = \left(\frac{\partial P'}{\partial s}\right) + nP',$$

P étant ce que devient p lorſqu'on y fait $z = s$, & P' étant ce que devient p' lorſqu'on y fait $z = s'$, on aura pour l'expreſſion complète de u,

$$u = \int p\,\partial z.\varphi(z) + \int p'\partial z.\psi(z),$$

$\varphi(z)$ & $\psi(z)$ étant deux fonctions arbitraires de z, & l'intégrale du premier terme étant priſe depuis z égal à une conſtante quelconque que nous ſupppſerons zéro, juſqu'à $z = s$; celle du ſecond terme étant priſe depuis $z = 0$ juſqu'à $z = s'$.

Si l'on change z en st dans le terme $\int p\,\partial z.\varphi(z)$, & que l'on nomme q ce que devient p par ce changement, on aura

$$\int p\,\partial z.\varphi(z) = \int qs.\partial t.\varphi(st),$$

& comme l'intégrale relative à z doit être prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s$, il est clair que l'intégrale relative à t doit être prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$. Si l'on nomme pareillement q^{1} ce que devient p^{1}, lorsqu'on y change z en $s^{1}t$, on aura

$$\int p^{1}\partial z.\psi(z) = \int q^{1}s^{1}\partial t.\psi(s^{1}t),$$

l'intégrale relative à t étant prise encore depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$; on peut conséquemment donner à u cette forme,

$$u = \int \partial t.\{sq.\varphi(st) + s^{1}q^{1}.\psi(s^{1}t)\},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$.

Si l'on nomme K l'intégrale $\int p\,\partial z.\varphi(z)$, prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \infty$; cette intégrale prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s$, sera visiblement égale à $K - \int p\,\partial z.\varphi(z)$, cette dernière intégrale étant prise depuis $z = s$ jusqu'à $z = \infty$; donc si l'on fait $z = s + z^{1}$, & que l'on nomme r ce que devient p par ce changement, on aura

$$\int p\,\partial z.\varphi(z) = K - \int r\,\partial z^{1}.\varphi(s + z^{1}),$$

l'intégrale relative à z étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s$, & l'intégrale relative à z^{1} étant prise depuis $z^{1} = 0$ jusqu'à $z^{1} = \infty$. Si l'on nomme pareillement K^{1} l'intégrale $\int p^{1}\partial z.\varphi(z)$ prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \infty$; que l'on fasse $z = s^{1} + z^{1}$, & que l'on nomme r^{1} ce que devient p^{1} par ce changement, on aura

$$\int p^{1}\partial z.\psi(z) = K^{1} - \int r^{1}\partial z^{1}.\psi(s^{1} + z^{1}),$$

l'intégrale relative à z étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s^{1}$,

& l'intégrale relative à z' étant prise depuis $z' = 0$ jusqu'à $z' = \infty$; on aura donc

$$u = K + K' - \int \partial z' . \{ r . \varphi (s + z') + r' \psi (s' + z') \}.$$

Les fonctions $\varphi (s + z')$ & $\psi (s' + z')$ étant arbitraires & pouvant même être supposées discontinues, on peut sans nuire à la généralité de cette valeur de u, les suppposer telles que l'on ait $K + K' = 0$; on aura donc, en changeant le signe de ces fonctions,

$$u = \int \partial z . \{ r . \varphi (s + z') + r' . \psi (s' + z') \}$$

l'intégrale étant prise depuis $z' = 0$ jusqu'à $z' = \infty$.

Ces différentes formes que l'on peut donner à u, ont chacune des avantages particuliers, suivant les différens Problèmes que l'on se propose de résoudre; on verra ci-après (*article XX*) un usage de la dernière, dans la théorie du son; mais on doit observer qu'elles sont toutes dépendantes d'intégrales définies, & qu'elles ne peuvent être ramenées à des intégrales indéfinies, que dans le cas où l'une ou l'autre des quantités p & p' est une fonction rationnelle & entière de z.

Toute la difficulté de l'intégration des équations linéaires aux différences partielles du second ordre, se réduit ainsi à déterminer ces quantités; c'est ce qui paroît très-difficile en général : nous nous bornerons conséquemment à considérer quelques cas particuliers qui sont relatifs à plusieurs Problèmes intéressans que l'on n'a pu résoudre encore que d'une manière particulière.

XIX.

SUPPOSONS d'abord m, n & l constans dans l'équation (S), on satisfera aux équations (γ) & (γ') de l'*article précédent*, en faisant

$$A = e^{-ms' - ns},$$

$$A^{(1)} = e^{-ms' - ns} . (mn - l) . s',$$

$$A^{(2)} = e^{-ms' - ns} . \frac{(mn - l)^2}{1.2} . s'^2,$$

. . . .

$$A^{(\mu)} = e^{-ms^1 - ns} \cdot \frac{(mn - l)}{1.2.3\ldots\mu} \cdot s^{1\mu},$$

&c.

$$B = e^{-ms^1 - ns},$$

$$B^{(1)} = e^{-ms^1 - ns} \cdot (mn - l) \cdot s,$$

$$B^{(2)} = e^{-ms^1 - ns} \cdot \frac{(mn - l)^2}{1.2} \cdot s^2,$$

. . . .

$$B^{(\mu)} = e^{-ms^1 - ns} \cdot \frac{(mn - l)^\mu}{1.2.3\ldots\mu} \cdot s^\mu,$$

&c.

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt l'unité; on aura ainſi

$$\Gamma \cdot (s - z) = e^{-ms^1 - ns} \cdot \{1 + (mn - l) \cdot s^1 \cdot (s - z) + \frac{(mn - l)^2}{1.2} \cdot s^{1^2} \cdot (s - z)^2 + \frac{(mn - l)^3}{1.2.3} \cdot s^{1^3} \cdot (s - z)^3 + \&c.\}$$

en ſorte que $\Gamma \cdot (s - z)$ eſt égal à une fonction de $s^1 \cdot (s - z)$, multipliée par $e^{-ms^1 - ns}$; ſoit y cette fonction, & nommons θ la quantité $s^1 \cdot (s - z)$; $e^{-ms^1 - ns} \cdot y$ ſera, par ce précède, une intégrale particulière de l'équation propoſée aux différences partielles; on la ſubſtituera donc pour u dans cette équation, & l'on obſervera que dans ce cas

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) = -ne^{-ms^1 - ns} \cdot y + e^{-ms^1 - ns} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial s}\right);$$

or on a $\left(\frac{\partial \theta}{\partial s}\right) = s^1$; partant

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) = e^{-ms^1 - ns} \cdot \{-ny + s^1 \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\};$$

on aura pareillement

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s^{1}}\right) = e^{-ms^{1}-ns} \cdot \left\{ -my + (s-z) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) \right\},$$

$$\left(\frac{\partial\partial u}{\partial s . \partial s^{1}}\right) = e^{-ms^{1}-ns} \cdot \left\{ mn . y - n(s-z) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) \right.$$

$$\left. - m . s^{1} . \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + \theta . \left(\frac{\partial\partial y}{\partial \theta^{2}}\right) \right\}.$$

Si l'on ſubſtitue ces valeurs dans l'équation (S), on aura celle-ci aux différences ordinaires,

$$0 = (l - mn) . y + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + \theta . \left(\frac{\partial\partial y}{\partial \theta^{2}}\right),$$

& il faudra déterminer les deux conſtantes arbitraires de ſon intégrale, de manière que l'on ait $y = 1$, & $\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) = mn - l$ lorſque $\theta = 0$. Soit $\perp(\theta)$ ce que devient cette intégrale, on aura

$$\Gamma . (s - z) = e^{-ms^{1}-ns} . \perp . \{ s^{1} . (s - z) \};$$

il eſt aiſé de voir que l'on aura pareillement

$$\Pi . (s^{1} - z) = e^{-ms^{1}-ns} . \perp . [s . (s^{1} - z)];$$

partant

$$u = e^{-ms^{1}-ns} . \left\{ \begin{array}{l} \int \partial z . \perp . [s^{1} . (s - z)] . \varphi(z) \\ + \int \partial z . \perp . [s . (s^{1} - z)] . \psi(z) \end{array} \right\}$$

l'intégrale du premier terme étant priſe depuis $z = 0$ juſqu'à $z = s$, & l'intégrale du ſecond terme étant priſe depuis $z = 0$ juſqu'à $z = s^{1}$; en effet, ſi l'on ſubſtitue cette valeur de u dans l'équation propoſée aux différences partielles, on s'aſſurera facilement qu'elle y ſatisfait; mais pour faire cette ſubſtitution, on doit obſerver en général que ſi l'intégrale $\int u \partial z$ doit être priſe depuis $z = 0$ juſqu'à $z = s$, ſa différence priſe par

rapport à s, eſt $\partial s \cdot \int (\frac{\partial u}{\partial s}) \partial z + U \partial s$, U étant ce que devient u lorſqu'on y ſuppoſe $z = s$.

Si l, m & n étant toujours ſuppoſés conſtans, on a $l - mn = 0$, on aura $y = 1$, & l'expreſſion de u deviendra

$$u = e^{-ms' - ns} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \int \partial z \cdot \varphi(z) \\ + \int \partial z \cdot \psi(z) \end{array} \right\} = e^{-ms' - ns} \cdot [\varphi_1 \cdot (s) + \psi_1 \cdot (s')],$$

en ſorte que la valeur de u eſt alors indépendante de toute intégrale définie; mais ce cas eſt le ſeul où cela puiſſe avoir lieu, & c'eſt ce qui réſulte pareillement de ce qui a été démontré dans les Mémoires de l'Académie, *année 1773, page 369.*

L'équation des cordes vibrantes dans un milieu réſiſtant comme la vîteſſe, eſt

$$a^2 \cdot (\frac{\partial \partial u}{\partial x^2}) = (\frac{\partial \partial u}{\partial t^2}) + b\,(\frac{\partial u}{\partial t}),$$

u étant l'ordonnée de la corde vibrante dont l'abſciſſe eſt x; t repréſentant le temps, & a & b étant deux conſtantes dépendantes, l'une de la groſſeur & de la tenſion de la corde, & l'autre de l'intenſité de la réſiſtance. Si l'on fait $at + x = s$, & $at - x = s'$, l'équation précédente deviendra

$$0 = (\frac{\partial \partial u}{\partial s . \partial s'}) + \frac{b}{4a} \cdot (\frac{\partial u}{\partial s}) + \frac{b}{4a} \cdot (\frac{\partial u}{\partial s'});$$

l'expreſſion précédente de u deviendra donc, en y ſubſtituant au lieu de s & de s', leurs valeurs $at + x$ & $at - x$,

$$u = e^{\frac{bt}{2}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \int \partial z \cdot \mathrm{I} \cdot [(at - x) \cdot (at + x - z)] \cdot \varphi(z) \\ + \int \partial z \cdot \mathrm{I} \cdot [(at + x) \cdot (at - x - z)] \cdot \psi(z) \end{array} \right\}$$

la première intégrale étant priſe depuis $z = 0$ juſqu'à $z = at + x$, & la ſeconde intégrale étant priſe depuis $z = 0$ juſqu'à $z = at - x$. On voit par-là que le

Problème des cordes vibrantes dépend alors de l'intégration de l'équation différentielle

$$0 = -\frac{b^2}{16a^2} \cdot y + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + \theta \cdot \left(\frac{\partial\partial y}{\partial \theta^2}\right);$$

on voit de plus qu'à cause du facteur $e^{-\frac{bt}{2}}$, l'ordonnée u de la corde vibrante diminue sans cesse & devient nulle après un temps infini, ce qui d'ailleurs est visible *a priori.*

X X.

Supposons encore dans l'équation générale *(S)* de l'*art. XVIII*, $m = \frac{f}{s+s^1}$, $n = \frac{g}{s+s^1}$ & $l = \frac{h}{(s+s^1)^2}$, en sorte que l'on ait à intégrer cette équation aux différences partielles,

$$0 = \left(\frac{\partial\partial u}{\partial s . \partial s^1}\right) + \frac{f}{s+s^1} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + \frac{g}{s+s^1} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial s^1}\right) + \frac{h \cdot u}{(s+s^1)^2}; \quad (T)$$

on s'assurera facilement que les valeurs suivantes satisfont aux équations (γ) & (γ^1) de l'article cité,

$$A = (s+s^1)^{-f},$$

$$A^{(1)} = \{f \cdot (1-g) + h\} \cdot \frac{A}{s+s^1},$$

$$2 \cdot A^{(2)} = \{(f+1) \cdot (2-g) + h\} \cdot \frac{A^{(1)}}{s+s^1},$$

$$3 \cdot A^{(3)} = \{(f+2) \cdot (3-g) + h\} \cdot \frac{A^{(2)}}{s+s^1},$$

. . . .

$$\mu \cdot A^{(\mu)} = \{(f+\mu-1) \cdot (\mu-g) + h\} \cdot \frac{A^{(\mu-1)}}{s+s^1},$$

&c.

$$B \;=\; (s + s')^{-g},$$

$$B^{(1)} = \{g \,.\, (1 - f) + h\} \,.\, \frac{B}{s + s'},$$

$$2 \,.\, B^{(2)} = \{(g + 1) \,.\, (2 - f) + h\} \,.\, \frac{B^{(1)}}{s + s'};$$

$$3 \,.\, B^{(3)} = \{(g + 2) \,.\, (3 - f) + h\} \,.\, \frac{B^{(2)}}{s + s'},$$

....

$$\mu \,.\, B^{(\mu)} = \{(g + \mu - 1) \,.\, (\mu - f) + h\} \,.\, \frac{B^{(\mu-1)}}{s + s'},$$

&c.

on aura ainſi

$$\Gamma.(s - z) = (s + s')^{-f} . \left\{ \begin{array}{c} 1 + \{f(1 - g) + h\} . \frac{s - z}{s + s'} \\ + \{(f + 1).(2 - g) + h\}.(\frac{s - z}{s + s'})^2 + \&c. \end{array} \right\}$$

donc ſi l'on fait $\frac{s - z}{s + s'} = \theta$, $\Gamma.(s - z)$ ſera égal à une fonction de θ, multipliée par $(s + s')^{-f}$. Nommons y cette fonction, en ſorte que $\Gamma.(s - z) = (s + s')^{-f}.y$; $(s + s')^{-f}.y$ ſera une valeur particulière de u, & l'on aura dans ce cas

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) = -f.(s + s')^{-f-1}.y + (s + s')^{-f}.\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right).\left(\frac{\partial \theta}{\partial s}\right);$$

or on a

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial s}\right) = \frac{1}{s + s'} - \frac{(s - z)}{(s + s')^2} = \frac{1}{s + s'} . (1 - \theta);$$

partant

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) = (s + s')^{-f-1} . \{(\frac{\partial y}{\partial \theta}).(1 - \theta) - fy\};$$

on

on trouvera pareillement

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s^{\prime}}\right) = -(s + s^{\prime})^{-f-1}.\left\{fy + \theta.\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\right\},$$

$$\left(\frac{\partial\partial u}{\partial s \partial s^{\prime}}\right) = (s + s^{\prime})^{-f-2}.\left\{\begin{array}{c} f.(f+1).y + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right).(2f\theta + 2\theta - f - 1) \\ -\theta.(1-\theta).\left(\frac{\partial\partial y}{\partial \theta^2}\right) \end{array}\right\}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation proposée aux différences partielles, on aura l'équation suivante aux différences ordinaires,

$$0 = \theta.(1-\theta).\left(\frac{\partial\partial y}{\partial \theta^2}\right) + \{\theta.(g-f-2)+1\}.\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + (fg - f - h).y; \ (a^{\prime})$$

il faudra déterminer les deux constantes arbitraires de son intégrale, de manière que l'on ait $y = 1$, & $\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) = f.(1-g) + h$, lorsque $\theta = 0$; en nommant donc $\bot.(\theta)$ ce que devient alors y, on aura

$$\Gamma.(s - z) = \frac{\bot.\left(\frac{s-z}{s+s^{\prime}}\right)}{(s+s^{\prime})^f}.$$

Si l'on change g en f, & réciproquement f en g dans l'équation $(a^{\prime})$, on aura

$$0 = \theta.(1-\theta).\left(\frac{\partial\partial y}{\partial \theta^2}\right) + \{\theta.(f-g-2)+1\}.\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + (fg - g - h).y; \ (b^{\prime})$$

& si l'on détermine les deux constantes arbitraires, de manière que l'on ait $y = 1$, & $\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) = g(1-f) + h$, lorsque $\theta = 0$; en nommant $\square.(\theta)$ ce que devient alors y, on aura

$$\Pi.(s^{\prime} - z) = \frac{\square.\left(\frac{s^{\prime}-z}{s+s^{\prime}}\right)}{(s+s^{\prime})^g}.$$

Les deux fonctions $\perp.(\theta)$ & $\square.(\theta)$, ont entr'elles une relation fort simple, au moyen de laquelle, lorsque l'une des deux sera connue, l'autre le sera pareillement : en effet, si dans l'équation (b^1), on fait $y^1 = (1 - \theta)^{f-g}.y$, on aura

$$0 = \theta.(1-\theta).\left(\frac{\partial\partial y^1}{\partial\theta^2}\right) + \{\theta.(g-f-2)+1\}.\left(\frac{\partial y^1}{\partial\theta}\right) + (fg-f-h).y^1;$$

équation qui est la même que l'équation (a^1). De plus, comme on doit avoir, relativement à l'équation (b^1), $y = 1$, & $\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right) = g - fg + h$, lorsque $\theta = 0$; on aura dans ce même cas, $y^1 = 1$, &

$$\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right) = \left(\frac{\partial y^1}{\partial\theta}\right) - (f-g).y^1 = g - fg + h,$$

ce qui donne $\left(\frac{\partial y^1}{\partial\theta}\right) = f - fg + h$; ainsi les deux constantes arbitraires de l'intégrale de l'équation en y^1, sont les mêmes que celles de l'intégrale de l'équation (a^1), ce qui donne $y^1 = \perp.(\theta)$; partant $\square.(\theta) = (1-\theta)^{f-g}.\perp(\theta)$; on a d'ailleurs, relativement à l'équation (b^1), $\theta = \frac{s^1 - z}{s + s^1}$; donc

$$\square.\left(\frac{s^1 - z}{s + s^1}\right) = \frac{(s+z)^{f-g}.\perp.\left(\frac{s^1 - z}{s+s^1}\right)}{(s+s^1)^{f-g}},$$

$$\text{\&} \quad \Pi.(s^1 - z) = \frac{(s+z)^{f-g}.\perp.\left(\frac{s^1 - z}{s+s^1}\right)}{(s+s^1)^{f}},$$

on aura conséquemment par l'*article XVIII*,

$$u = \frac{1}{(s+s^1)^f}.\left\{\begin{array}{l} \int\partial z.\perp.\left(\frac{s-z}{s+s^1}\right).\varphi(z) \\ + \int\partial z.(s+z)^{f-g}.\perp.\left(\frac{s^1-z}{s+s^1}\right).\psi(z) \end{array}\right\}; (V)$$

la première intégrale étant prise depuis $z = o$ jusqu'à $z = s$, & la seconde étant prise depuis $z = o$ jusqu'à $z = s^{1}$.

Si l'une ou l'autre des deux quantités $\daleth . (\frac{s - z}{s + s^{1}})$ & $\square . (\frac{s^{1} - z}{s + s^{1}})$, celle-ci, par exemple, $\daleth . (\frac{s - z}{s + s^{1}})$ est une fonction rationnelle & entière de z; alors l'expression de u, considérée relativement à la fonction arbitraire correspondante qui dans ce cas est $\varphi(z)$, sera exprimée par une suite finie de termes multipliés par les intégrales successives de $\varphi(s)$; car il est clair qu'alors $\int \partial z . \daleth . (\frac{s - z}{s + s^{1}}) \varphi(z)$ sera composé de termes de la forme $H . \int z^{\mu} \partial z . \varphi(z)$, μ étant un nombre entier positif: or on a en intégrant par parties,

$$\int z^{\mu} . \partial z . \varphi(z) = z^{\mu} . \varphi_{1}(z) - \mu . z^{\mu - 1} . \varphi_{2}(z) + \mu . (\mu - 1) . z^{\mu - 2} . \varphi_{3}(z) \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \pm 1 . 2 . 3 \ldots \mu . \varphi_{\mu + 1}(z) + C,$$

expression délivrée du signe $\int$, & dans laquelle on doit faire $z = s$. On voit ainsi que la partie de l'expression de u relative à la fonction arbitraire $\varphi(z)$, est indépendante non-seulement de toute intégrale définie, mais encore de toute espèce d'intégrale: or il résulte de ce que j'ai démontré dans les Mémoires cités de 1773, que l'expression complète de u est alors entièrement indépendante de toute intégrale définie, c'est-à-dire qu'elle peut être exprimée par des intégrales indéfinies uniquement relatives aux variables s & s^{1} de l'équation proposée. On peut s'en assurer encore très-aisément au moyen de la formule (V); car il est visible que l'intégrale

$$\int \partial z . (s + z)^{f - g} . \daleth . (\frac{s^{1} - z}{s + s^{1}}) . \psi(z)$$

sera dans ce cas réductible à des termes de cette forme,

$$H \int z^{\mu} \partial z . (s + z)^{f - g} . \psi(z).$$

μ étant un nombre entier poſitif ou zéro : or on peut par des intégrations par parties, réduire l'intégrale

$$\int z^{\mu} \partial z \cdot (s + z)^{f - g} \cdot \psi(z)$$

à des termes délivrés du ſigne $\int$, & à des intégrales de cette forme,

$$\int \partial z \cdot (s + z)^{r} \cdot \psi_{i}(z);$$

cette dernière intégrale devant être priſe depuis $z = 0$ juſqu'à $z = s'$, eſt évidemment égale à celle-ci,

$$\int \partial s' \cdot (s + s')^{r} \cdot \psi_{i}(s),$$

& par conſéquent indépendante de toute intégrale définie : on voit par-là comment l'intégrale

$$\int \partial z \cdot (s + z)^{f - g} \cdot \Gamma \cdot \left(\frac{s' - z}{s + s'}\right) \cdot \psi(z)$$

peut ſe réduire à des intégrales indéfinies, quoique le facteur

$$(s + z)^{f - g} \cdot \Gamma \cdot \left(\frac{s' - z}{s + s'}\right)$$

puiſſe ne pas être une fonction rationnelle & entière de z.

Maintenant la condition néceſſaire pour que l'expreſſion de $\Gamma \cdot \left(\frac{s - z}{s + s'}\right)$, réduite en ſérie, ſe termine, eſt que l'on ait $A^{(\mu)} = 0$, μ étant un nombre poſitif, ce qui donne

$$0 = (f + \mu - 1) \cdot (\mu - g) + h;$$

d'où l'on tire

$$\mu = \frac{1 + g - f \pm \sqrt{[(f + g - 1)^2 - 4h]}}{2}.$$

Lorſque l'une ou l'autre de ces deux valeurs de μ eſt zéro ou un nombre entier poſitif, alors $\Gamma \cdot \left(\frac{s - z}{s + s'}\right)$ eſt une

fonction rationnelle & entière de z; en changeant f en g & réciproquement, on aura

$$\mu = \frac{1 + f - g \pm \sqrt{[(f + g - 1)^2 - 4h]}}{2},$$

& si l'une ou l'autre de ces valeurs de μ est zéro ou un nombre entier positif, la valeur de $\square\ .\ (\frac{s' - z}{s + s'})$ sera une fonction rationnelle & entière de z; dans tous ces cas, l'expression de u ne dépendra d'aucune intégrale définie, autrement elle en sera nécessairement dépendante.

Si l'on nomme x la distance d'une molécule d'air à l'origine du son dans l'état d'équilibre, $x + u$ sa distance après le temps t, on aura

$$\left(\frac{\partial\partial u}{\partial t^2}\right) = a^2 \cdot \left(\frac{\partial\partial u}{\partial x^2}\right) + \frac{m a^2}{x} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{m a^2 u}{x^2},$$

a^2 étant un coëfficient constant dépendant de l'élasticité & de la densité de l'air, & m étant 0, ou 1, ou 2, suivant que l'on considère l'air ou avec une seule, ou avec deux, ou avec trois dimensions *(voyez sur cet objet les savantes Recherches de M. de la Grange sur le son, insérées dans le Tome II des Mémoires de la Société Royale de Thurin)*. Soit $x + at = s$; $x - at = s'$; l'équation précédente deviendra

$$0 = \left(\frac{\partial\partial u}{\partial s \partial s'}\right) + \frac{m}{2(s + s')} \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial s'}\right)\right] - \frac{m u}{(s + s')^2};$$

la formule *(V)* deviendra donc

$$u = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \cdot x^{\frac{m}{2}}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \int \partial z \cdot \text{J} \cdot \left(\frac{x + at - z}{2x}\right) \cdot \varphi(z) \\ + \int \partial z \cdot \text{J} \cdot \left(\frac{x - at - z}{2x}\right) \cdot \psi(z) \end{array} \right\}$$

la première intégrale étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = x + at$, & la seconde étant prise depuis $z = 0$

jusqu'à $z = x - at$. La fonction $\text{I}.\left(\frac{x \pm at - z}{2x}\right)$ est la valeur de y, dans l'équation différentielle,

$$0 = \theta.(1-\theta).\left(\frac{\partial\partial y}{\partial\theta^2}\right) + \theta.(1-2\theta).\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right) + \frac{m^2+2m}{4}.y,$$

dans laquelle $\theta = \frac{x \pm at - z}{2x}$, les deux constantes arbitraires de son intégrale devant se déterminer, en sorte que l'on ait $y = 1$, & $\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right) = -\frac{m}{4}.(2+m)$.

Si l'on a $m = 0$ ou $m = 2$, la valeur de y, ordonnée suivant les puissances de θ, se termine, & alors la valeur de u est indépendante de toute intégrale définie; mais lorsque $m = 1$, ce qui a lieu quand on ne considère l'air qu'avec deux dimensions, l'expression de u est nécessairement dépendante d'une intégrale définie.

Si l'on change dans $\text{I}.\left(\frac{x \pm at - z}{2x}\right)$, z en $x \pm at + z'$, on aura par l'*article XVIII*,

$$u = \frac{1}{2^{\frac{2}{m}}.x^{\frac{m}{2}}}.\int\partial z'.\text{I}.\left(-\frac{z'}{2x}\right).\{\varphi(x+at+z') + \psi(x-at+z')\},$$

l'intégrale étant prise depuis $z' = 0$ jusqu'à $z' = \infty$. Il résulte évidemment de cette valeur de u, que la molécule d'air dont elle exprime le dérangement, ne commence à s'ébranler que lorsque $x - at + z'$ est égal ou moindre que le rayon de la petite sphère agitée au commencement; d'où il suit que dans les trois cas où l'air a une ou deux ou trois dimensions, la vîtesse du son est la même, & se détermine par l'équation $t = \frac{x}{a}$; on voit ainsi que les formes précédentes des intégrales des équations aux différences partielles, ont le même avantage dans les questions physiques, que les formes connues jusqu'à présent.

Nous pourrions encore appliquer la méthode précédente à la recherche des vibrations des cordes inégalement épaisses, à la théorie du son dans des tuyaux d'une figure quelconque, & à plusieurs autres questions importantes; mais ces discussions nous écarteroient trop de notre objet principal.

X X I.

REVENONS présentement aux équations linéaires aux différences finies partielles: quoique les formules que nous avons données dans l'*article XVI*, pour les intégrer, aient la plus grande généralité, il y a cependant quelques cas où elles ne peuvent servir; ces cas ont lieu lorsque l'équation $z = 0$ donne l'expression de $\frac{1}{t}$ en $\frac{1}{t^1}$ par une suite infinie, ce qui arrive toutes les fois que dans la fonction z, la plus haute puissance de $\frac{1}{t}$ est multipliée par une fonction rationnelle & entière de $\frac{1}{t^1}$. Pour avoir alors l'expression de y_{x,x^1} en termes finis, il est nécessaire de recourir à quelques artifices d'analyse que nous allons exposer, en les appliquant à l'équation suivante,

$$\frac{1}{t.t^1} - \frac{a}{t^1} - \frac{b}{t} - c = 0;$$

cette équation donne

$$\frac{1}{t} = \frac{c + \frac{a}{t^1}}{\frac{1}{t^1} - b};$$

partant,

$$\frac{1}{t^x . t^{1x^1}} = \frac{(c + \frac{a}{t^1})^x}{t^{1x^1} . (\frac{1}{t^1} - b)^x}.$$

En développant par rapport aux puiſſances de $\frac{1}{t^{1}}$, le ſecond membre de cette équation, on auroit une ſuite infinie, ce qui donneroit $y_{x,\,x^{1}}$ en ſuite infinie; pour obvier à cet inconvénient, nous mettrons l'équation précédente ſous cette forme,

$$\frac{1}{t^{x}\,.\,t^{1\,x^{1}}} = \frac{\left(\frac{1}{t^{1}} - b + b\right)^{x^{1}}.\left[c + ab + a\left(\frac{1}{t^{1}} - b\right)\right]^{x}}{\left(\frac{1}{t^{1}} - b\right)^{x}};$$

Si l'on développe le ſecond membre de cette équation par rapport aux puiſſances de $\frac{1}{t^{1}} - b$, on aura

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^{x}\,.\,t^{1\,x^{1}}} = \Big\{ & \left(\tfrac{1}{t^{1}} - b\right)^{x^{1}} + x^{1}.b.\left(\tfrac{1}{t^{1}} - b\right)^{x^{1}-1} \\ & + \frac{x^{1}.(x^{1}-1)}{1.2}.b^{2}.\left(\tfrac{1}{t^{1}} - 1\right)^{x^{1}-2} + \&c. \Big\} \\ & \times \Big\{ a^{x} + x.(c + ab).\frac{a^{x-1}}{\frac{1}{t^{1}} - b} \\ & + \frac{x.(x-1)}{1.2}.(c+ab)^{2}.\frac{a^{x-2}}{\left(\frac{1}{t^{1}} - b\right)^{2}} + \&c. \Big\}\end{aligned}$$

Soit

$$V = a^{x};$$

$$V^{(1)} = x^{1}.b.a^{x} + x.(c + ab).a^{x-1};$$

$$V^{(2)} = \frac{x^{1}.(x^{1}-1)}{1.2}.b^{2}.a^{x} + x^{1}.x.b.(c+ab).a^{x-1} + \frac{x.(x-1)}{1.2}.(c+ab)^{2}.a^{x-2}$$

$$\begin{aligned}V^{(3)} = & \frac{x^{1}.(x^{1}-1).(x^{1}-2)}{1.2.3}.b^{3}.a^{x} + \frac{x^{1}.(x^{1}-1)}{1.2}.x.b^{2}.(c+ab).a^{x-1} \\ & + x^{1}.\frac{x.(x-1)}{1.2}.b.(c+ab)^{2}.a^{x-2} + \frac{x.(x-1).(x-2)}{1.2.3}.(c+ab)^{3}.a^{x-3};\end{aligned}$$

&c.

on

on aura

$$\frac{u}{t^x \cdot t'^{x'}} = u \cdot \left\{ \begin{array}{l} V \cdot \left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'} + V^{(1)} \cdot \left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'-1} \\ + V^{(2)} \cdot \left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'-2} \ldots\ldots + V^{(x')} \\ + \frac{V^{(x'+1)}}{\frac{1}{t'} - b} + \frac{V^{(x'+2)}}{\left(\frac{1}{t'} - b\right)^2} \ldots + \frac{V^{(x+x')}}{\left(\frac{1}{t'} - b\right)^x} \end{array} \right\}$$

or l'équation

$$\frac{1}{t \cdot t'} - \frac{a}{t'} - \frac{b}{t} - c = 0,$$

donne

$$\frac{1}{\frac{1}{t'} - b} = \frac{\frac{1}{t} - a}{c + ab};$$

partant

$$\frac{u}{t^x \cdot t'^{x'}} = u \cdot \left\{ \begin{array}{l} V \cdot \left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'} + V^{(1)} \cdot \left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'-1} \ldots\ldots + V^{(x')} \\ + \frac{V^{(x'+1)}}{c + ab} \cdot \left(\frac{1}{t} - a\right) + \frac{V^{(x'+2)}}{(c+ab)^2} \cdot \left(\frac{1}{t} - a\right)^2 \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + \frac{V^{(x+x')}}{(c+ab)^x} \cdot \left(\frac{1}{t} - a\right)^x \end{array} \right\}$$

Pour repaſſer maintenant des fonctions génératrices à leurs variables correſpondantes, nous obſerverons 1.° que le coëfficient de $t^0 \cdot t'^0$ dans $\frac{u}{t^x \cdot t'^{x'}}$, eſt $y_{x, x'}$; 2.° que ce même coëfficient dans un terme quelconque tel que $u \cdot \left(\frac{1}{t'} - b\right)^r$, ou $u b^r \cdot \left(\frac{1}{b t'} - 1\right)^r$, eſt égal à

$$b^r \cdot \left\{ \frac{y_{0,r}}{b^r} - r \cdot \frac{y_{0,r-1}}{b^{r-1}} + \frac{r \cdot (r-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{y_{0,r-2}}{b^{r-2}} - \&c. \right\}$$

& par conféquent égal à $b^r . {}^{\prime}\Delta^r . (\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}})$, la caractériftique différentielle $'\Delta$ fe rapportant à la variabilité de x', & cette variable devant être fuppofée nulle après les différenciations; 3.° que ce coëfficient dans $u . (\frac{1}{t} - a)^r$, eft $a^r . \Delta^r . (\frac{y_{x,0}}{a^x})$, la caractériftique Δ fe rapportant à la variabilité de x, & cette variable devant être fuppofée nulle après les différenciations; on aura donc avec cette condition,

$$y_{x,x'} = V . b^{x'} . {}^{\prime}\Delta^{x'} . (\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}) + V^{(1)} . b^{x'-1} . {}^{\prime}\Delta^{x'-1} . (\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}})$$
$$+ V^{(2)} . b^{x'-2} . {}^{\prime}\Delta^{x'-2} . (\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}) \ldots\ldots + V^{(x')} . y_{0,0}$$
$$+ \frac{V^{(x'+1)}}{c+ab} . a . \Delta . (\frac{y_{x,0}}{a^x}) + \frac{V^{(x'+2)}}{(c+ab)^2} . a^2 . \Delta . (\frac{y_{x,0}}{a^x}) \ldots\ldots$$
$$+ \frac{V^{(x+x')}}{(c+ab)^x} . a^x . \Delta^x . (\frac{y_{x,0}}{a^x});$$

ce fera l'intégrale complète de l'équation

$$y_{x+1,x'+1} - a . y_{x,x'+1} - b . y_{x+1,x'} - c . y_{x,x'} = 0;$$

& il eft vifible que cette intégrale fuppofe que l'on connoît le premier rang horizontal & le premier rang vertical de la *Table (Q)* de l'*article XVI.*

XXII.

POUR éclaircir par un exemple la méthode que nous avons donnée précédemment pour intégrer les équations aux différences finies partielles, fuppofons que l'on ait l'équation

$$0 = t . (\frac{1}{t} - 1)^2 - t' . (\frac{1}{t'} - 1)^2,$$

on aura

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{2} \cdot t^{1} + \frac{1}{2t^{1}} \pm \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{t^{1}} - t^{1}\right).$$

Soit

$$\frac{1}{t^{x}} = Z + \frac{1}{t} \cdot Z^{(1)},$$

Z & $Z^{(1)}$ étant des fonctions de t^{1} & de x; on déterminera ces fonctions en substituant successivement dans l'équation précédente, au lieu de $\frac{1}{t}$, ses deux valeurs; ce qui donne

$$\left\{\tfrac{1}{2}t^{1} + \tfrac{1}{2t^{1}} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{t^{1}} - t^{1}\right)\right\}^{x} = Z + Z^{(1)} \cdot \left\{\tfrac{1}{2t^{1}} + \tfrac{1}{2}t^{1} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{t^{1}} - t^{1}\right)\right\}$$

$$\left\{\tfrac{1}{2}t^{1} + \tfrac{1}{2t^{1}} - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{t^{1}} - t^{1}\right)\right\}^{x} = Z + Z^{(1)} \cdot \left\{\tfrac{1}{2t^{1}} + \tfrac{1}{2}t^{1} - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{t^{1}} - t^{1}\right)\right\}$$

d'où il est aisé de conclure

$$Z = \frac{\dfrac{1}{{t^{1}}^{x-2}} - {t^{1}}^{x}}{{t^{1}}^{2} - 1},$$

$$Z^{(1)} = \frac{\dfrac{1}{{t^{1}}^{x}} - {t^{1}}^{x}}{\dfrac{1}{t^{1}} - t^{1}};$$

partant

$$\frac{u}{t^{x}} = u \cdot \frac{\left(\dfrac{1}{{t^{1}}^{x-2}} - {t^{1}}^{x}\right)}{{t^{1}}^{2} - 1} + \frac{u}{t} \cdot \frac{\left(\dfrac{1}{{t^{1}}^{x}} - {t^{1}}^{x}\right)}{\dfrac{1}{t^{1}} - t^{1}}.$$

Présentement le coëfficient de $t^{0} \cdot {t^{1}}^{x^{1}}$ dans $\frac{u}{t^{x}}$, est $y_{x,x^{1}}$, & si l'on désigne par $\daleth \cdot \lambda_{x}$ & $\Pi \cdot \lambda_{x}$, les coëfficiens de t^{x} dans le développement des fonctions $\frac{v}{t - 1}$ & $\frac{v}{\frac{1}{t} - 1}$,

v étant égal à la ſuite infinie, $\lambda_0 + \lambda_1 . t + \lambda_2 . t^2 +$ &c. on aura 1.° $\text{⅂} . y_{0,\, x+x'-2}$ pour le coëfficient de $t^0 . t'^{x'}$ dans $\frac{u}{t'^{x-2} . (t'^2 - 1)}$; 2.° $\text{⅂} . y_{0,\, x'-x}$ pour ce coëfficient dans $\frac{u\, t'^x}{t'^2 - 1}$; 3.° $\Pi . y_{1,\, x+x'}$ pour ce coëfficient dans $\frac{\frac{u}{t} . \frac{1}{t'^x}}{\frac{1}{t'} - t'}$; 4.° $\Pi . y_{1,\, x'-x}$ pour ce coëfficient dans $\frac{\frac{u}{t} . t'^x}{\frac{1}{t'} - t'}$; on aura donc

$$y_{x,\, x'} = \text{⅂} . y_{0,\, x+x'-2} - \text{⅂} . y_{0,\, x'-2} + \Pi . y_{1,\, x+x'} - \Pi . y_{1,\, x'-x};$$

& ſi l'on repréſente $\text{⅂} . y_{0,\, x+x'-2} + \Pi . y_{1,\, x+x'}$ par $\varphi(x + x')$, & $- \text{⅂} . y_{0,\, x'-x} - \Pi . y_{1,\, x'-x}$ par $\psi(x' - x)$, $\varphi(x)$ & $\psi(x)$ étant deux fonctions arbitraires de x, on aura

$$y_{x,\, x'} = \varphi . (x + x') + \psi . (x' - x).$$

Cela poſé, ſi l'on multiplie l'équation $0 = t . (\frac{1}{t} - 1)^2 - t' . (\frac{1}{t'} - 1)^2$ par u, & que l'on repaſſe des fonctions génératrices à leurs variables correſpondantes, on aura l'équation aux différences partielles,

$$y_{x+1,\, x'} - 2 y_{x,\, x'} + y_{x-1,\, x'} = y_{x,\, x'+1} - 2 y_{x,\, x'} + y_{x,\, x'-1};$$

ſon intégrale complète ſera par conſéquent

$$y_{x,\, x'} = \varphi(x + x') + \psi(x' - x),$$

ce qui eſt viſible d'ailleurs par la ſimple ſubſtitution, mais

j'ai cru que l'on ne feroit pas fâché de voir comment cette intégrale fe déduit des méthodes précédentes.

Suppofons maintenant que dans la Table fuivante,

$$\begin{array}{l}
y_{0,0},\ y_{1,0},\ y_{2,0},\ y_{3,0},\ y_{4,0}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ y_{n-1,0},\ y_{n,0} \\
y_{0,1},\ y_{1,1},\ y_{2,1},\ y_{3,1},\ y_{4,1}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ y_{n-1,1},\ y_{n,1} \\
y_{0,2},\ y_{1,2},\ y_{2,2},\ y_{3,2},\ y_{4,2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ y_{n-1,2},\ y_{n,2} \\
y_{0,3},\ y_{1,3},\ y_{2,3},\ y_{3,3},\ y_{4,3}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ y_{n-1,3},\ y_{n,3}\ ;\ (Z) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\&c. \\
y_{0,\infty},y_{1,\infty},y_{2,\infty},y_{3,\infty},y_{4,\infty}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ y_{n-1,\infty},y_{n,\infty}
\end{array}$$

on connoiffe les deux premiers rangs horizontaux compris entre les deux colonnes verticales extrêmes,

$$y_{0,0},\ y_{0,1},\ y_{0,2}\ \ldots\ldots\ y_{0,\infty},$$

$$y_{n,0},\ y_{n,1},\ y_{n,2}\ \ldots\ldots\ y_{n,\infty},$$

& que l'on connoiffe de plus tous les termes de ces deux colonnes; on pourra déterminer toutes les valeurs de $y_{x,x'}$, qui tombent entre ces deux colonnes; car fi l'on veut former le troifième rang horizontal, on reprendra l'équation

$$y_{x+1,x'} - 2y_{x,x'} + y_{x-1,x'} = y_{x,x'+1} - 2y_{x,x'} + y_{x,x'-1},$$

qui fe réduit à

$$y_{x,x'+1} = y_{x+1,x'} + y_{x-1,x'} - y_{x,x'-1};$$

en y faifant $x' = 1$, & fucceffivement $x = 1$, $x = 2$, $x = 3 \ldots\ldots x = n - 1$, on aura

$$\begin{array}{l}
y_{1,2} = y_{2,1} + y_{0,1} - y_{1,0} \\
y_{2,2} = y_{3,1} + y_{1,1} - y_{2,0} \\
y_{3,2} = y_{4,1} + y_{2,1} - y_{3,0} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{n-1,2} = y_{n,1} + y_{n-2,1} - y_{n-1,0};
\end{array}$$

on formera de la même manière le quatrième rang horizontal, & ainsi de suite à l'infini; mais si l'on vouloit déterminer les valeurs de $y_{x,\,x'}$ qui tombent hors de la Table *(Z)*, les conditions précédentes ne suffiroient pas, & il seroit nécessaire d'y en joindre d'autres.

Cherchons présentement l'expression de $y_{x,\,x'}$; pour cela, reprenons l'intégrale

$$y_{x,\,x'} = \varphi(x' + x) + \psi(x' - x),$$

& supposons que le second rang horizontal qui détermine une des deux fonctions arbitraires, soit tel que l'on ait $\psi(x' - x) = \varphi(x - x')$, on aura

$$y_{x,\,x'} = \varphi(x' + x) + \varphi(x - x');$$

en faisant $x' = 0$, on aura $\varphi(x) = \frac{1}{2} \cdot y_{x,\,0}$; partant

$$y_{x,\,x'} = \tfrac{1}{2} \cdot y_{x+x',0} + \tfrac{1}{2} \cdot y_{x-x',0}.$$

Il est aisé de voir que cette équation satisfait à l'équation proposée aux différences partielles; mais elle n'est qu'une intégrale particulière qui répond au cas où le second rang horizontal se forme du premier, au moyen de l'équation

$$y_{x,1} = \tfrac{1}{2} \cdot y_{x+1,0} + \tfrac{1}{2} \cdot y_{x-1,0}.$$

Tant que $x + x'$ sera égal ou moindre que n, & que $x - x'$ sera positif ou nul, on aura la valeur de $y_{x,\,x'}$ au moyen du premier rang horizontal; mais lorsque x' croissant, $x + x'$ deviendra plus grand que n, & que $x - x'$ deviendra négatif, il faudra déterminer les valeurs de $y_{x+x',0}$ & de $y_{x-x',0}$, au moyen des colonnes verticales extrêmes. Supposons que tous les termes de ces deux colonnes soient zéro, & qu'ainsi l'on ait $y_{0,\,x'} = 0$ & $y_{n,\,x'} = 0$; en faisant $x = 0$ dans l'équation

$$y_{x,\,x'} = \tfrac{1}{2} \cdot y_{x+x',0} + \tfrac{1}{2} \cdot y_{x-x',0},$$

on aura

$$y_{-x',0} = - y_{x',0};$$

en y faiſant enſuite $x = n$, on aura

$$y_{n+x',0} = - y_{n-x',0}.$$

Si l'on change dans cette dernière équation, x' en $n + x'$, on aura

$$y_{2n+x',0} = - y_{-x',0} = y_{x',0};$$

en changeant encore x' en $n + x'$, on aura

$$y_{3n+x',0} = y_{n+x',0} = - y_{n-x',0};$$

d'où l'on tire généralement

$$y_{2rn+x',0} = y_{x',0},$$

&

$$y_{(2r+1).n+x',0} = - y_{n-x',0}.$$

On pourra ainſi, au moyen de ces deux équations, continuer les valeurs de $y_{x,0}$ à l'infini, du côté des valeurs poſitives de x, & l'on en conclura celles qui répondent à x négatif, au moyen de l'équation $y_{-x',0} = - y_{x',0}$; de-là réſulte la conſtruction ſuivante.

Si l'on repréſente les valeurs de $y_{x,0}$ depuis $x = 0$ juſqu'à $x = n$, par les ordonnées des angles d'un polygone dont l'abſciſſe ſoit x, & dont les deux extrémités A & B aboutiſſent aux points où $x = 0$ & $x = n$; on portera ce polygone depuis $x = n$ juſqu'à $x = 2n$, en lui donnant une poſition contraire à celle qu'il avoit depuis $x = 0$ juſqu'à $x = n$, c'eſt-à-dire une poſition telle que les parties qui étoient au-deſſus de l'axe des abſciſſes ſe trouvent au-deſſous, le point B du polygone reſtant d'ailleurs dans cette ſeconde poſition à la même place que dans la première, & le point A répondant ainſi à l'abſciſſe $x = 2n$; on placera enſuite ce même polygone depuis $x = 2n$ juſqu'à $x = 3n$, en lui donnant une poſition contraire à la ſeconde, &

par conséquent semblable à la première, de manière que le point A conserve dans cette troisième position, la même place que dans la seconde, & qu'ainsi le point B réponde à l'abscisse $x = 3n$; en continuant de placer ainsi ce polygone alternativement au-dessus & au-dessous de l'axe des abscisses, les ordonnées menées aux angles de ces polygones seront les valeurs de $y_{x,0}$ qui répondent à x positif.

Pareillement, on placera ce polygone depuis $x = 0$ jusqu'à $x = -n$, en lui donnant une position contraire à celle qu'il avoit depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, le point A restant d'ailleurs dans cette seconde position, à la même place que dans la première; on placera ensuite ce polygone depuis $x = -n$ jusqu'à $x = -2n$, en lui donnant une position contraire à la seconde, le point B restant d'ailleurs à la même place, & ainsi de suite à l'infini. Les ordonnées de ces polygones représenteront les valeurs de $y_{x,0}$ qui répondent à x négatif; on aura ensuite la valeur de $y_{x,x'}$, en prenant la moitié de la somme des deux ordonnées qui répondent aux abscisses $x + x'$ & $x - x'$.

Cette construction géométrique est générale, quelle que soit la nature du polygone que nous venons de considérer; elle servira à déterminer toutes les valeurs de $y_{x,x'}$, comprises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, & depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = \infty$, pourvu que l'on ait $y_{0,x'} = 0$ & $y_{n,x'} = 0$, & que d'ailleurs le second rang horizontal de la Table *(Z)* soit tel que l'on ait

$$y_{x,1} = \tfrac{1}{2}.y_{x+1,0} + \tfrac{1}{2}.y_{x-1,0},$$

ou ce qui revient au même,

$$y_{x,1} - y_{x,0} = \tfrac{1}{2}.\{y_{x+1,0} - 2y_{x,0} + y_{x-1,0}\}.$$

On peut au reste s'assurer facilement de la vérité des résultats précédens dans des exemples particuliers, en donnant à n des valeurs particulières, en prenant ensuite des nombres à volonté pour former le premier rang horizontal de la Table *(Z)*, & en formant le second rang au moyen de

de l'équation $y_{x,1} = \frac{1}{2} \cdot y_{x+x',0} + \frac{1}{2} \cdot y_{x-x',0}$; enfin, en supposant généralement $y_{0,x'} = 0$, & $y_{n,x'} = 0$; car, si au moyen de ces conditions & de l'équation proposée aux différences partielles,

$$y_{x,x'+1} = y_{x+1,x'} + y_{x-1,x'} - y_{x,x'-1},$$

on forme les autres rangs horizontaux de la Table *(Z)*, on trouvera qu'ils seront les mêmes que ceux qui résultent de la construction précédente.

On a, par ce qui précède,

$$y_{x,x'+n} = \frac{1}{2} \cdot y_{x+x'+n,0} + \frac{1}{2} \cdot y_{x-n-x',0}.$$

De plus, $y_{x+x'+n,0} = - y_{n-x-x',0}$,

& $y_{x-n-x',0} = - y_{n+x'-x,0}$;

donc

$$y_{x,x'+n} = - \frac{1}{2} \cdot y_{n-x-x',0} - \frac{1}{2} \cdot y_{n-x+x',0} = - y_{n-x,x'}.$$

Il suit de-là que dans la Table *(Z)*, le $(x' + n)^{\text{ième}}$ rang horizontal est le $x'^{\text{ième}}$ rang horizontal, pris avec un signe contraire & dans un ordre renversé, c'est-à-dire que le terme $r^{\text{ième}}$ du rang $(x' + n)^{\text{ième}}$ est le terme $(n - r)^{\text{ième}}$ du $x'^{\text{ième}}$ rang, pris avec un signe contraire.

On a ensuite

$$y_{x,x'+2n} = \frac{1}{2} \cdot y_{2n+x+x',0} + \frac{1}{2} \cdot y_{x-x'-2n,0};$$

on a d'ailleurs

$$y_{2n+x+x',0} = y_{x+x',0},$$

& $y_{x-x'-2n,0} = - y_{2n+x'-x,0} = - y_{x'-x,0} = y_{x-x',0}$;

partant

$$y_{x,x'+2n} = \frac{1}{2} \cdot y_{x+x',0} + \frac{1}{2} \cdot y_{x-x',0} = y_{x,x'};$$

d'où il suit que le $(x' + 2n)^{\text{ième}}$ rang horizontal est exactement égal au $x'^{\text{ième}}$ rang.

Considérons présentement les vibrations d'une corde dont la figure initiale soit quelconque, mais fort peu éloignée de l'axe des abscisses; nommons x l'abscisse; t le temps; $y_{x,t}$ l'ordonnée d'un point quelconque de la corde après le temps t: concevons de plus l'abscisse x partagée dans une infinité de petites parties égales à ∂x, & que nous prendrons pour l'unité. Cela posé, on aura par les principes connus de Dynamique,

$$\left(\frac{\partial\partial . y_{x,t}}{\partial t^2}\right) = \frac{a^2}{\partial x^2} . (y_{x+1,t} - 2y_{x,t} + y_{x-1,t}),$$

a étant un coëfficient constant dépendant de la tension & de la grosseur de la corde. Si l'on fait $t = \frac{x'}{a}$, on aura $\partial t = \frac{\partial x'}{a}$, & $y_{x,t}$ deviendra une fonction de x & de x', que nous désignerons par $y_{x,x'}$; or la grandeur de ∂t étant arbitraire, on peut la supposer telle que la variation de x' soit égale à celle de x, que nous avons prise pour l'unité; l'équation précédente deviendra ainsi

$$y_{x,x'+1} - 2y_{x,x'} + y_{x,x'-1} = y_{x+1,x'} - 2y_{x,x'} + y_{x-1,x'};$$

x & x' étant des nombres infinis. Cette équation est la même que nous venons de considérer; ainsi la construction géométrique que nous avons donnée, au moyen du polygone qui représente la valeur de $y_{x,0}$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, peut être employée dans ce cas: le polygone sera ici la courbe initiale de la corde; mais pour cela, il faut supposer n égal à la longueur de la corde, & la concevoir partagée dans une infinité de parties; il faut de plus que la corde soit fixe à ses deux extrémités, afin que l'on ait $y_{0,x'} = 0$, & $y_{n,x'} = 0$; d'ailleurs, l'équation de condition

$$y_{x,1} - y_{x,0} = \tfrac{1}{2} . (y_{x+1,0} - 2y_{x,0} + y_{x-1,0}),$$

se change dans celle-ci,

$$\partial t \cdot \left(\frac{\partial y_{x,0}}{\partial t}\right) = \frac{1}{2} \cdot \partial x^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 . y_{x,0}}{\partial x^2}\right),$$

ce qui donne $\left(\frac{\partial . y_{x,0}}{\partial t}\right) = 0$; or $\left(\frac{\partial . y_{x,0}}{\partial t}\right)$ eſt la vîteſſe initiale de la corde; cette vîteſſe doit donc être nulle à l'origine du mouvement. Toutes les fois que ces conditions auront lieu, la conſtruction précédente donnera toujours le mouvement de la corde, quelle que ſoit d'ailleurs ſa figure initiale, pourvu cependant que dans tous ſes points $y_{x+2,0} - 2y_{x+1,0} + y_{x,0}$ ſoit infiniment petit du ſecond ordre, c'eſt-à-dire que deux côtés contigus de la courbe ne forment point entr'eux un angle fini. Cette condition eſt néceſſaire pour que l'équation différentielle du Problème puiſſe ſubſiſter, & pour que celle-ci

$$\left(\frac{\partial . y_{x,0}}{\partial t}\right) . \partial t = \frac{1}{2} \cdot (y_{x+1,0} - 2y_{x,0} + y_{x-1,0})$$

donne $\left(\frac{\partial . y_{x,0}}{\partial t}\right) = 0$; mais d'ailleurs il eſt évident par ce qui précède, que la figure initiale de la corde peut être diſcontinue & compoſée d'un nombre quelconque d'arcs de cercle, ou de portions de courbe qui ſe touchent.

On voit aiſément que toutes les différentes ſituations de la corde répondent aux rangs horizontaux de la Table *(Z)*, & comme les rangs qui correſpondent aux valeurs de x^1, $x^1 + 2n$, $x^1 + 4n$, &c. ſont les mêmes par ce qui précède, il en réſulte que la corde reviendra à la même ſituation après les temps t, $t + \frac{2n}{a}$, $t + \frac{4n}{a}$, &c. n étant toujours la longueur totale de la corde.

Cette analyſe des cordes vibrantes établit, ſi je ne me trompe, d'une manière inconteſtable la poſſibilité d'admettre des fonctions diſcontinues dans ce Problème; & il me paroît que l'on en peut généralement conclure que ces fonctions

peuvent être employées dans tous les Problèmes qui ſe rapportent aux différences partielles, pourvu qu'elles puiſſent ſubſiſter avec les équations différentielles & avec les conditions du Problème. On peut conſidérer en effet toute équation aux différences partielles infiniment petites, comme un cas particulier d'une équation aux différences partielles finies, dans laquelle on ſuppoſe que les variables deviennent infinies : or rien n'étant négligé dans la théorie des équations aux différences finies, il eſt viſible que les fonctions arbitraires de leurs intégrales ne ſont point aſſujetties à la loi de continuité, & que les conſtructions de ces équations par le moyen des polygones, ont lieu quelle que ſoit la nature de ces polygones. Maintenant lorſqu'on paſſe du fini à l'infiniment petit, ces polygones ſe changent dans des courbes qui par conſéquent peuvent être diſcontinues : ainſi la loi de continuité ne paroît néceſſaire ni dans les fonctions arbitraires des intégrales des équations aux différences partielles infiniment petites, ni dans les conſtructions géométriques qui repréſentent ces intégrales ; il faut ſeulement obſerver que ſi l'équation différentielle eſt de l'ordre n, & que l'on nomme u ſa variable principale, x & t étant les deux autres variables, il ne doit point y avoir de ſaut entre deux valeurs conſécutives de $\left(\frac{\partial^{n-r}.u}{\partial x^s.\partial t^{n-r-s}}\right)$, c'eſt-à-dire que la différence de cette quantité doit être infiniment petite par rapport à cette quantité elle-même. Cette condition eſt néceſſaire pour que l'équation différentielle propoſée puiſſe ſubſiſter, parce que toute équation différentielle ſuppoſe que les différences de u dont elle eſt compoſée, diviſées par les puiſſances reſpectives de ∂x & de ∂t, ſont des quantités finies & comparables entr'elles ; mais rien n'oblige d'admettre la condition précédente, relativement aux différences de u de l'ordre n ou d'un ordre ſupérieur : on doit donc aſſujettir les fonctions arbitraires de l'intégrale, à ce qu'il n'y ait point de ſaut entre deux valeurs conſécutives d'une différence de ces fonctions moindre que n, & les courbes qui les repréſentent doivent être aſſujetties à une condition ſemblable, en

ſorte qu'il ne doit point y avoir de ſaut entre deux tangentes conſécutives, ſi l'équation eſt différentielle du ſecond ordre; ou entre deux rayons oſculateurs conſécutifs, ſi elle eſt différentielle du troiſième ordre, & ainſi de ſuite. Par exemple, dans le Problème des cordes vibrantes que nous venons d'analyſer, & qui conduit à une équation différentielle du ſecond ordre, il eſt néceſſaire que les courbes dont on fait uſage pour le conſtruire, ſoient telles que deux côtés contigus ne forment point entr'eux un angle fini: or c'eſt ce qui aura lieu dans la conſtruction que nous avons donnée, ſi la figure initiale de la corde eſt telle que cette condition ſoit remplie; car en la poſant alternativement au-deſſus & au-deſſous de l'axe des abſciſſes, comme nous l'avons preſcrit, la courbe infinie qui en réſulte ſatisfait dans toute ſon étendue à la même condition.

Le ſeul cas qui ſemble faire exception à ce que nous venons de dire, eſt celui dans lequel l'intégrale renferme les fonctions arbitraires & leurs différences; car en la ſubſtituant dans l'équation différentielle pour y ſatisfaire, on y introduit les différences des fonctions arbitraires d'un ordre ſupérieur à n, ce qui ſuppoſe que la loi de continuité s'étend au-delà des différences de l'ordre $n - 1$; mais on doit alors conſidérer comme les véritables fonctions arbitraires de l'intégrale, les différences les plus élevées de ces fonctions, & regarder toutes les différences inférieures comme leurs intégrales ſucceſſives, moyennant quoi la règle donnée précédemment ſur la continuité des fonctions arbitraires & de leurs différences, ſubſiſtera dans ſon entier. On peut même la préſenter d'une manière plus ſimple, en obſervant qu'il n'y a point de ſaut entre deux valeurs conſécutives de l'intégrale d'une fonction quelconque arbitraire & diſcontinue; car en nommant $\varphi(s)$ cette fonction, deux valeurs conſécutives de ſon intégrale $\int \partial s \,.\, \varphi(s)$ ne diffèrent entr'elles que de la quantité $\partial s \,.\, \varphi(s)$, qui ſeroit toujours infiniment petite, quand même il y auroit un ſaut entre deux valeurs conſécutives de $\varphi(s)$. La règle précédente peut donc ſe

réduire à la ſuivante. *Si l'intégrale d'une équation aux différences partielles de l'ordre* n, *renferme la différence* r^{ième} *d'une fonction arbitraire de* s, *on pourra, au lieu de la différence* (n + r)^{ième} *de cette fonction diviſée par* ds^{n+r}, *employer une fonction quelconque diſcontinue de* s.

Lorſque dans le problème des cordes vibrantes, la figure initiale de la corde eſt telle que deux de ſes côtés contigus forment un angle fini, par exemple, lorſqu'elle eſt formée par la réunion de deux lignes droites, il me ſemble que géométriquement la ſolution précédente ne peut être admiſe; mais ſi l'on conſidère phyſiquement ce Problème & tous les autres de ce genre, tels que celui du ſon, il paroît que l'on peut appliquer la conſtruction que nous avons donnée, même au cas où la corde ſeroit formée du ſyſtème de pluſieurs lignes droites; car on voit *a priori* que ſon mouvement doit très-peu différer de celui qu'elle prendroit, en ſuppoſant qu'aux points où ces lignes ſe rencontrent, il y ait des petites courbes qui permettent d'employer cette conſtruction.

XXIII.

On peut encore appliquer le calcul des fonctions génératrices, à l'intégration des équations aux différences partielles, en partie finies, & en partie infiniment petites; pour cela, conſidérons l'équation

$$0 = a y_{x,x'} + b.\Delta.y_{x,x'} - \left(\frac{\partial.y_{x,x'}}{\partial x'}\right),$$

la caractériſtique finie Δ ſe rapportant à la variable x, dont la différence eſt l'unité, & la caractériſtique ∂ ſe rapportant à la variable x', dont la différence eſt conſéquemment $\partial x'$.

L'équation génératrice de la précédente eſt

$$0 = a + b.\left(\frac{1}{t} - 1\right) - \frac{1}{\partial x'}.\left(\frac{1}{t'^{\partial x'}} - 1\right);$$

d'où l'on tire à l'infiniment petit près,

$$\frac{1}{t^x} = \frac{1}{(b\partial x^1)^x} \cdot \left\{ \frac{1}{t^{1\partial x^1} \cdot (1 + a\partial x^1 - b\partial x^1)} - 1 \right\}^x.$$

Or si l'on nomme y_{x,x^1} le coëfficient de $t^x \cdot t^{1x^1}$ dans u, le coëfficient de $t^0 \cdot t^{1x^1}$ dans $\frac{u}{t^x}$, sera y_{x,x^1}; ce même coëfficient dans $u \cdot \left\{ \frac{1}{t^{1\partial x^1} \cdot (1 + a\partial x^1 - b\partial x^1)} - 1 \right\}^x$, sera

$$(1 + a\partial x^1 - b\partial x^1)^{\frac{x^1}{\partial x^1}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{y_{0, x^1 + x\partial x^1}}{(1 + a\partial x^1 - b\partial x^1)^{\frac{x^1}{\partial x^1} + x}} - x \cdot \frac{y_{0, x^1 + (x-1) \cdot \partial x^1}}{(1 + a\partial x^1 - b\partial x^1)^{\frac{x^1}{\partial x^1} + x - 1}} \\ + \frac{x \cdot (x-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{y_{0, x^1 + (x-2) \cdot \partial x^1}}{(1 + a\partial x^1 - b\partial x^1)^{\frac{x^1}{\partial x^1} + x - 2}} - \&c. \end{array} \right\}$$

$$= (1 + a\partial x^1 - b\partial x^1)^{\frac{x^1}{\partial x^1}} \cdot \partial^x \cdot \left\{ \frac{y_{0, x^1}}{(1 + a\partial x^1 - b\partial x^1)^{\frac{x^1}{\partial x^1}}} \right\}$$

or on a

$$(1 + a\partial x^1 - b\partial x^1)^{\frac{x^1}{\partial x^1}} = e^{(a-b) \cdot x^1},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; le coëfficient de $t^0 \cdot t^{1x^1}$ dans $u \cdot \left\{ \frac{1}{t^{1\partial x^1} \cdot (1 + a\partial x^1 - b\partial x^1)} - 1 \right\}^x$, sera donc $e^{(a-b) \cdot x^1} \cdot \partial^x \cdot \{ y_{0, x^1} \cdot e^{(b-a) \cdot x^1} \}$; partant on aura

$$y_{x, x^1} = \frac{e^{(a-b) \cdot x^1}}{b^x} \cdot \frac{\partial^x \cdot e^{(b-a) \cdot x^1} \cdot y_{0, x^1}}{(\partial x^1)^x},$$

ou plus simplement,

$$y_{x, x^1} = \frac{e^{(a-b) \cdot x^1}}{b^x} \cdot \frac{\partial^x \cdot \varphi(x^1)}{(\partial x^1)^x},$$

$\varphi(x^1)$ étant une fonction arbitraire de x^1.

On peut intégrer par le même procédé, l'équation générale

$$o = \Delta^n . y_{x, x'} + a . \Delta^{n-1} . \left(\frac{\partial . y_{x, x'}}{\partial x'}\right)$$
$$+ b . \Delta^{n-2} . \left(\frac{\partial^2 . y_{x, x'}}{\partial x'^2}\right) + \&c.$$

son équation génératrice est

$$o = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^n + \frac{a}{\partial x'} . \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-1} . \left(\frac{1}{t'^{\partial x'}} - 1\right)$$
$$+ \frac{b}{\partial x'^2} . \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-2} . \left(\frac{1}{t'^{\partial x'}} - 1\right)^2 + \&c.$$

en nommant donc α, α', α'' les n racines de l'équation

$$o = v^n + a . v^{n-1} + b . v^{n-2} + c . v^{n-3} + \&c.$$

on aura les n équations partielles,

$$\frac{1}{t} = 1 + \frac{\alpha}{\partial x'} . \left(\frac{1}{t'^{\partial x'}} - 1\right),$$
$$\frac{1}{t} = 1 + \frac{\alpha'}{\partial x'} . \left(\frac{1}{t'^{\partial x'}} - 1\right),$$
&c.

la première donne

$$\frac{1}{t^x} = \frac{\alpha^x}{(\partial x')^x} . \left\{\frac{1}{t'^{\partial x'} . \left(1 - \frac{\partial x'}{\alpha}\right)} - 1\right\}^x$$

or le coëfficient de $t^0 . t'^{x'}$ dans $\frac{u}{t^x}$, est $y_{x, x'}$; ce même coëfficient dans $u . \left\{\frac{1}{t'^{\partial x'} . \left(1 - \frac{\partial x'}{\alpha}\right)} - 1\right\}^x$, est

$$\left(1-\frac{\partial x^1}{\alpha}\right)^{\frac{x^1}{\partial x^1}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{y_{0,\,x^1 + x \,.\, \partial x^1}}{\left(1-\frac{\partial x^1}{\alpha}\right)^{\frac{x^1}{\partial x^1}+x}} - x \,.\, \dfrac{y_{0,\,x^1 + (x-1)\,.\,\partial x^1}}{\left(1-\frac{\partial x^1}{\alpha}\right)^{\frac{x^1}{\partial x^1}+x-1}} \\ + \dfrac{x\,.\,(x-1)}{1\,.\,2} \,.\, \dfrac{y_{0,\,x^1+(x-2)\,.\,\partial x^1}}{\left(1-\frac{\partial x^1}{\alpha}\right)^{\frac{x^1}{\partial x^1}+x-2}} - \&c. \end{array} \right\}$$

$$= \left(1-\frac{\partial x^1}{\alpha}\right)^{\frac{x^1}{\partial x^1}} . \, \partial^x . \frac{y_{0,\,x^1}}{\left(1-\frac{\partial x^1}{\alpha}\right)^{\frac{x^1}{\partial x^1}}} = e^{-\frac{x^1}{\alpha}} . \, \partial^x . \, y_{0,\,x^1} . \, e^{\frac{x^1}{\alpha}},$$

parce que $\left(1-\frac{\partial x^1}{\alpha}\right)^{\frac{x^1}{\partial x^1}} = e^{-\frac{x^1}{\alpha}}$; on aura donc

$$y_{x,\,x^1} = \alpha^x . \, e^{-\frac{x^1}{\alpha}} . \, \frac{\partial^x . \, y_{0,\,x^1} . \, e^{\frac{x^1}{\alpha}}}{(\partial x^1)^x},$$

ou plus ſimplement

$$y_{x,\,x^1} = \alpha^x . \, e^{-\frac{x^1}{\alpha}} . \, \frac{\partial^x . \, \varphi(x^1)}{(\partial x^1)^x},$$

$\varphi(x^1)$ étant une fonction arbitraire de x^1.

Il ſuit de-là, que ſi l'on déſigne par $\varphi^{\mathrm{I}}(x^1)$, $\varphi^{\mathrm{II}}(x^1)$, $\varphi^{\mathrm{III}}(x^1)$, &c. d'autres fonctions arbitraires de x^1, l'expreſſion complète de y_x ſera

$$\begin{aligned} y_{x,\,x^1} = {} & \alpha^x . \, e^{-\frac{x^1}{\alpha}} . \, \frac{\partial^x . \, \varphi(x^1)}{(\partial x^1)^x} \\ & + \alpha^{\mathrm{I}\,x} . \, e^{-\frac{x^1}{\alpha^{\mathrm{I}}}} . \, \frac{\partial^x . \, \varphi^{\mathrm{I}}(x^1)}{(\partial x^1)^x} \\ & + \alpha^{\mathrm{II}\,x} . \, e^{-\frac{x^1}{\alpha^{\mathrm{II}}}} . \, \frac{\partial^x . \, \varphi^{\mathrm{II}}(x^1)}{(\partial x^1)} \\ & + \&c. \end{aligned}$$

XXIV.

Théorèmes sur le développement des fonctions à deux variables, en séries.

Si l'on applique aux fonctions à deux variables, la méthode exposée dans les *articles X* & *XI*, on aura sur le développement de ces fonctions en séries, des théorèmes analogues à ceux auxquels nous sommes parvenus dans ces deux articles. Supposons que u soit égal à la suite infinie

$$\begin{array}{l} y_{0,0} + y_{1,0}.t + y_{2,0}.t^2 + y_{3,0}.t^3 + \&c. \\ \quad + y_{0,1}.t' + y_{1,1}.t'.t + y_{2,1}.t'.t^2 + \&c. \\ \quad\quad + \&c. \end{array}$$

& que l'on désigne par la caractéristique Δ la différence finie de $y_{x,x'}$, prise en faisant varier à la fois x & x', la fonction génératrice de $\Delta.y_{x,x'}$ sera $u.(\frac{1}{t.t'} - 1)$; d'où il suit, que la fonction génératrice de $\Delta^n.y_{x,x'}$ sera $u.(\frac{1}{t.t'} - 1)^n$; or on a $\frac{1}{t.t'} - 1 = (1 + \frac{1}{t} - 1).(1 + \frac{1}{t'} - 1) - 1$; ce qui donne

$$u.(\frac{1}{t.t'} - 1)^n = u.\{(1 + \frac{1}{t} - 1).(1 + \frac{1}{t'} - 1) - 1\}^n;$$

partant, si l'on désigne par la caractéristique Δ' la différence finie de $y_{x,x'}$, prise en ne faisant varier que x, & par la caractéristique Δ'', cette différence prise en ne faisant varier que x', on aura, en repassant des fonctions génératrices aux variables correspondantes,

$$\Delta^n.y_{x,x'} = \{(1 + \Delta'.y_{x,x'}).(1 + \Delta''.y_{x,x'}) - 1\}^n,$$

pourvu que dans le développement du second membre de cette équation, on applique aux caractéristiques Δ' & Δ'' les exposans des puissances de $\Delta'.y_{x,x'}$ & de $\Delta''.y_{x,x'}$.

En changeant n en $-n$, on s'assurera facilement par un raisonnement analogue à celui de l'*article X*, que l'équation précédente deviendra

$$\Sigma^n . y_{x,x^1} = \frac{1}{[(1+\Delta^1 . y_{x,x^1}).(1+\Delta^{11} . y_{x,x^1}) - 1]^n},$$

pourvu que dans le développement du second membre de cette équation, on change les différences négatives en intégrales.

Il est clair que $u.(\frac{1}{t^i . t^{1 i^1}} - 1)^n$ est la fonction génératrice de la différence finie $n^{ième}$ de y_{x,x^1}, lorsque x varie de i & que x^1 varie de i^1; or on a

$$u.(\frac{1}{t^i . t^{1 i^1}} - 1)^n = u.\{(1 + \frac{1}{t} - 1)^i . (1 + \frac{1}{t^1} - 1)^{i^1} - 1\}^n;$$

donc, si l'on désigne par la caractéristique ${}^1\Delta$ les différences finies, & par la caractéristique ${}^1\Sigma$ les intégrales finies, lorsque x varie de i & que x^1 varie de i^1, on aura, en repassant des fonctions génératrices aux variables correspondantes,

$${}^1\Delta^n . y_{x,x^1} = \{(1 + \Delta^1 . y_{x,x^1})^i . (1 + \Delta^{11} . y_{x,x^1})^{i^1} - 1\}^n,$$

$${}^1\Sigma^n . y_{x,x^1} = \frac{1}{[(1+\Delta^1 . y_{x,x^1})^i . (1+\Delta^{11} . y_{x,x^1})^{i^1} - 1]^n},$$

pourvu que dans le développement des seconds membres de ces équations, on applique aux caractéristiques Δ^1 & Δ^{11} les exposans des puissances de $\Delta^1 . y_{x,x^1}$ & de $\Delta^{11} . y_{x,x^1}$, & que l'on change les différences négatives en intégrales.

Les deux équations précédentes ont encore lieu, en supposant que dans les différences $\Delta^1 . y_{x,x^1}$ & $\Delta^{11} . y_{x,x^1}$, x & x^1, au lieu de varier de l'unité, varient d'une quantité quelconque ϖ; on doit seulement observer que dans la différence ${}^1\Delta . y_{x,x^1}$, x variera de $i\varpi$, & x^1 variera de $i^1\varpi$; or si l'on suppose ϖ infiniment petit, les différences $\Delta^1 . y_{x,x^1}$ & $\Delta^{11} . y_{x,x^1}$ se changeront, la première dans $\partial x . (\frac{\partial . y_{x,x^1}}{\partial x})$, & la seconde

dans $\partial x^{\text{ı}} . (\frac{\partial . y_{x,x^{\text{ı}}}}{\partial x^{\text{ı}}})$; de plus, si l'on fait i & $i^{\text{ı}}$ infiniment grands, & que l'on suppose $i \partial x = \alpha$, & $i^{\text{ı}} \partial x^{\text{ı}} = \alpha^{\text{ı}}$; on aura

$$(1 + \Delta^{\text{ı}} . y_{x,x^{\text{ı}}})^i = \{1 + \partial x . (\frac{\partial . y_{x,x^{\text{ı}}}}{\partial x})\}^{\frac{\alpha}{\partial x}} = e^{\alpha . (\frac{\partial . y_{x,x^{\text{ı}}}}{\partial x})},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; on aura pareillement

$$(1 + \Delta^{\text{ıı}} . y_{x,x^{\text{ı}}})^{i^{\text{ı}}} = e^{\alpha^{\text{ı}} . (\frac{\partial . y_{x,x^{\text{ı}}}}{\partial x^{\text{ı}}})},$$

partant

$$\Delta^n . y_{x,x^{\text{ı}}} = \left\{ e^{\alpha . (\frac{\partial . y_{x,x^{\text{ı}}}}{\partial x}) + \alpha^{\text{ı}} . (\frac{\partial . y_{x,x^{\text{ı}}}}{\partial x^{\text{ı}}})} - 1 \right\}^n.$$

$$\Sigma^n . y_{x,x^{\text{ı}}} = \frac{1}{\left\{ e^{\alpha . (\frac{\partial . y_{x,x^{\text{ı}}}}{\partial x}) + \alpha^{\text{ı}} . (\frac{\partial . y_{x,x^{\text{ı}}}}{\partial x^{\text{ı}}})} - 1 \right\}^n}.$$

x variant de α, & $x^{\text{ı}}$ variant de $\alpha^{\text{ı}}$ dans les deux premiers membres de ces équations.

Si au lieu de supposer ϖ infiniment petit, on le suppose fini, & i infiniment petit & égal à ∂x; si l'on suppose de plus $i^{\text{ı}}$ infiniment petit & égal à $\partial x^{\text{ı}}$, on aura

$$(1 + \Delta^{\text{ı}} . y_{x,x^{\text{ı}}})^i = (1 + \Delta^{\text{ı}} . y_{x,x^{\text{ı}}})^{\partial x} = 1 + \partial x . \log. (1 + \Delta . y_{x,x^{\text{ı}}});$$

on aura pareillement

$$(1 + \Delta^{\text{ıı}} . y_{x,x^{\text{ı}}})^{i^{\text{ı}}} = 1 + \partial x^{\text{ı}} . \log. (1 + \Delta . y_{x,x^{\text{ı}}});$$

d'ailleurs $\Delta^n . y_{x,x^{\text{ı}}}$ se change en $\partial^n . y_{x,x^{\text{ı}}}$; partant

$$\partial^n . y_{x,x^{\text{ı}}} = \{[1 + \partial x . \log. (1 + \Delta^{\text{ı}} . y_{x,x^{\text{ı}}})] . [1 + \partial x^{\text{ı}} . \log. (1 + \Delta^{\text{ıı}} . y_{n,n^{\text{ı}}})] - 1\}^n,$$

ou plus ſimplement

$$\partial^n . y_{x,x'} = \{\partial x . \log. (1 + \Delta^{I} . y_{x,x'}) + \partial x' . \log. (1 + \Delta^{II} . y_{x,x'})\}^n.$$

On pourroit obtenir de cette manière une infinité d'autres formules ſemblables; mais il ſuffit d'avoir expoſé la méthode pour y parvenir.

Tout ce que nous avons dit ſur les fonctions à deux variables, pouvant s'appliquer également à celles de trois ou d'un plus grand nombre de variables, nous n'inſiſterons pas davantage ſur cet objet.



ANALYSE
DE LA
TERRE BOLAIRE JAUNE DU BERRY.
MANIÈRE de préparer le Rouge de Prusse & le Rouge d'Angleterre. *

Par M. SAGE.

Lû le 21 Juillet *1779.*

LE Rouge qu'on emploie pour mettre en couleur les carreaux d'appartemens, & quelquefois pour polir les glaces & pour imprimer quelques papiers, se prépare en Hollande avec une espèce de bol jaune que les Hollandois tirent de la seigneurie de Beuvrière, paroisse de Saint George en Berry, à deux lieues de Vierzon, sur les bords du Cher. M. le Monnier, de l'Académie, dit dans un Mémoire qu'il a donné sur cette espèce de terre bolaire, qu'elle se trouve à 18 ou 20 toises de profondeur; qu'avant d'y parvenir, on traverse entr'autres une masse de grès tendre, qui a environ 24 pieds d'épaisseur; qu'on trouve ensuite de l'argile & des cailloux; enfin un banc de sablon blanc très-fin, de l'épaisseur d'un pied: c'est immédiatement au-dessous de ce banc que se trouve la première couche de terre bolaire jaune, qui a la même épaisseur que celle du banc de sablon. On rencontre alternativement des couches de sablon & de terre bolaire; mais ce qu'il y a de remarquable, comme l'observe M. le Monnier, c'est que ce bol ne contient point de sablon.

Les lits de terre bolaire jaune du Berry, n'ont point toujours la même épaisseur; il y en a qui n'ont que 6 pouces, d'autres en ont 18; la nuance jaune varie aussi en intensité:

* J'ai donné à M. Gobet une note sur la préparation de cette terre, il l'a imprimé *page 578* du second volume des anciens Minéralogistes.

on trouve quelquefois dans cette terre bolaire, des géodes martiales connues ſous le nom de *pierre d'aigle.*

M. le Vicomte de Riffardo, à qui appartient cette terre, m'ayant apporté, en 1777, de cette eſpèce d'ocre, me demanda quel parti il pourroit en tirer, m'ajoutant qu'il n'avoit pu en trouver le débit à Paris, tandis qu'il eſpéroit le faire avec avantage, parce qu'il en avoit vendu la même année pour quarante mille livres, à quinze francs les huit quintaux, à un particulier qui la faiſoit paſſer en Hollande: il me dit encore, que depuis environ cent ans, la même compagnie de Hollande achetoit de cette terre bolaire, toute la quantité qu'on pouvoit lui en fournir: M. de Riffardo m'ajouta, que d'après la propoſition qu'on lui avoit faite de s'engager à ne livrer de cette terre qu'à cette même compagnie, il n'avoit pas voulu y ſouſcrire, eſpérant découvrir comment les Hollandois en tiroient parti. M. de Riffardo s'étant adreſſé à moi, je fis les recherches pour y parvenir.

L'emploi de l'ocre jaune n'étant point aſſez conſidérable dans le Commerce, pour que j'euſſe pu croire qu'on débitât la terre du Berry ſous forme de bol jaune; & ayant reconnu qu'elle prenoit une belle couleur rouge par la calcination, & qu'après avoir été diviſée, elle reſſembloit au rouge qu'on vend dans le Commerce ſous les noms de *rouge de Pruſſe*, de *rouge d'Angleterre*, j'eſſayai ces mêmes terres, qui me parurent en rapport avec notre bol calciné.

Des expériences comparées m'ayant fait connoître l'identité qu'il y avoit entre ces préparations, il ne me reſtoit plus qu'à trouver la manière d'obtenir une nuance égale dans le rouge: j'ai reconnu qu'elle dépendoit du degré de chaleur qu'on employoit pour le faire naître.

Lorſqu'on calcine en morceaux la terre bolaire jaune, elle éclate & ſe diviſe avec beaucoup de bruit; ſi les morceaux ſont un peu épais, il arrive alors que leur ſurface a ſouvent éprouvé trop de feu, tandis que le centre eſt encore jaune.

Ayant reconnu que la nuance rouge que le bol jaune prenoit par la calcination, étoit ſujette à varier, quoique les

morceaux qui avoient été exposés au feu à diverses reprises eussent une teinte jaune égale, & voulant déterminer d'où provenoient ces différentes dégradations, je calcinai à un feu gradué le bol jaune, & je vis que sa couleur disparoissoit à mesure que l'eau contenue dans cette terre, s'exhaloit, & qu'elle prenoit une couleur rouge plus ou moins foncée, suivant le degré de feu qu'on lui avoit fait éprouver; que cette couleur rouge passoit au brun, & qu'elle finissoit par devenir noire; mais alors le bol est à demi-vitrifié, & donne des étincelles lorsqu'on le frappe avec le briquet.

Pour m'assurer si l'eau qui se dégageoit de la terre bolaire jaune étoit pure, j'ai distillé de cette terre dans une cornue de verre lutée; l'eau qu'elle a fournie étoit limpide, & contenoit un peu d'acide vitriolique: ce qui restoit dans la cornue étoit d'un beau rouge, & avoit diminué d'un dixième de son poids. Dans cet état, la terre bolaire peut encore s'imbiber d'eau, mais elle ne s'y divise pas aussi aisément qu'avant d'avoir été calcinée; cependant la terre argileuse qu'elle contient peut encore se laisser pénétrer par l'huile, & faire corps avec elle; propriété que n'a point l'ocre martial pur.

Le bol jaune de Berri m'a produit, par la réduction, 15 livres de fer par quintal, ce qui est à peu-près en rapport avec la quantité de fer que j'ai extrait de cette terre, en employant la sublimation avec le sel ammoniac: pour cet effet, j'ai distillé au fourneau de réverbère, dans une cornue de verre lutée, 100 grains de terre bolaire jaune avec une once de sel ammoniac qui s'est sublimé avec le fer, & a pris une belle couleur jaune; j'ai distillé le résidu jaunâtre avec une once de sel ammoniac; il s'est sublimé coloré en jaune. Ce qui restoit dans la cornue étoit blanchâtre; je l'ai mis dans de l'eau distillée; le sel martial qu'il contenoit s'y est dissout: j'ai filtré, desséché & pesé ce résidu, & j'ai trouvé qu'il ne pesoit que 50 grains, en ajoutant les 10 livres d'eau que la terre bolaire contient par quintal, & l'accrétion en pesanteur absolue, dont le fer est susceptible lorsqu'il est dans

dans l'état de chaux *(a)*; il paroît que le fer ne se trouve dans la terre bolaire jaune de Berri que dans la proportion d'environ un cinquième.

Pour obtenir une couleur rouge d'une nuance égale par la calcination du bol jaune, il faut le diviser & le calciner à un feu médiocre, ayant soin de le retirer de temps en temps de cette terre pour l'exposer à l'air, afin de reconnoître quelle sera sa nuance après le refroidissement: je pense que pour préparer en grand ce rouge, il suffiroit de calciner la terre bolaire au fourneau de reverbère anglois, ayant seulement soin que l'aire de ce fourneau fût presque plat, afin de retirer plus facilement cette terre avec les râbles.

Le rouge dit de *Prusse* a une couleur plus vive que celui d'Angleterre; le premier se vend quarante-huit livres le quintal, & le second vingt-cinq livres *(b)*. On prend les lits de bol jaune les plus colorés pour préparer le rouge de Prusse, & ceux qui le sont moins, pour faire le rouge d'Angleterre.

Il résulte des expériences précédentes, qu'un quintal de terre bolaire jaune de Berri, contient

Eau acidule	10.
Chaux de fer	40.
Argile	50.
	100.

(a) Si l'on réduit le fer à l'état de chaux, par la calcination, ce métal augmente de 40 à 45 livres par quintal; si l'on a précipité le fer de sa dissolution par le moyen d'un alkali, ce précipité, qui est une espèce de chaux de fer, se trouve être augmenté de 80 à 90 livres par quintal. Voyez mes Élémens de Minéralogie, *tome II, pages 160 & 165.*

(b) Les Hollandois ne payent la terre bolaire jaune du Berri, que trente-sept sous six deniers le quintal.



OBSERVATION

SUR

UN ÉTRANGLEMENT D'INTESTIN,

Produit par l'épiploon devenu adhérent au-dessus d'une poche contre nature, formée dans l'intérieur du bas-ventre.

Par M. BORDENAVE.

Lû le 21 Août 1779.

UN homme, âgé d'environ 45 ans, ressentit tout-à-coup, le 7 Juillet 1779, des douleurs vives de colique, accompagnées de nausées & de vomissement. Étant appelé auprès de lui, & après lui avoir fait les questions convenables sur l'espèce de douleur qu'il éprouvoit, sur le siége de la douleur, sur les causes qui avoient pu produire cet accident, &c. je tâtai le ventre, auquel je n'observai rien de particulier; il étoit peu tendu, & ne paroissoit douloureux que vers la région de l'estomac.

Je crus, d'après ces considérations, devoir regarder cette espèce de colique comme bilieuse: en conséquence je lui prescrivis d'abord une potion huileuse, une boisson mucilagineuse & des lavemens émolliens. Les lavemens produisirent seulement l'évacuation des matières contenues dans les derniers intestins; la potion huileuse fut revomie en détail, & les accidens restèrent à peu-près les mêmes. Le lendemain, je crus devoir insister sur l'usage des mêmes remèdes; mais les lavemens produisoient peu d'effet, le vomissement persistoit, & les douleurs de colique étoient seulement un peu diminuées.

Le 9 au matin, le malade en vomissant, rendit deux gros vers strongles, & des matières qui avoient la couleur & l'odeur des matières stercorales; je crus alors que ces accidens pouvoient dépendre en partie de la présence de ces corps

étrangers, & j'espérois que leur issue alloit les dissiper. Comme le malade avoit des hoquets continuels, des nausées, des vomissemens fréquens, je lui prescrivis une potion anti-spasmodique, dans laquelle entroit la liqueur anodine minérale d'Hoffman, la limonade pour boisson, & toujours les lavemens.

Le 10, le malade parut éprouver quelque soulagement par l'usage de ces remèdes; le hoquet étoit moindre, ainsi que le vomissement; il y avoit un peu de sommeil, & des lavemens laxatifs procurèrent quelques évacuations grisâtres. Les 11, 12, 13, 14 & 15, les choses furent à peu-près dans le même état. Le 16, le pouls s'étant un peu élevé, cependant sans tension au ventre, le malade fut saigné; on cessa la potion, & je lui prescrivis l'eau de Vichy pour boisson, d'abord simple & ensuite aiguisée par 2 gros de sel d'Epsom. Cette boisson passa assez bien; les urines devinrent abondantes; le vomissement fut plus rare & a manqué quelquefois pendant 24 & 30 heures; mais rien n'a passé par le bas, & les évacuations inférieures, toujours rares & en petite quantité, n'étoient que le produit de la secrétion qui se faisoit dans les gros intestins.

Le 20, le malade éprouva des douleurs & un gonflement des hémorroïdes. Ces douleurs, & en même temps la situation habituelle du malade sur le côté droit, sembloient annoncer un engorgement étendu jusqu'à la veine-porte; en conséquence les sangsues lui furent appliquées, & procurèrent une médiocre évacuation de sang. Les accidens, quoique moindres en apparence, continuèrent; le pouls devint plus petit, le malade s'affoiblit, & enfin mourut le 24 Juillet, après dix-huit jours de vomissemens habituels, & seulement quelques légères déjections de matières stercorales, sans qu'aucune matière ait passé de haut en bas, excepté la veille de sa mort qu'il eut une évacuation bilieuse.

Les accidens ayant été permanens malgré les remèdes les mieux indiqués, d'un autre côté, n'ayant trouvé aucune tumeur au ventre vers les ouvertures naturelles, ni aucun endroit spécialement douloureux, malgré les recherches les

plus exactes, je ne pouvois regarder la maladie comme une suite de hernie. Je crus donc devoir plutôt soupçonner une invagination d'intestin, ou un étranglement causé par quelque bride intérieure, dont la nature & le siége étoient également inconnues : tel avoit été le jugement que j'avois porté, & que je crus devoir vérifier par l'examen du sujet.

A l'ouverture du bas-ventre, j'aperçus d'abord l'épiploon qui, au lieu d'être étendu sur la surface des intestins & flottant, étoit comme roulé & resserré sur lui-même, & comprimant les intestins dans son passage, alloit adhérer au péritoine au-dessus du pubis; il formoit ainsi une espèce de corde, qui avoit rétréci les intestins dans tous les points de son contact.

Ayant détruit son adhérence inférieure pour reconnoître l'état des parties au-dessous, je trouvai en général les intestins grêles fort dilatés, dans un état de phlogose, & avec quelques points gangréneux. Les ayant examinés avec soin, je découvris une forte adhérence d'une portion de l'intestin *ileum* étranglé, au-dessous de l'endroit d'où j'avois détaché l'épiploon; cet intestin, dilaté en ce lieu comme une espèce de jabot, étoit engagé dans une poche formée dans le péritoine, au-dessus de la tunique vaginale du cordon auquel elle étoit adhérente. Cette poche étoit fort épaisse, carniforme, & présentoit une cavité presque ovoïde; la portion d'intestin qui y étoit contenue, y adhéroit & étoit gangrenée; l'intestin, resserré à son entrée dans cette poche, ne permettoit plus le passage des matières; son diamètre naturel étoit fort diminué au-dessous de l'étranglement, & j'ai reconnu, par l'examen, que la portion de l'*ileum* qui étoit au-dessous, n'étoit pas éloignée du *cæcum* de huit pouces.

En réfléchissant sur la densité de cette poche & sur sa situation, on peut présumer qu'elle ne s'étoit pas formée depuis peu, & qu'elle étoit la suite d'une disposition vicieuse déjà ancienne : ce qui paroit confirmé par l'habitude qu'avoit le malade de se coucher sur le côté droit depuis plusieurs années, & par la douleur qu'il éprouvoit en se couchant du côté opposé.

Ce ſujet ayant été occupé à des travaux quelquefois pénibles, ne peut-on pas penſer ou qu'il a fait quelque effort, ou peut-être qu'il aura été frappé dans ces parties; ce qui aura donné lieu à la diſtenſion graduée du péritoine & à la formation ſucceſſive d'une poche? L'inteſtin, introduit dans cette poche depuis long-temps, n'a produit aucun accident tant qu'il n'a pas été étranglé; mais l'inflammation ayant été déterminée par une cauſe quelconque, l'étranglement eſt ſurvenu, l'inteſtin a contracté des adhérences, les accidens ſe ſont développés, & la maladie, non ſuſceptible de ſecours à raiſon de ſa ſituation intérieure & inconnue, ne pouvant ſe terminer par les ſeules forces de la Nature, eſt devenue néceſſairement mortelle.

L'eſpèce d'étranglement produit par l'épiploon, devenu adhérent au-deſſus d'une poche ainſi formée intérieurement, préſente un cas très-rare, peut-être unique, & dont nous n'avons pas d'exemples dans les Auteurs. On a déjà vu pluſieurs fois des malades éprouver des étranglemens d'inteſtin par invagination; d'autres fois, par une bride formée intérieurement *(a)*; d'autres fois, on a obſervé des rétréciſſemens ſpontanés, qui ont cauſé la mort *(b)*. Tous ces cas funeſtes ont mérité l'attention des Obſervateurs, & quoiqu'ils ne paroiſſent abſolument ſuſceptibles d'aucun ſecours, cependant, on a propoſé en quelques circonſtances des tentatives qui méritent attention, & qui prouvent juſqu'où pourroit s'étendre quelquefois la bienfaiſance de l'Art *(c)*.

Si l'obſervation que je viens de rapporter préſente un de ces cas où les ſecours deviennent impuiſſans, elle ne mérite pas moins d'être recueillie pour étendre nos connoiſſances ſur les maladies trop nombreuſes, quelquefois inconnues & en même temps incurables, dont l'humanité peut être affligée.

(a) Obſervation de M. Moſcati; *Mémoires de l'Académie Royale de Chirurgie, tome III.*

(b) Obſervation de M. Ritſch, & la Note à la fin; *Mémoires de l'Académie Royale de Chirurgie, tome IV.*

(c) Voyez les Réflexions de M. Ritſch.

MÉMOIRE
CONTENANT
LES OBSERVATIONS
DE LA XVII.ᵉ COMÈTE

Observée à Paris, de l'Observatoire de la Marine, depuis le 18 Janvier jusqu'au 17 Mai 1779. (a)

Par M. MESSIER.

Lû à la rentrée du 14 Avril 1779. Relû le 31 Mai 1780.

LE Ciel étoit parfaitement beau la nuit du 18 au 19 Janvier 1779. On avoit annoncé dans le livre de la Connoissance des Temps, pour le 19 au matin, une immersion du premier satellite de Jupiter: avant de faire l'observation de ce Satellite, je parcourus le ciel avec une lunette ordinaire de 2 pieds de foyer, très-claire & armée de larges oculaires, qui faisoient découvrir un espace dans le ciel de 5 à 6 degrés, & je découvris au Levant une nébulosité qui avoit quelques minutes d'étendue, & qu'on ne pouvoit pas apercevoir à la simple vue; je jugeai que cette nébulosité ne pouvoit être qu'une Comète qui paroissoit près de la tête du Cygne, & auprès d'une Étoile de la cinquième grandeur, la seconde de la constellation du Cygne, suivant l'ordre que les Étoiles tiennent dans le Catalogue de Flamstéed, seconde édition. Après avoir observé l'immersion du premier satellite de Jupiter, avec une lunette achromatique de 3 pieds ½ de foyer à triple objectif, faite à Londres par Dollond, & qui fut faite à $5^h\,52'\,49''$ de temps vrai, j'ôtai l'oculaire qui avoit servi à cette observation, pour substituer à la place un micromètre filaire que je réglai sur le parallèle des Étoiles fixes en

Découverte le 19 Janvier, vers les 5 heures du matin.

(a) C'est la LXIV.ᵉ Comète dont l'orbite ait été calculée, en suivant la Table qui est dans l'Astronomie de M. de la Lande, *tome III, page 366.*

ascension droite; ensuite je comparai la Comète à l'Étoile ci-dessus, la seconde du Cygne; son ascension droite réduite au temps de cette observation étoit de $288^d\ 51'\ 31''$, & sa déclinaison de $29^d\ 12'\ 5''$ boréale. A $6^h\ 8'\ 2''$ de temps vrai, la Comète suivoit l'Étoile au fil horaire de $16'\ 7''$ de degré, la Comète étant supérieure à l'Étoile de $20'\ 4''$. De ces différences & de la position de l'Étoile, il en est résulté l'ascension droite de la Comète de $289^d\ 5'\ 20''$, & sa déclinaison boréale de $29^d\ 40'\ 52''$: la Cométe fut encore comparée la même nuit deux fois à la même Étoile.

Première observation de la Comète.

Le noyau de la Comète paroissoit assez brillant, son diamètre égaloit une fois & demi l'épaisseur d'un des fils du micromètre, estimé de 20 secondes de degré ; le noyau étoit environné de nébulosité qui s'étendoit à 4 minutes; la queue paroissoit longue de 33 minutes, dirigée vers le nord-est.

Je ne rapporte ces détails que pour cette première observation; on trouvera dans deux Tables qui sont placées à la suite de ce Mémoire, les déterminations de la Comète pour chaque jour qu'elle aura été observée, & dans une seconde Table les positions des Étoiles, celles qui étoient connues, ainsi que celles que j'ai déterminées par de nouvelles observations, & dont la plupart ont été employées à la détermination des lieux du noyau de la Comète, à chaque jour d'observations.

Dans mes observations, j'ai employé la même lunette achromatique de 3 pieds $\frac{1}{2}$, garnie d'un micromètre filaire, de laquelle j'ai déjà parlé : la pendule qui a servi à marquer les temps des observations, étoit du célèbre Julien le Roi; elle étoit réglée sur le mouvement des fixes, & sa marche connue par les passages du Soleil au Méridien, observés à un télescope Newtonien de 3 pieds 2 pouces de foyer, placé solidement dans le plan du Méridien, & sa position vérifiée par un grand nombre de hauteurs correspondantes du Soleil, prises fréquemment dans tous les temps de l'année.

Les 20, 21 & 22 Janvier, le ciel fut couvert.

Le 23 au matin, le ciel fut beau, mais il y eut un peu de brouillard; je vis la Comète qui s'étoit approchée depuis le 19 de l'étoile γ de la Lyre; il ne fut pas possible à cause du brouillard de juger de ses apparences; je comparai le noyau à plusieurs Étoiles, & je vérifiai la seconde étoile du Cygne à l'étoile β de la troisième grandeur, de la même constellation: cette étoile β est double, celle qui a le moins de lumière, je l'ai estimée de la sixième grandeur. La petite Étoile suivoit β au fil horaire de 2 secondes $\frac{1}{2}$ de temps, & elle étoit supérieure à β de 22 secondes de degré. Le 19, en observant la Comète, je vis à peu de distance d'elle, & sur son parallèle, une nébuleuse très-foible, qu'on ne pouvoit apercevoir qu'avec la lunette, le crépuscule alors m'empêcha de déterminer son lieu: ce matin 23, je l'ai comparai directement à la seconde étoile du Cygne de la cinquième grandeur; je l'ai rapportée sur la Carte, & voici sa position.

β du Cygne double.

NÉBULEUSE PRÈS DE LA TÊTE DU CYGNE.	ASCENSION droite.	DÉCLINAIS. boréale.
Le 23 Janvier matin 1779.......	287ᵈ 0′ 1″	29ᵈ 48′ 14″

Le 24 au matin, le ciel fut parfaitement beau; vers les 5 heures, la Comète paroissoit plus apparente que la veille, le noyau très-brillant, environné de nébulosité avec une queue de plusieurs minutes d'étendue. Je comparai directement le noyau de la Comète aux étoiles γ & λ de la Lyre.

Le 25 Janvier au matin, la Comète paroissoit avec la même lumière que le jour précédent; on la voyoit à la vue simple, mais bien foiblement; je comparai le noyau aux mêmes étoiles γ & λ de la Lyre & à d'autres Étoiles: les positions sont rapportées dans la première Table.

Les 26, 27, 28, 29 & 30 au matin, le ciel fut couvert.

Le

Le 31 Janvier au matin, le ciel parfaitement beau; la Comète paroissoit comme les jours précédens; on ne pouvoit pas cependant l'apercevoir à la simple vue, à cause de la grande lumière de la Lune; je comparai la Comète à β de la Lyre & à plusieurs autres Étoiles: les positions de la Comète & celle des Étoiles sont rapportées dans les Tables qui suivent. β de la Lyre est double, & j'ai estimé que β n'étoit que de la quatrième grandeur, au lieu de la seconde à la troisième, qu'on lui donne dans le livre de la Connoissance des Temps: elle m'a paru avoir moins de lumière que γ de cette constellation. En comparant ce matin la Comète à β de la Lyre, j'ai aperçu à la lunette un petit amas de lumière, qui m'a semblé n'être composé que de très-petites Étoiles, qu'on ne pouvoit pas distinguer avec l'instrument: cet amas de lumière arrondi étoit placé entre γ & β de la Lyre. Le 3 de Septembre, j'ai encore examiné cette lumière avec la lunette achromatique, que j'avois fait grossir cent vingt fois environ; je n'ai pu reconnoître, comme la première fois, si elle étoit composée de petites Étoiles: voici sa position; je l'ai rapportée aussi sur la Carte de la route apparente de la Comète.

β de la Lyre double, estimée de la 4.e grandeur.

NÉBULEUSE ENTRE γ ET β DE LA LYRE.	ASCENSION droite.	DÉCLINAIS. boréale.
Le 31 Janvier matin 1779	281d 20′ 8″	32d 46′ 3″

Le 1.er Février au matin, beau temps; les apparences de la Comète étoient les mêmes que les jours précédens, & la grande lumière de la Lune empêcha de la voir à la vue simple: je comparai le noyau de la Comète à plusieurs Étoiles dont les lieux n'avoient pas encore été déterminés; pour connoître leurs positions, je les comparai à β de la Lyre: on les trouvera dans la seconde Table.

Les 2, 3, 4, 5, 6, 7 & 8 Février, le ciel fut couvert d'un brouillard si épais le jour & la nuit, que le Soleil, la Lune & les Étoiles ne purent paroître; ce brouillard constant ne se dissipa que la nuit du 8 au 9.

Le 9, à cinq heures du matin, le ciel devint parfaitement beau: la Comète avoit passé de la Lyre dans la constellation d'Hercule; ses apparences étoient à peu de chose près les mêmes qu'à la précédente observation, le noyau & la queue toujours d'une lumière sensible vue à la lunette: la Comète à 5 heures du matin, étoit parvenue à une très-grande hauteur au-dessus de l'horizon, de manière que la position de ma lunette ne pouvoit plus me servir; je fus obligé de la déplacer pour l'approcher d'une des croisées de mon Observatoire, celle du Levant; déplacée, il fallut la remettre dans le plan du Méridien, ce qui demanda du temps & empêcha de faire plusieurs comparaisons de la Comète avec les Étoiles voisines: je ne pus la comparer qu'une seule fois, & sa position est rapportée dans la première Table.

Le 10 Février au matin, le ciel fut entièrement couvert.

Le 11 à 4 heures $\frac{1}{2}$ du matin, le ciel étoit parfaitement beau; la Comète paroissoit près de l'étoile *u* de la cinquième grandeur d'Hercule, à laquelle elle fut comparée: les observations sont rapportées, tant celle de la Comète que celle de l'Étoile, dans les deux Tables qui suivent.

Le 12, vers les 5 heures du matin, il y avoit quelques nuages; la Comète paroissoit avec la même lumière que les jours précédens; il n'étoit pas possible cependant de l'apercevoir à la vue simple: je comparai le noyau à la même Étoile de la veille, *u* d'Hercule, & pour vérifier la position de cette Étoile, je l'observai avec l'étoile ε de la troisième grandeur de cette constellation, en employant plusieurs Étoiles intermédiaires.

Le ciel fut entièrement couvert la nuit du 12 au 13.

Le 14 au matin, le ciel en grande partie couvert; entre les nuages rares je vis la Comète, & je comparai le noyau aux deux Étoiles *u* & *d* d'Hercule: les observations un peu douteuses.

Les 15, 16 & 17, brouillard épais les matins, qui ne laiſſoit apercevoir aucune Étoile.

Le 18 au matin, le ciel parfaitement beau & pur; la Comète paroiſſoit très-bien à la lunette, le noyau d'une lumière brillante & blanchâtre; ſon diamètre égaloit l'épaiſſeur d'un des fils du micromètre, qui fut eſtimé de 15 ſecondes; le diamètre de la chevelure avoit 4' 26"; la queue avoit peu d'étendue, 30 minutes environ: quoique le ciel fût parfaitement beau, la Comète n'étoit pas viſible à la vue ſimple; dans la lunette, elle paroiſſoit près de l'étoile ζ d'Hercule: je comparai directement la Cométe à cette Étoile, & dans l'intervalle de mes obſervations, la Comète fut en oppoſition avec l'Étoile en aſcenſion droite.

Diamètre du noyau, 15 ſecondes; de la chevelure, 4' 26"; longueur de la queue, 30 minutes.

Le 19 au matin, il y avoit beaucoup de brouillard; les Étoiles paroiſſoient nébuleuſes; la Comète étoit difficile à apercevoir, & la moindre lumière employée pour éclairer les fils du micromètre, la faiſoit diſparoître, & ce ne fut pas ſans peine que je pus en déterminer le lieu, en la comparant directement aux étoiles de la conſtellation d'Hercule ζ, vingt-troiſième & vingt-ſixième du Catalogue de Flamſtéed: pour vérifier les poſitions de ces deux dernières Étoiles, elles furent comparées à ζ.

Les 22, 23 & 24 Février, le ciel fut couvert de brouillards épais.

La nuit du 25 au 26, je comparai la Comète à l'étoile ξ de la couronne, & à une Étoile dont le lieu n'avoit pas encore été déterminé.

La nuit du 26 au 27, le ciel aſſez beau; il y avoit cependant du brouillard; la Comète paroiſſoit comme la nuit précédente: je comparai le noyau à pluſieurs étoiles ι de la couronne, & à deux Étoiles nouvelles dont les lieux n'étoient pas encore connus.

La nuit du 27 au 28, il y avoit du brouillard que la Lune avoit beaucoup de peine à vaincre, ainſi que les deux nuits précédentes; ce ne fut pas ſans peine que je pus voir la Comète; ſa lumière étoit extrêmement affoiblie par le

brouillard : je comparai le noyau à la même Étoile de la veille ι de la couronne & à deux Étoiles nouvelles.

La nuit du 28 Février au 1.er Mars, le ciel étoit beau; mais il y avoit un peu de brouillard, la Comète se voyoit difficilement : je déterminai son lieu en la comparant aux deux étoiles β & ι de la couronne.

La nuit du 1.er au 2 Mars, le ciel fut parfaitement beau; la Comète paroissoit entre les deux étoiles β & ι de la couronne, avec lesquelles le noyau fut comparé.

La nuit du 2 au 3 fut en partie couverte de brouillard: vers les 4 heures du matin, le brouillard s'étoit dissipé & le ciel étoit devenu parfaitement beau; la Comète paroissoit près de l'étoile β de la couronne, à laquelle je la comparai plusieurs fois; la Comète étoit foible en lumière à cause de la Lune qui étoit sur l'horizon.

La nuit du 3 au 4, un peu de brouillard vers les 11 heures du soir, la Comète étoit très-difficile à apercevoir à la lunette; mais vers les 4 heures du matin, le brouillard étant dissipé, la Comète paroissoit, mais sa lumière étoit encore un peu affoiblie par celle de la Lune qui étoit sur l'horizon; la lunette placée dans le plan du Méridien à quelques secondes près, j'y observai la Comète avec les étoiles β & ο de la couronne: les observations sont rapportées dans la première Table.

La nuit du 4 au 5, le ciel fut parfaitement beau toute la nuit, & pur comme il est rare de le voir à Paris; depuis 9 heures jusqu'à minuit, j'observai plusieurs Étoiles dont les lieux n'avoient pas encore été connus, & qui devoient servir les jours suivans à la détermination de la Comète : ces Étoiles sont rapportées dans la seconde Table qui est à la suite du Mémoire. La Comète fut comparée à β de la couronne; à la lunette, la Comète paroissoit distinctement, malgré la grande lumière de la Lune sur l'horizon; le noyau étoit brillant, blanchâtre; son diamètre, comparé à l'épaisseur d'un des fils du micromètre, fut estimé de 5 secondes; la chevelure avoit peu d'étendue, diminuée par la lumière de la Lune.

Diamètre du noyau, 5 secondes.

La nuit du 5 au 6 de Mars, le ciel fut parfaitement beau

toute la nuit; la Comète avoit les mêmes apparences que la nuit précédente; je comparai le noyau à la même étoile β de la couronne des jours précédens, & plusieurs Étoiles nouvelles furent comparées à ε du Bouvier, de la troisième grandeur.

La nuit du 6 au 7, il y avoit du brouillard, & la Comète paroissoit foiblement; le noyau fut comparé à ε du Bouvier & à deux nouvelles Étoiles déterminées.

La nuit du 7 au 8, le ciel fut parfaitement beau & pur; la Comète paroissoit très-distinctement à la lunette, ayant presqu'autant de lumière que les premiers jours d'observations; cependant on ne pouvoit pas l'apercevoir à la simple vue; avec la lunette de nuit, on la voyoit encore très-bien; le noyau étoit brillant : je comparai son diamètre à l'épaisseur d'un des fils du micromètre, & fut estimé de 5 secondes; il étoit environné de nébulosité dont l'étendue avoit 6′ 42″; on ne voyoit aucune apparence de queue : je comparai directement le noyau de la Comète aux deux étoiles ε & ψ du Bouvier. La même nuit, je comparai ε du Bouvier à β de la couronne, cette dernière n'étant rapportée que dans le Catalogue de Flamstéed : j'avois déjà fait la même comparaison la nuit du 4 au 5 de ce mois.

Diamètre du noyau, 5 secondes. Diamètre de la nébulosité, 6′ 42″.

La nuit du 8 au 9, le ciel fut beau; mais il ne fut pas aussi pur que la nuit précédente : je comparai la Comète aux mêmes étoiles de la veille ε & ψ du Bouvier; j'observai aussi la position de plusieurs Étoiles qui n'avoit pas encore été déterminée.

La nuit du 9 au 10, le ciel fut très-beau; la Comète paroissoit très-bien à la lunette ; le noyau brillant & blanchâtre, environné d'une légère nébulosité : je comparai plusieurs fois la Comète à ε du Bouvier, & je déterminai la position de plusieurs Étoiles qui n'avoient pas encore été connues.

La nuit du 10 au 11 Mars, le ciel fut parfaitement beau & sans nuages; la Comète se faisoit voir distinctement à la lunette achromatique; on la voyoit aussi avec la lunette de nuit : je comparai le noyau à la trente-quatrième étoile du Bouvier, de la sixième grandeur, suivant le Catalogue

de Flamſtéed, & cette Étoile fut comparée à ε de la même conſtellation; j'obſervai auſſi la poſition d'une nouvelle Étoile qui devoit être employée les jours ſuivans à la détermination des lieux de la Comète.

La nuit du 11 au 12, beau temps toute la nuit; la Comète paroiſſoit comme la nuit précédente, avec la même lumière: le noyau fut comparé à la même Étoile de la veille, la trente-quatrième du Bouvier, & à deux Étoiles nouvelles que j'obſervai en les comparant à d'autres Étoiles connues; j'obſervai auſſi pluſieurs Étoiles dont les lieux n'avoient pas encore été déterminés en les comparant à *Arcturus:* ces nouvelles Étoiles devoient ſervir les jours ſuivans à la détermination des lieux de la Comète.

La nuit du 12 au 13, il y eut un peu de brouillard: je déterminai la poſition de la Comète en la comparant à une Étoile de la nuit précédente, que j'avois déterminée; je déterminai auſſi pluſieurs Étoiles: on trouvera leurs déterminations dans la ſeconde Table.

La nuit du 13 au 14, le ciel fut parfaitement beau; la Comète étoit très-apparente à la lunette, le noyau d'une lumière blanchâtre environné de nébuloſités, avec une queue de quelques minutes d'étendue; la Comète ſe voyoit encore bien à la lunette de nuit: le noyau fut comparé pluſieurs fois à de nouvelles Étoiles dont les lieux avoient été déterminés.

Les nuits du 13 au 14, du 14 au 15, du 15 au 16, & du 16 au 17, le ciel fut couvert.

La nuit du 17 au 18, le ciel s'éclaircit vers les 10 heures du ſoir; la Comète ſe voyoit encore bien à la lunette achromatique & avec celle de nuit: je comparai le noyau à de nouvelles Étoiles, dont les poſitions avoient été déterminées. Les déterminations de la Comète obtenues entre $11^h\ 5'$ juſqu'à $11^h\ 26'$, furent un peu douteuſes pour les déclinaiſons ſeulement; les deux autres déterminations faites entre 2 & 3 heures furent meilleures: elles furent faites aux environs du Méridien.

Les 18, 19 & 20 Mars au ſoir, le ciel fut couvert.

Le 21 au ſoir, beau temps; la Comète paroiſſoit, le noyau brillant; on pouvoit encore la voir avec la lunette de nuit; ſa grandeur & ſes apparences étoient à peu-près les mêmes que la nébuleuſe que j'avois découverte le 3 de Mai 1764, entre la queue & les pattes d'un des Lévriers le plus méridional *(b)*: cette comparaiſon fut aiſée à faire, la Comète & la nébuleuſe étoient à peu de diſtance l'une de l'autre. La Comète fut comparée à la ſixième étoile du Bouvier, ſuivant l'ordre du Catalogue de Flamſtéed, & cette Étoile avoit été comparée les jours précédens à ε de la même conſtellation; la poſition de la Comète fut encore obſervée avec une Étoile nouvelle déterminée.

La Comète comparée à la nébuleuſe des Lévriers.

Le 22 au ſoir, le ciel fut un peu nébuleux: la Comète fut comparée à la première & à la ſixième étoile du Bouvier, ſuivant l'ordre que tiennent ces Étoiles dans le grand Catalogue de Flamſtéed.

Le 23, le ciel fut parfaitement beau le ſoir; la Comète ſe voyoit encore fort bien à la lunette achromatique, on la voyoit auſſi avec celle de nuit: je comparai les apparences de la Comète à la même nébuleuſe des Lévriers; la Comète paroiſſoit un peu plus foible qu'elle. Je comparai le noyau de la Comète, qui étoit encore brillant & d'une lumière blanchâtre, à la première étoile du Bouvier, ſuivant Flamſtéed, & directement à *Arcturus*: les obſervations ſont bonnes.

La Comète comparée à la même nébuleuſe.

Le 24, beau temps le ſoir; je comparai encore les apparences de la Comète à la même nébuleuſe des Lévriers; la Comète paroiſſoit avoir un peu moins de lumière: je déterminai la poſition de la Comète en la comparant directement, comme le jour précédent, aux étoiles *numéro 1* du Bouvier & à *Arcturus*.

La Comète comparée à la même nébuleuſe.

Le 25, beau temps, il y avoit cependant des vapeurs qui s'élevoient au-deſſus de l'horizon, & ces vapeurs annonçoient qu'il y auroit une Aurore boréale; effectivement, vers les 9 heures du ſoir, l'Aurore boréale commença à paroître,

Aurore boréale.

(b) Voyez les Mémoires de l'Académie, *année 1771, page 454.*

devint rougeâtre, & à 10 heures elle disparut; il faisoit alors un grand clair de Lune: je comparai directement la Comète à *Arcturus* & à une Étoile nouvelle que j'avois déterminée.

Le 26 Mars, beau temps; la Comète paroissoit avec la même lumière que le jour précédent; je la comparai aux étoiles η & *Arcturus* du Bouvier, & η à *Arcturus* pour bien connoître sa position: je déterminai le même soir la position de plusieurs Étoiles dont les lieux n'étoient pas encore connus.

Nébuleuse dans la chevelure de Bérénice, comparée à la Comète, & de même grandeur que la Comète.

Le 27, beau temps comme la veille; la Lune étoit sur l'horizon, & la Comète paroissoit le soir sur le parallèle de la nébuleuse de la chevelure de Bérénice, que j'avois découverte le 27 Février 1777: voici ce que j'ai rapporté de cette nébuleuse dans le journal de mes observations. « Une nébuleuse dans la chevelure de Bérénice, qui est assez sensible à » la lunette; elle est assez ronde, & je n'ai pas reconnu qu'elle » soit composée d'Étoiles; c'est une lumière foible: cette nébu- » leuse n'étoit pas bien élevée au-dessus de l'horizon lorsque » je l'ai découverte, & que j'en ai déterminé le lieu en la » comparant à l'étoile quarante-deuxième de la chevelure de » Bérénice, de la quatrième à la cinquième grandeur, suivant » le Catalogue de Flamstéed; voici sa position déterminée pour le » 27 Février 1777: son ascension droite étoit de $195^d\,30'\,26''$, & sa déclinaison de $19^d\,22'\,44''$ boréale. » La Comète & cette nébuleuse paroissoient avoir à la lunette même lumière l'une & l'autre, même étendue & même difficulté à les voir à l'instrument; & cette nébuleuse existante servira dans la suite de terme de comparaison pour la grandeur de la Comète le 27 Mars 1779. Le même soir, je comparai la Comète directement à cette nébuleuse, la position en est rapportée dans la première Table; je la comparai aussi aux étoiles η du Bouvier, à la quarante-deuxième de la chevelure de Bérénice, & à une Étoile nouvelle déterminée.

Le 28, beau temps le soir; la grande lumière de la Lune diminuoit sensiblement les apparences de la Comète; je comparai encore sa lumière à la nébuleuse de la chevelure de

de Bérénice, que je trouvai de même grandeur & ayant même lumière: la Comète fut comparée directement à cette nébuleuse & à la quarante-deuxième Étoile de la chevelure de Bérénice.

La Comète comparée à la nébuleuse de Bérénice.

Le 29, la grande lumière de la Lune affoiblissoit considérablement celle de la Comète; j'avois de la peine à la voir avec la lunette achromatique, quoique j'aie attendu qu'elle soit parvenue à une grande hauteur au-dessus de l'horizon; le ciel étoit cependant parfaitement beau: je comparai la Comète à la même Étoile des jours précédens, la quarante-deuxième de la chevelure de Bérénice, & à une Étoile nouvelle déterminée.

Le 30 Mars, le ciel fut parfaitement beau & pur; mais la Lune qui approchoit de son plein, répandoit une lumière considérable, & la Comète étoit très-difficile à apercevoir à la lunette achromatique; de temps à autre, elle disparoissoit: je réussis cependant à la comparer deux fois à une Étoile nouvelle, dont le lieu fut déterminé en la comparant à des Étoiles connues.

La nuit du 31 Mars au 1.er Avril, le ciel fut parfaitement beau; mais cette nuit arrivoit la pleine Lune, & sa grande lumière avoit effacé celle de la Comète avant son passage au Méridien; je ne pus l'apercevoir que lorsqu'elle y fut parvenue; elle échappoit encore à l'œil, quoiqu'elle fût dans la lunette achromatique: je la comparai à deux Étoiles nouvelles dont les lieux furent déterminés.

La nuit du 1.er au 2 Avril, le ciel parfaitement beau, toujours beaucoup de difficulté pour apercevoir la Comète, à cause de la grande lumière de la Lune: je déterminai son lieu en la comparant à deux nouvelles Étoiles que j'avois déterminées; j'observai aussi le passage de la Comète au Méridien, à la lunette qui y étoit placée à quelques secondes près. Je vérifiai le même soir la position de plusieurs Étoiles observées les jours précédens, en les comparant à *Arcturus*.

La nuit du 2 au 3, le ciel fut parfaitement beau; avant le lever de la Lune, je recherchai la Comète, que je trouvai

ſans peine; elle paroiſſoit encore ſenſiblement à la lunette achromatique, le noyau d'une lumière ſenſible & blanchâtre, mais devenu comme un point brillant environné d'une foible nébuloſité; à la lunette de nuit, on ne faiſoit plus que la ſoupçonner, & encore pour la trouver, il falloit que la lunette fût dirigée dans l'endroit du ciel où elle paroiſſoit: la lunette achromatique montée ſur la machine parallactique, donnoit cette direction. La Comète fut comparée à une Étoile nouvelle de la huitième grandeur dont le lieu avoit été déterminé: je déterminai auſſi le lieu de la Comète par ſon paſſage au Méridien.

La nuit du 3 au 4, beau temps; il y avoit cependant un peu de brouillard, & la Comète paroiſſoit à peu de choſe près avec les mêmes apparences que la nuit précédente: je comparai le noyau à l'Étoile de la veille & à une Étoile nouvelle que j'avois déterminée; j'obſervai auſſi la Comète au Méridien avec les mêmes Étoiles.

Le 4 au ſoir, beau temps; entre 8 & 9 heures, je comparai la Comète à l'Étoile vingt-neuvième, de la ſixième grandeur de la chevelure de Bérénice & à une Étoile nouvelle déterminée; vers les 10 heures, le ciel commença à ſe couvrir; à minuit je ne pus voir la Comète à ſon paſſage au Méridien, mon deſſein étoit de l'y obſerver avec β du Lion, la Comète étant ſur le parallèle de cette Étoile.

Le 5, beau temps; je comparai directement la Comète à l'étoile β du Lion, de la ſeconde grandeur, enſuite à une Étoile déterminée, & ſon paſſage au Méridien avec l'Étoile ci-deſſus rapportée, la vingt-neuvième de la chevelure de Bérénice; pour bien connoître la poſition de cette dernière Étoile, je la comparai à β du Lion: j'avois toujours beaucoup de peine à apercevoir la Comète avec la lunette de nuit.

Le 6, le ciel fut parfaitement beau, & je reconnus que la Comète perdoit de ſa lumière, quoiqu'on la vît encore aſſez bien à la lunette achromatique; on ne faiſoit plus que la ſoupçonner à celle de nuit: la Comète fut comparée aux

Étoiles vingt-huit & vingt-neuvième de la chevelure de Bérénice, suivant l'ordre qu'ont les Étoiles dans le grand Catalogue de Flamstéed; elle fut observée aussi à la lunette achromatique placée dans le plan du Méridien avec les deux Étoiles vingt-huit & vingt-neuvième.

Le 7, beau temps le soir jusque vers les 10 heures que le ciel commença à se couvrir; avant 10 heures je déterminai la position de la Comète en la comparant à l'Étoile de la veille, la vingt-huitième de la chevelure de Bérénice: je déterminai le même soir la position de trois nouvelles Étoiles qui pouvoient servir les jours suivans à la détermination des lieux de la Comète.

Le 8, le ciel fut couvert.

Le 9 beau temps; la Comète étoit encore apparente à la lunette achromatique; je la comparai à deux Étoiles nouvelles, déterminées le 7, & j'en déterminai trois autres le même soir: à 10 heures $\frac{1}{2}$, le vent étoit devenu sensible, & ensuite grande pluie.

Les 10, 11 & 12, le ciel fut couvert.

Le 13, beau temps le soir; je reconnus que la Comète avoit perdu de sa lumière depuis le 9; je la comparai à deux Étoiles déterminées, & ensuite j'observai son passage à la lunette achromatique placée dans le plan du Méridien avec ϵ de la Vierge, de la troisième grandeur.

Le 14 Avril au soir, le ciel fut parfaitement beau; comme la Comète devoit être ce soir près de l'étoile ρ de la Vierge, de la cinquième grandeur, je la cherchai avec la lunette de nuit, & je la vis encore, mais extrêmement affoiblie, & il falloit savoir qu'elle existoit près de cette Étoile, pour pouvoir dire que c'étoit la Comète: je comparai le noyau à cette étoile ρ & à l'étoile ϵ de la même constellation; j'observai aussi son passage au Méridien, à la lunette achromatique, avec les mêmes Étoiles.

Le 15 beau temps; je comparai la Comète à l'étoile ρ de la Vierge, ensuite je l'observai au Méridien avec la même Étoile: le ciel étoit moins beau que la veille; la Comète se

perdoit de vue de temps à autre, quoique dans le champ de la lunette achromatique : la dernière obſervation fut un peu douteuſe. Le même ſoir en cherchant la Comète, j'aperçus une Étoile nébuleuſe extrêmement foible, & deux autres nébuleuſes encore plus foibles en lumière, toutes trois placées près du lieu de la Comète, & preſque ſur le parallèle de l'étoile ε de la Vierge, de la troiſième grandeur; la première de ces trois nébuleuſes devoit être ſi près de la Comète, le 13 Avril, ainſi que le 14, que, quoique j'aie obſervé la Comète, ces deux jours, cette nébuleuſe ne fut point aperçue, & ce ne fut que le 15 que je pus la voir, ainſi que les deux autres; je les comparai toutes trois l'une à l'autre, & enſuite l'une des trois à l'étoile ε de la Vierge : voici leurs poſitions déterminées.

TROIS NÉBULEUSES déterminées dans la VIERGE.	ASCENSION droite.	DÉCLINAIS. boréale.
La première, d'une lumière très-foible.	$186^d\ 37'\ 23''$	$13^d\ 2'\ 42''$
La ſeconde, de la même lumière. . .	187. 41. 38	12. 52. 36
La troiſième, un peu plus apparente....	188. . 6. 53	12. 46. 2

Ces trois nébuleuſes qui ne contiennent aucune Étoile, étoient toutes trois d'une lumière ſi foible, que la moindre lumière employée pour éclairer les fils du micromètre, les faiſoit diſparoître : j'ai rapporté ces trois nébuleuſes ſur la Carte de la route de la Comète.

Le 16, ciel couvert le ſoir.

Le 17 Avril, le ciel fut parfaitement beau & pur ; la Comète étoit encore viſible à la lunette achromatique, mais ſa lumière étoit ſenſiblement diminuée : je comparai la Comète à la même Étoile des jours précédens, ρ de la Vierge; je l'obſervai auſſi à ſon paſſage au Méridien : les obſervations ſont rapportées dans la première Table.

Le 18, beau temps; la Comète fut comparée à une Étoile

nouvelle, de la huitième grandeur, que je déterminai en la comparant à l'étoile ρ de la Vierge: la Comète fut aussi observée au Méridien, à la lunette achromatique, avec la même Étoile.

Le 19, le ciel parfaitement beau le soir jusque vers les 10 heures $\frac{1}{4}$ qu'il se couvrit presque entièrement; je comparai la Comète à la même Étoile du jour précédent, de la huitième grandeur.

Le 20, beau temps dans le temps des observations; la Lune étoit sur l'horizon, mais nouvelle & éloignée du lieu où se trouvoit la Comète; elle n'empêcha pas de la voir à la lunette, & de la comparer à la même Étoile nouvelle des jours précédens; j'observai aussi son passage au Méridien à la lunette achromatique: le même soir, je déterminai la position de plusieurs Étoiles dont les lieux n'avoient pas encore été connus.

Le 21, je comparai encore la Comète à la même Étoile, de la huitième grandeur des jours précédens: je ne pus voir la Comète à son passage au Méridien, le ciel alors étoit couvert de nuages rares.

Le 22 au soir, beau temps, mais la Lune étoit sur l'horizon qui répandoit une grande lumière; ce ne fut pas sans peine que je pus revoir la Comète, quoique dans le champ de la lunette, je la perdois de temps à autre; il me réussit cependant de la voir assez pour pouvoir la comparer plusieurs fois à une Étoile nouvelle, de la septième grandeur, dont je déterminai le lieu: en observant la Comète, j'aperçus à peu de distance d'elle une Étoile nébuleuse, qui paroissoit en même temps que la Comète dans le même champ de la lunette; la Comète & la nébuleuse avoient même apparence & même lumière, l'une & l'autre sur le même parallèle: je fus dans l'incertitude de savoir laquelle des deux étoit la Comète; je fus obligé d'observer l'une & l'autre, & ce n'a été qu'en réduisant les observations que j'en avois faites, que j'ai reconnu la Comète d'avec la nébuleuse. Avant la réduction des observations & même après, je soupçonnai que cette nébuleuse qui ressembloit

Nébuleuse découverte le 19 Février 1771, comparée à la Comète, & de même grandeur qu'elle.

à la Comète, en étoit une nouvelle qui commençoit à paroître, & j'en étois d'autant plus persuadé que les jours d'avant je ne l'avois pas aperçue, & je ne fus assuré que le lendemain 23 que c'étoit une nébuleuse, en ce qu'elle n'a oit pas changé de position. J'ai trouvé ensuite dans le Journal de mes observations, que j'avois déjà vu cette nébuleuse le 19 Févıier 1771 : voici ce que j'en avois écrit. « En parcourant le ciel du côté
» du sud-est avec ma lunette achromatique, j'ai découvert dans
» la Vierge une petite nébuleuse qui est ronde, le centre un
» peu plus brillant que les bords (ce pourroit bien être une
» Comète, il faudra l'examiner de nouveau); cette nébuleuse
» se voyoit avec peine avec une lunette ordinaire de 3 pieds $\frac{1}{2}$,
» & on ne pouvoit pas l'apercevoir avec la lunette de nuit : voici sa position. »

NÉBULEUSE DANS LA VIERGE.	ASCENSION droite.	DÉCLINAIS. boréale.
Le 19 Février 1771	184^d 26′ 58″	9^d 16′ 9″
Le 22 Avril 1779	184. 38. 30	9. 14. 34

Le 23 Avril au soir, le ciel fut parfaitement beau aux environs du lieu de la Comète, & ce ne fut pas sans peine que je pus la voir à cause de la foiblesse de sa lumière, & à cause de la Lune qui étoit sur l'horizon; je la comparai à la même Étoile de la veille & à la même nébuleuse rapportée ci-dessus : je reconnus le soir 24, que la nébuleuse n'avoit pas changé de position depuis la veille.

Comète comparée à la nébuleuse de la Vierge.

Le 24 au soir, je cherchai la Comète dans l'endroit du ciel où elle devoit être, & j'étois sûr de la voir dans le champ de la lunette achromatique; mais la grande lumière de la Lune l'avoit fait entièrement disparoître, & il ne fut pas possible de la voir malgré les soins que je pris pour l'apercevoir, même vers son passage au Méridien : la nébuleuse avoit

également disparu. D'après ces recherches, je présumai qu'il ne seroit plus possible de la voir pendant tout le temps que la Lune resteroit sur l'horizon en même temps que la Comète, & que le 23 seroit peut-être le terme de mes observations.

Le 5 Mai au soir, par un beau temps & sans Lune, je recherchai encore la Comète avec la lunette achromatique, n'ayant pu la revoir depuis le 24 d'Avril, à cause de la grande lumière de la Lune & du mauvais temps; c'étoit presque sans espérance de la revoir: cependant, après beaucoup de peines & de recherches, je découvris une lumière extrêmement foible & presque éteinte; cette lumière n'étoit qu'une nuance blanchâtre qui échappoit à l'œil, quoique vue dans la lunette achromatique; cette lumière paroissoit entre les Étoiles, savoir, la dix-septième, de la sixième grandeur, & l'étoile *c*, de la quatrième, toutes deux de la constellation de la Vierge, suivant le Catalogue de Flamstéed: j'en déterminai la position, ainsi que le 6 & le 11, dans la persuasion que c'étoit la Comète elle-même que j'observois; pendant ces trois jours d'observations, je ne lui avois trouvé aucun mouvement apparent, & je présumai que la Comète étoit alors stationnaire: à la dernière observation, j'eus quelque doute si c'étoit la Comète ou une nouvelle nébuleuse; je cherchai aux environs de cette nébulosité pour voir si je ne découvrirois pas quelqu'autre lumière aussi foible: enfin, après bien des recherches & beaucoup d'attentions, je découvris auprès de l'étoile *c* de la Vierge, une lumière semblable à celle que je venois d'observer, & c'étoit la Comète elle-même que je comparai à l'étoile *c* de la Vierge; sa position en est rapportée dans la première Table. Voici celle de la nébuleuse que j'avois prise pour la Comète, les 5, 6 & 11 de ce mois.

Nébuleuse découverte dans la Vierge, prise pour la Comète pendant trois jours.

NÉBULEUSE DANS LA VIERGE.	ASCENSION droite.	DÉCLINAIS. boréale.
Le 11 Mai 1779	$182^d\ 41'\ 5''$	$5^d\ 42'\ 5''$

Les 12, 13 & 14 Mai, le ciel ne fut pas aſſez beau pour pouvoir rechercher la Comète & la voir.

Le 15 au ſoir, beau temps; je recherchai la Comète que je trouvai un peu au-deſſous de l'endroit où je l'avois vue le 11, mais ſa lumière étoit ſi rare & ſi foible, vue à la lunette achromatique, que la moindre lumière que j'étois obligé d'employer pour éclairer les fils du micromètre, la faiſoit diſparoître, & ſans lumière même elle échappoit à l'œil, quoique dans l'inſtrument; ce ne fut pas ſans peine que je pus la comparer à une Étoile de la ſixième grandeur, dont le lieu n'avoit pas encore été déterminé: pour déterminer la poſition de cette Étoile, je la comparai à l'étoile *c* de la Vierge, par le moyen d'une Étoile intermédiaire, de la huitième grandeur; la lumière de la Comète étoit beaucoup plus foible que celle de la nébuleuſe obſervée le 11.

La Comète plus foible que la nébuleuſe.

Le 16 Mai, le ciel fut couvert.

Dernière Obſervation.

Le 17, le ciel fut parfaitement beau le ſoir, je vis encore la Comète, & ce fut pour la dernière fois; je la comparai à la même Étoile du 15, de la ſixième grandeur, & ce ne fut pas ſans peine, ne pouvant plus éclairer les fils du micromètre ſans faire diſparoître la Comète, & l'obſervation en eſt par conſéquent un peu douteuſe: ainſi, c'eſt au 17 de Mai qu'eſt ma dernière obſervation.

La Comète a été obſervée quatre mois, pendant leſquels il y a eu ſoixante-trois jours d'obſervations, & deux cents vingt-trois déterminations du lieu du noyau de la Comète.

On ne doit pas, je crois, eſpérer qu'on puiſſe jamais découvrir une Comète auſſi petite & auſſi foible dans le commencement de ſon apparition, que celle-ci l'a été à ſa fin. Des dix-ſept Comètes que j'ai obſervées, celle-ci eſt la ſeule que j'aie pu ſuivre ayant auſſi peu de lumière: auſſi les dernières obſervations peuvent être regardées comme un peu douteuſes, ne pouvant, à cauſe de la foibleſſe de ſa lumière, éclairer les fils du micromètre; je ne pouvois ſouvent que les ſoupçonner.

Pour avoir un terme de comparaiſon de la foibleſſe de la lumière

lumière de cette Comète, à la fin de sa disparition, le 17 Mai, on pourra voir dans le ciel la nébuleuse de la Vierge, dont j'ai rapporté la position au 11 Mai; la Comète avoit moins de lumière encore que cette nébuleuse.

Des deux Tables que je joins à ce Mémoire, la première contiendra tous les lieux de la Comète observés en ascension droite & en déclinaison, avec les différences de passages de la Comète & des Étoiles au fil horaire du micromètre; il en sera de même dans la colonne qui suit pour les différences en déclinaison, entre la Comète & les Étoiles; le signe + signifie qu'il faudroit ajouter ces différences observées aux positions des Étoiles, avec laquelle la Comète a été comparée pour avoir celle de la Comète; & il en est de même du signe — pour ôter: ces deux colonnes, qui sont la base de toutes mes observations, deviennent susceptibles d'être vérifiées en tout temps & perfectionnées, si dans la suite on détermine avec plus de précision les positions des Étoiles qui ont été employées à la détermination des lieux de la Comète; la septième colonne détermine la grandeur des Étoiles; la suivante contient les lettres de Bayer & les numéros qui distinguent tant les Étoiles qui n'avoient pas encore été déterminées, que celles prises des Catalogues: la dernière colonne fait connoître les Étoiles des constellations qui ont servi à la détermination des lieux de la Comète.

La seconde Table contiendra les ascensions droites & les déclinaisons des Étoiles, tant celles qui ont été employées à la détermination du lieu de la Comète, prises des Catalogues, que des Étoiles nouvelles, réduites au temps des observations: je n'y ai fait d'autres réductions aux Étoiles connues, que celle qu'on trouve dans les Catalogues, sous le titre de *variation annuelle.*

Par cette seconde Table, on verra que le cours de la Comète, pendant quatre mois d'observations, m'a donné occasion de déterminer, par de nouvelles observations, les lieux de cent trente-huit Étoiles, dont les positions n'avoient

Cent trente-huit Étoiles de déterminées.

pas encore été déterminées, & que la plus grande partie de ces Étoiles ont été employées à la détermination du lieu de la Comète.

Je joins aussi à ce Mémoire une Carte céleste que j'ai dessinée, & construite exactement sur mes observations; cette Carte est divisée en degrés d'ascension droite, & en degrés de déclinaison: j'y ai rapporté les positions de la route apparente que la Comète a tenue parmi les Étoiles fixes avec la trace de la queue & sa direction, de manière qu'il sera aisé de juger à l'inspection de cette Carte, de la position de la Comète observée, & de celle des Étoiles près desquelles elle a passé; j'y ai rapporté aussi la position de la Comète vue à Berlin, par M. Bode, le 6 Janvier, avec la ligne en points de sa route apparente, jusqu'au 18 du même mois que je la découvris à Paris. J'ai encore rapporté sur cette Carte, quatorze nébuleuses, dont les positions sont rapportées à la suite des Tables. J'ai encore rapporté depuis, sur cette Carte, onze nébuleuses observées en 1781, dans l'aile boréale de la Vierge; elles y sont désignées sous des numéros, & on en trouvera les détails & les positions dans la Connoissance des Temps, de 1784, *page 227*.

J'ai rapporté également sur la Carte un modèle d'Étoiles, au moyen duquel on pourra reconnoître leurs grandeurs.

De tous les modèles d'Étoiles qui ont été gravés jusqu'à présent sur les Globes & sur les Cartes célestes, aucun de ces modèles ne m'avoient satisfait pour pouvoir reconnoître leurs grandeurs; ce fut en 1759, pour les Cartes que je composai du retour de la célèbre Comète de 1682, que je cherchai un modèle d'Étoiles plus décisif & plus reconnoissable dans leurs grandeurs que ce qui avoit été gravé jusqu'alors: le modèle que je donnai dans ces Cartes aux Étoiles me parut être le plus avantageux; l'Étoile se trouve désignée pour chaque grandeur, par des rayons pleins, & par d'autres plus alongés & plus fins: de manière qu'en donnant à une Étoile de la première grandeur, huit rayons;

pour la ſeconde, ſept; ainſi de ſuite, j'ai reconnu que dans toutes les Cartes que j'ai données des Comètes, que ces Étoiles étoient très-reconnoiſſables, & pluſieurs perſonnes en ont déjà adopté la forme ſur des Cartes, Atlas & Globes céleſtes. Voyez mes premières Cartes dans le volume de l'Académie, *année 1760, page 465:* j'ai donné auſſi aux figures des conſtellations le plus de légèreté poſſible pour qu'on puiſſe apercevoir toutes les Étoiles.

La Comète a paſſé, comme on le verra ſur la Carte, par les conſtellations de la Lyre, d'Hercule, la Couronne, le Bouvier, au-deſſous de la chevelure de Bérénice, a traverſé la Vierge, & a ceſſé de paroître dans l'aile auſtrale de cette conſtellation, au-deſſous de l'étoile *c*, ayant parcouru pendant les quatre mois d'obſervations, $107^d\ 26'\ 3''$ d'aſcenſion droite, & $30^d\ 37'\ 29''$ de déclinaiſon boréale.

A la rentrée publique de l'Académie, le 14 Avril 1779, je rendis compte d'une partie de mes obſervations, dans un Mémoire fort abrégé, que j'ai refondu dans celui-ci.

TABLE I. *Des Lieux apparens de la Comète de 1779, découverte le 19 Janvier au matin, comparée aux Étoiles fixes.*

1779.	TEMPS vrai.	ASCENSION droite observée.	DÉCLINAISON Boréale observée.	DIFFÉRENCE en ascens. dr. entre la Comète & les Étoiles.	DIFFÉRENCE en déclinais. entre la Comète & les Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettr. de Bayer & N.° des Étoiles.	ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.			
Janv. 18	18. 8. 2	289. 7. 38	29. 32. 9	0. 16. 7 +	20. 4 —	5	2	
	18. 26. 54	289. 6. 46	29. 32. 41	0. 15. 15 +	20. 36 +	5	2	
	18. 46. 8	289. 5. 31	29. 33. 1	0. 14. 0 +	20. 56 +	5	2	du Cygne.
22	17. 13. 57	283. 48. 16	31. 14. 16	0. 52. 52 +	36. 48 —	6	λ	
	17. 22. 50	283. 47. 54	31. 15. 10	0. 52. 30 +	35. 54 —	6	λ	
	17. 22. 50	283. 47. 55	31. 15. 10	0. 20. 45 —	10. 28 —	6	134	déterminées.
	18. 25. 48	283. 44. 40	31. 16. 8	0. 24. 0 —	9. 30 —	6	134	
	18. 38. 2	283. 43. 39	31. 16. 24	0. 48. 15 +	34. 40 —	6	λ	du Cygne.
	18. 38. 2	283. 43. 40	31. 16. 23	0. 25. 0 —	9. 15 —	6	134	déterminée.
23	17. 32. 47	282. 25. 12	31. 36. 13	0. 15. 0 —	47. 45 —	3	γ	
	17. 32. 47	282. 25. 17	31. 36. 4	0. 30. 7 —	15. 0 —	6	λ	
	17. 38. 28	282. 25. 5	31. 36. 15	0. 15. 7 —	47. 43 —	3	γ	
	17. 38. 28	282. 25. 9	31. 36. 11	0. 30. 15 —	14. 53 —	6	λ	
	18. 23. 33	282. 22. 42	31. 36. 50	0. 17. 30 —	47. 8 —	3	γ	de la Lyre.
	18. 23. 33	282. 22. 39	31. 36. 40	0. 32. 45 —	14. 24 —	6	λ	
	18. 37. 21	282. 21. 35	31. 37. 6	0. 18. 37 —	46. 52 —	3	γ	
	18. 37. 21	282. 21. 39	31. 37. 7	0. 33. 45 —	13. 57 —	6	λ	
24	17. 31. 49	281. 3. 27	31. 55. 0	1. 36. 45 —	18. 58 —	3	γ	
	17. 31. 49	281. 3. 27	31. 55. 0	1. 7. 45 —	42. 53 —	6	133	déterminée.
	17. 48. 24	281. 2. 24	31. 55. 34	1. 53. 0 —	4. 30 +	6	λ	
	18. 3. 11	281. 1. 27	31. 55. 39	1. 38. 45 —	28. 19 —	3	γ	
	18. 3. 11	281. 1. 27	31. 55. 41	0. 37. 0 +	22. 58 —	6	ν^2	
	18. 3. 11	281. 1. 27	31. 55. 40	0. 38. 15 +	38. 43 —	6	ν^1	de la Lyre.
	18. 24. 23	281. 0. 27	31. 55. 50	1. 39. 45 —	28. 8 —	3	γ	
	18. 46. 39	280. 59. 27	31. 56. 14	0. 35. 0 +	22. 25 —	6	ν^2	
30	17. 0. 12	272. 52. 8	33. 12. 48	7. 36. 45 —	5. 34 +	4	β	
	17. 0. 12	272. 51. 53	33. 12. 48	1. 56. 30 +	11. 45 —	7	125	déterminée.
	17. 44. 57	272. 49. 23	33. 13. 10	7. 39. 30 —	5. 56 +	4	β	de la Lyre.
	17. 44. 57	272. 49. 38	33. 13. 10	1. 54. 15 +	11. 23 —	7	125	
	18. 29. 49	272. 47. 23	33. 13. 21	0. 31. 15 +	14. 34 —	7	127	
31	17. 44. 52	271. 27. 53	33. 21. 33	4. 7. 30 +	5. 18 —	7	122	déterminées.
	17. 58. 35	271. 27. 8	33. 21. 2	0. 31. 45 +	3. 31 —	7	125	
	18. 23. 42	271. 25. 23	33. 21. 27	4. 5. 0 +	5. 22 —	7	122	
	18. 28. 56	271. 25. 23	33. 21. 5	0. 30. 0 +	3. 28 —	7	125	
Févr. 8	17. 44. 27	260. 32. 27	33. 41. 29	3. 15. 30 +	20. 39 +	5	u	d'Hercule.
	17. 44. 27	260. 32. 27	33. 41. 29	0. 17. 45 +	14. 42 —	7	117	déterminée.

1779.	TEMPS vrai.	ASCENSION droite observée.	DÉCLINAISON Boréale. observée.	DIFFÉRENCE en ascens. dr. entre la Comète & les Étoiles.	DIFFÉRENCE en déclinais. entre la Comète & les Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.° des Étoiles.	ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.			
Févr. 10	17. 4. 31	257. 50. 12	33. 37. 26	0. 33. 15 +	16. 36 +	5	u	
	17. 23. 48	257. 48. 2	33. 37. 25	0. 31. 45 +	16. 35 +	5	u	
	17. 56. 55	257. 46. 49	33. 37. 51	0. 29. 52 +	17. 1 +	5	u	
11	14. 51. 13	256. 35. 20	33. 34. 43	0. 41. 37 —	13. 53 +	5	u	
	15. 40. 14	256. 32. 12	33. 34. 36	0. 44. 45 —	13. 46 +	5	u	
	17. 19. 58	256. 26. 42	33. 34. 23	0. 50. 15 —	13. 33 +	5	u	
13	16. 34. 38	253. 46. 12	33. 25. 47	3. 30. 45 —	4. 57 +	5	u	
	16. 34. 38	253. 46. 54	33. 25. 36	0. 25. 15 +	27. 52 —	6	d	
	17. 2. 8	253. 43. 54	33. 25. 29	0. 22. 15 +	27. 59 —	6	d	
17	14. 14. 42	248. 16. 47	32. 59. 10	0. 2. 0 +	58. 27 +	3	ζ	
	14. 16. 13	248. 16. 47	32. 59. 11	0. 2. 0 +	58. 28 +	3	ζ	
	15. 47. 57	248. 11. 32	32. 58. 24	0. 3. 15 —	57. 41 +	3	ζ	d'Hercule.
	15. 49. 28	248. 11. 32	32. 58. 23	0. 3. 15 —	57. 40 +	3	ζ	
18	15. 47. 11	246. 46. 47	32. 49. 40	1. 28. 0 —	48. 57 +	3	ζ	
	15. 56. 12	246. 46. 32	32. 49. 40	1. 28. 15 —	48. 57 +	3	ζ	
	16. 25. 10	246. 45. 25	32. 49. 31	3. 8. 30 +	2. 7 —	5	23	
	16. 25. 10	246. 45. 47	32. 49. 47	1. 52. 45 +	22. 23 —	6	26	
20	12. 50. 0	244. 6. 55	32. 31. 2	4. 7. 52 —	30. 19 +	3	ζ	
	13. 14. 49	244. 5. 10	32. 31. 6	0. 28. 15 +	20. 32 —	5	23	
	13. 24. 13	244. 5. 2	32. 30. 55	4. 9. 45 —	30. 12 +	3	ζ	
	13. 47. 51	244. 2. 55	32. 31. 14	0. 26. 0 +	20. 24 —	5	23	
	13. 47. 51	244. 2. 55	32. 31. 14	0. 50. 7 —	40. 56 —	6	26	
25	11. 27. 37	237. 0. 2	31. 28. 40	0. 37. 0 —	27. 12 +	8	109	déterminée.
	11. 41. 8	237. 0. 7	31. 28. 17	6. 22. 15 —	3. 11 +	5	ξ	de la Couronne.
	12. 33. 12	236. 56. 32	31. 27. 52	6. 26. 0 —	2. 46 +	5	ξ	
	12. 33. 12	236. 56. 32	31. 27. 52	0. 40. 30 —	26. 24 +	8	109	déterminée.
26	13. 21. 37	235. 27. 44	31. 12. 25	2. 41. 22 —	43. 7 +	5	ι	de la Couronne.
	13. 21. 37	235. 27. 37	31. 12. 26	0. 19. 37 —	38. 42 +	8	105	déterminées.
	13. 21. 37	235. 27. 44	31. 12. 25	2. 1. 0 —	33. 14 +	8	107	
	14. 11. 52	235. 23. 59	31. 11. 55	2. 45. 7 —	42. 17 +	5	ι	de la Couronne.
	14. 11. 52	235. 24. 7	31. 11. 34	0. 23. 7 —	37. 50 +	8	105	déterminées.
	14. 44. 48	235. 21. 59	31. 11. 18	0. 25. 15 —	37. 34 +	8	105	
27	11. 24. 6	234. 7. 36	30. 57. 33	4. 1. 30 —	28. 15 +	5	ι	de la Couronne.
	11. 24. 6	234. 7. 44	30. 57. 33	1. 39. 30 —	23. 49 +	5	105	
	11. 24. 6	234. 7. 36	30. 57. 33	0. 46. 0 —	22. 13 +	8	103	déterminées.
28	11. 15. 15	232. 41. 36	30. 40. 40	0. 3. 0 +	45. 59 +	8	99	
	11. 15. 15	232. 41. 36	30. 40. 50	3. 0. 30 +	48. 52 +	4	β	
	11. 53. 8	232. 39. 21	30. 40. 11	5. 29. 45 —	10. 53 +	5	ι	de la Couronne.
	11. 53. 8	232. 39. 29	30. 40. 10	4. 49. 15 —	0. 59 +	8	107	déterminée.
Mars. 1	13. 43. 44	231. 6. 43	30. 19. 29	1. 25. 37 +	27. 31 +	4	β	de la Couronne.
	13. 43. 44	231. 6. 44	30. 20. 58	7. 2. 22 —	8. 20 —	5	ι	

1779.	Temps vrai.	Ascension droite observée.	Déclinaison Boréale observée.	Différence en ascens. dr. entre la Comète & les Étoiles.	Différence en déclinais. entre la Comète & les Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.° des Étoiles.	Etoiles avec lesquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.			
Mars. 2	16. 8. 37	229. 31. 21	29. 58. 55	0. 9. 45 —	6. 57 +	4	β	
	16. 22. 10	229. 30. 36	29. 58. 48	0. 10. 30 —	6. 50 +	4	β	de la Couronne.
	16. 35. 45	229. 29. 51	29. 58. 35	0. 11. 15 —	6. 37 +	4	β	
	17. 2. 8	229. 28. 6	29. 57. 59	0. 13. 0 —	6. 1 +	4	β	
	17. 2. 8	229. 28. 16	29. 57. 58	4. 48. 15 —	36. 1 +	8	97	déterminée.
3	10. 53. 42	228. 24. 21	29. 43. 31	1. 16. 45 —	8. 27 —	4	β	
	15. 53. 6	228. 6. 36	29. 39. 34	1. 34. 30 —	12. 24 —	4	β	
au Mér.	16. 12. 36	228. 5. 21	29. 39. 13	1. 35. 45 —	12. 45 —	4	β	
	16. 12. 36	228. 5. 21	29. 39. 14	0. 20. 22 +	45. 41 —	5	o	
	16. 40. 35	228. 3. 51	29. 38. 53	1. 37. 15 —	13. 5 —	4	β	
4	10. 12. 38	227. 1. 36	29. 24. 9	2. 39. 30 —	27. 49 —	4	β	de la Couronne.
	10. 26. 23	227. 0. 36	29. 23. 49	2. 40. 30 —	28. 9 —	4	β	
	11. 3. 0	226. 58. 44	29. 23. 24	2. 42. 22 —	28. 34 —	4	β	
	12. 4. 48	226. 55. 6	29. 22. 25	2. 46. 0 —	29. 33 —	4	β	
5	9. 52. 13	225. 37. 36	29. 2. 40	4. 3. 30 —	49. 18 —	4	β	
	10. 10. 30	225. 36. 21	29. 2. 26	4. 4. 45 —	49. 32 —	4	β	
6	10. 36. 46	224. 11. 6	28. 40. 41	5. 20. 52 +	39. 45 +	3	ε	du Bouvier.
	10. 48. 41	224. 9. 59	28. 40. 40	1. 34. 45 +	37. 59 +	8	93	déterminée.
	11. 11. 25	224. 8. 59	28. 40. 15	5. 18. 45 +	39. 19 +	3	ε	du Bouvier.
	11. 40. 19	224. 6. 2	28. 40. 5	0. 31. 15 +	42. 49 +	8	95	déterminée.
7	9. 48. 14	222. 50. 14	28. 19. 3	4. 0. 0 +	18. 7 +	3	ε	
	10. 47. 41	222. 46. 29	28. 18. 11	3. 56. 15 +	17. 15 +	3	ε	
	10. 50. 47	222. 46. 15	28. 18. 5	0. 58. 45 —	28. 58 +	5	ψ	
	11. 32. 43	222. 43. 45	28. 17. 40	1. 1. 15 —	28. 33 +	5	ψ	
8	9. 15. 8	221. 28. 44	27. 56. 37	2. 38. 30 +	4. 19 —	3	ε	
	9. 15. 8	221. 28. 8	27. 56. 30	2. 16. 52 —	7. 23 +	5	ψ	
	9. 39. 27	221. 27. 21	27. 56. 12	2. 37. 7 +	4. 44 —	3	ε	
	9. 39. 27	221. 27. 30	27. 56. 14	2. 17. 30 —	7. 7 +	5	ψ	du Bouvier.
	10. 58. 11	221. 23. 6	27. 54. 44	2. 32. 52 +	6. 12 —	3	ε	
9	8. 54. 14	220. 8. 29	27. 33. 2	1. 18. 15 +	27. 54 —	3	ε	
	10. 2. 1	220. 4. 29	27. 30. 38	1. 14. 15 +	29. 18 —	3	ε	
	11. 21. 43	219. 59. 59	27. 29. 29	1. 9. 45 +	30. 27 —	3	ε	
10	9. 25. 43	218. 45. 30	27. 7. 47	0. 19. 45 +	21. 3 —	6	34	
	10. 11. 47	218. 43. 15	27. 7. 3	0. 17. 30 +	21. 47 —	6	34	
	10. 53. 15	218. 40. 45	27. 6. 17	0. 15. 0 +	22. 33 —	6	34	
11	9. 2. 44	217. 26. 30	26. 43. 8	0. 59. 15 —	45. 42 —	6	34	
	9. 24. 56	217. 25. 27	26. 42. 56	2. 42. 7 +	8. 39 —	7	85	déterminées.
	9. 24. 56	217. 25. 25	26. 42. 56	0. 35. 30 —	13. 32 —	8	88	
	10. 36. 46	217. 21. 15	26. 41. 9	1. 4. 30 —	47. 41 —	6	34	du Bouvier.
	10. 55. 54	217. 20. 35	26. 41. 7	2. 37. 15 +	10. 28 —	7	85	déterminées,
12	9. 13. 25	216. 7. 20	26. 16. 56	1. 24. 0 +	34. 39 —	7	85	

1779.	TEMPS vrai.	ASCENSION droite obſervée.	DÉCLINAISON Boréale obſervée.	DIFFÉRENCE en aſcenſ. dr. entre la Comète & les Étoiles.	DIFFÉRENCE en déclinaiſ. entre la Comète & les Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.° des Étoiles.	ÉTOILES avec leſquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.			
Mars 12	10. 38. 7	216. 2. 50	26. 15. 30	1. 19. 30 +	36. 5 —	7	85	
	11. 8. 14	216. 1. 35	26. 15. 19	1. 18. 15 +	36. 16 —	7	85	
13	9. 41. 9	214. 48. 20	25. 50. 49	1. 30. 15 +	30. 45 —	7	82	
	10. 28. 48	214. 45. 57	25. 49. 54	1. 27. 52 +	31. 40 —	7	82	
	10. 35. 17	214. 45. 28	25. 49. 47	0. 9. 45 +	18. 38 +	8	84	
	10. 46. 58	214. 44. 50	25. 49. 39	1. 26. 45 +	31. 55 —	7	82	
17	11. 5. 47	209. 47. 43	23. 58. 18	1. 31. 45 +	25. 3 +	7	66	déterminées.
	11. 10. 14	209. 46. 36	23. 58. 45	0. 16. 15 +	22. 1 +	8	70	
	11. 19. 47	209. 46. 44	23. 57. 52	0. 4. 52 —	13. 51 —	8	73	
	11. 26. 40	209. 46. 13	23. 58. 6	1. 30. 15 +	24. 51 +	7	66	
	14. 15. 48	209. 38. 13	23. 54. 34	1. 22. 15 +	21. 19 +	7	66	
	14. 41. 48	209. 37. 13	23. 54. 22	1. 21. 15 +	21. 7 +	7	66	
21	9. 36. 18	205. 21. 57	22. 7. 51	0. 33. 15 +	13. 55 —	6	6	
	9. 44. 48	205. 21. 27	22. 7. 43	0. 32. 45 +	14. 3 —	6	6	
	10. 5. 21	205. 20. 12	22. 7. 14	4. 19. 30 +	20. 15 +	8	53	
22	10. 22. 2	204. 16. 12	21. 38. 25	0. 32. 30 —	43. 21 —	6	6	
	10. 40. 53	204. 15. 57	21. 38. 17	0. 32. 45 —	43. 29 —	6	6	
	10. 49. 39	204. 15. 27	21. 38. 11	0. 33. 15 —	43. 35 —	6	6	du Bouvier.
	11. 6. 23	204. 15. 24	21. 37. 16	1. 43. 0 +	32. 40 +	6	1	
	11. 13. 34	204. 14. 12	21. 37. 40	0. 34. 30 —	44. 6 —	6	6	
23	9. 6. 22	203. 18. 39	21. 11. 16	0. 46. 15 +	6. 40 +	6	1	
	9. 17. 1	203. 17. 54	21. 11. 13	0. 45. 30 +	6. 37 +	6	1	
	9. 59. 50	203. 16. 9	21. 10. 24	0. 43. 45 +	5. 48 +	6	1	
24	8. 44. 11	202. 19. 35	20. 43. 37	9. 5. 0 —	23. 28 +	1	α	*Arcturus.*
	9. 23. 31	202. 18. 24	20. 42. 55	0. 14. 0 —	21. 41 —	6	1	du Bouvier
	9. 26. 34	202. 17. 50	20. 42. 54	9. 6. 45 —	22. 45 +	1	α	*Arcturus.*
	10. 6. 20	202. 16. 39	20. 42. 5	0. 15. 45 —	22. 31 —	6	1	du Bouvier.
25	8. 5. 57	201. 22. 50	20. 16. 19	10. 1. 45 —	3. 50 —	1	α	*Arcturus.*
	8. 5. 57	201. 22. 54	20. 16. 26	1. 9. 30 —	3. 13 —	7	56	déterminée.
	8. 51. 31	201. 21. 13	20. 15. 29	10. 3. 22 —	4. 40 —	1	α	*Arcturus.*
	8. 51. 31	201. 21. 9	20. 15. 34	1. 11. 15 —	4. 5 —	7	56	déterminées.
	10. 13. 32	201. 18. 24	20. 13. 53	1. 14. 0 —	5. 46 —	7	56	
26	8. 19. 17	200. 26. 40	19. 47. 39	5. 36. 40 —	16. 56 +	3	η	du Bouvier.
	8. 44. 58	200. 25. 35	19. 47. 28	10. 59. 0 —	32. 41 —	1	α	*Arcturus.*
	9. 33. 11	200. 23. 6	19. 46. 39	5. 40. 15 —	15. 51 +	3	η	du Bouvier.
27	7. 46. 21	199. 33. 28	19. 20. 53	2. 33. 30 —	2. 53 —	7	55	déterminée.
	7. 46. 21	199. 33. 36	19. 21. 7	6. 29. 45 —	9. 41 —	3	η	du Bouvier.
	8. 38. 10	199. 31. 21	19. 19. 50	4. 41. 45 +	37. 22 +	5	42	chevel. de Bérénice.
	8. 38. 10	199. 31. 29	19. 19. 51	3. 59. 15 +	0. 50 —	.....	.....	par la néb. de Bérén.
	9. 26. 13	199. 29. 44	19. 19. 0	6. 33. 37 —	11. 48 —	3	η	du Bouvier.
	9. 26. 13	199. 29. 43	19. 19. 0	2. 37. 15 —	4. 46 —	7	55	déterminée.

1779.	Temps vrai.	Ascension droite observée.	Déclinaison Boréale observée.	Différence en ascens. dr. entre la Comète & les Étoiles.	Différence en déclinais. entre la Comète & les Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.os des Étoiles.	Étoiles avec lesquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.			
Mars 28	8. 49. 24	198. 38. 6	18. 52. 26	3. 48. 30 +	9. 58 +	5	42	de Bérénice.
	10. 4. 20	198. 35. 43	18. 50. 41	3. 46. 7 +	8. 13 +	5	42	
	10. 4. 20	198. 35. 36	18. 50. 34	3. 3. 22 +	30. 7 —	...	...	nébul. de Bérénice.
	10. 29. 59	198. 34. 46	18. 49. 54	3. 45. 10 +	7. 26 +	5	42	de Bérénice.
29	10. 28. 21	197. 43. 59	18. 22. 47	2. 18. 30 +	19. 22 —	8	40	déterminée.
	10. 44. 47	197. 43. 36	18. 22. 30	2. 54. 0 +	19. 58 —	5	42	de Bérénice.
30	9. 21. 11	196. 57. 10	17. 57. 27	2. 12. 0 +	4. 57 —	7	37	
	10. 3. 22	196. 55. 40	17. 56. 32	2. 10. 30 +	5. 52 —	7	37	
31	12. 23. 27	196. 3. 45	17. 27. 22	0. 4. 30 —	4. 33 +	8	42	
	12. 34. 14	196. 3. 55	17. 26. 58	1. 18. 45 +	35. 26 —	7	37	
	12. 44. 34	196. 3. 15	17. 26. 59	0. 5. 0 —	4. 10 +	8	42	
Avril 1	7. 18. 51	195. 27. 40	17. 6. 30	0. 6. 0 +	12. 44 —	8	39	
	7. 51. 43	195. 27. 33	17. 6. 3	0. 39. 30 +	14. 34 —	8	38	
	9. 17. 55	195. 24. 10	17. 4. 14	0. 2. 30 +	15. 0 —	8	39	
au Mér.	12. 16. 5	195. 18. 25	17. 1. 19	0. 3. 15 —	17. 55 —	8	39	
2	7. 55. 35	194. 42. 26	16. 39. 30	0. 18. 35 +	1. 55 —	8	36	déterminées.
	8. 3. 38	194. 42. 21	16. 39. 15	0. 18. 30 +	2. 10 —	8	36	
	12. 1. 4	194. 34. 38	16. 34. 54	0. 10. 47 +	6. 31 —	8	36	
au Mér.	12. 9. 38	194. 34. 36	16. 34. 44	0. 10. 45 +	6. 41 —	8	36	
3	8. 20. 33	193. 58. 59	16. 13. 0	0. 24. 52 —	28. 25 —	8	36	
	8. 54. 40	193. 57. 59	16. 12. 8	0. 25. 52 —	29. 17 —	8	36	
	11. 46. 48	193. 53. 21	16. 9. 21	0. 30. 30 —	32. 4 —	8	36	
au Mér. {	12. 3. 17	193. 52. 36	16. 9. 11	0. 31. 15 —	32. 14 —	8	36	
	12. 3. 17	193. 52. 28	16. 8. 49	0. 5. 45 +	5. 56 +	9	34	
4	8. 50. 47	193. 16. 54	15. 46. 48	3. 48. 52 +	26. 32 +	6	29	de Bérénice.
	8. 50. 47	193. 16. 55	15. 46. 48	0. 32. 52 —	8. 34 —	8	35	déterminée.
5	8. 53. 8	192. 37. 32	15. 21. 39	18. 10. 30 +	26. 48 —	2	β	du Lion.
	9. 21. 16	192. 37. 9	15. 20. 56	1. 32. 15 +	11. 54 —	7	30	déterminée.
au Mér.	11. 50. 42	192. 32. 2	15. 18. 55	3. 4. 0 +	1. 21 —	6	29	
6	8. 18. 6	192. 0. 2	14. 57. 44	2. 32. 0 +	22. 32 —	6	29	
	8. 18. 6	192. 0. 2	14. 57. 49	2. 41. 45 +	11. 32 +	7	28	
au Mér. {	11. 44. 38	191. 56. 2	14. 54. 26	2. 28. 0 +	25. 50 —	6	29	de Bérénice.
	11. 44. 38	191. 56. 2	14. 54. 21	2. 37. 45 +	8. 4 +	7	28	
7	8. 30. 28	191. 24. 17	14. 33. 20	2. 6. 0 +	12. 57 —	7	28	
9	8. 6. 59	190. 16. 40	13. 45. 59	0. 25. 37 —	8. 13 +	6	29	
	8. 44. 11	190. 15. 47	13. 45. 49	0. 26. 30 —	8. 3 +	6	29	
13	8. 38. 11	188. 15. 23	12. 15. 50	2. 15. 30 +	30. 26 —	8	16	déterminées.
	10. 36. 42	188. 13. 8	12. 14. 21	2. 13. 15 +	31. 55 —	8	16	
au Mér.	11. 4. 16	188. 12. 38	12. 13. 16	4. 35. 15 —	4. 13 +	3	ε	
14	8. 28. 20	187. 49. 8	11. 54. 10	4. 58. 45 —	14. 53 —	3	ε	de la Vierge.
	8. 28. 20	187. 49. 2	11. 54. 10	0. 8. 30 +	26. 35 +	5	ρ	

1779.	Temps vrai.	Ascension droite observée.	Déclin. Boréale observée.	Différence en ascens. dr. entre la Comète & les Étoiles.	Différence en déclinais. entre la Comète & les Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.° des Étoiles.	Étoiles avec lesquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.			
Avril 14	10. 2. 28	187. 47. 38	11. 53. 13	5. 0. 15 —	15. 50 —	3	ε	de la Vierge.
	10. 2. 28	187. 47. 32	11. 53. 19	0. 7. 0 +	25. 44 +	5	ρ	de la Vierge.
au Mér.	10. 58. 50	187. 46. 38	11. 52. 17	5. 1. 15 —	16. 46 —	3	ε	de la Vierge.
au Mér.	10. 58. 50	187. 46. 32	11. 52. 13	0. 6. 0 +	24. 38 +	5	ρ	de la Vierge.
15	9. 48. 22	187. 22. 17	11. 32. 22	0. 18. 15 —	4. 47 +	5	ρ	de la Vierge.
au Mér.	10. 54. 19	187. 20. 32	11. 31. 37	0. 20. 0 —	4. 2 +	5	ρ	de la Vierge.
17	8. 18. 52	186. 36. 17	10. 52. 29	1. 4. 15 —	35. 6 —	5	ρ	de la Vierge.
	8. 30. 6	186. 36. 2	10. 52. 10	1. 4. 30 —	35. 25 —	5	ρ	de la Vierge.
au Mér.	10. 42. 57	186. 35. 2	10. 50. 51	1. 5. 30 —	36. 44 —	5	ρ	de la Vierge.
18	9. 55. 26	186. 14. 17	10. 31. 55	1. 25. 45 —	34. 20 —	8	20	déterminées.
	10. 10. 10	186. 14. 17	10. 31. 54	1. 23. 22 +	25. 6 —	8	10	déterminées.
au Mér.	10. 37. 33	186. 13. 40	10. 31. 47	1. 22. 45 +	25. 13 —	8	10	déterminées.
19	9. 50. 57	185. 52. 25	10. 12. 48	0. 36. 52 —	11. 11 +	8	17	déterminées.
20	9. 49. 41	185. 33. 10	9. 53. 37	0. 56. 7 —	8. 0 —	8	17	déterminées.
au Mér.	10. 27. 47	185. 32. 25	9. 52. 58	0. 56. 52 —	8. 39 —	8	17	déterminées.
21	10. 1. 8	185. 13. 47	9. 34. 55	1. 15. 30 —	26. 42 —	8	17	déterminées.
22	10. 23. 46	184. 55. 32	9. 16. 32	0. 6. 45 —	25. 49 +	7	11	déterminées.
	10. 23. 46	184. 56. 15	9. 16. 3	0. 17. 45 +	1. 39 +	...	...	par la néb. de la ♍
23	9. 35. 23	184. 40. 17	8. 59. 16	0. 22. 0 —	8. 33 +	7	11	déterminée.
	9. 35. 23	184. 40. 15	8. 59. 37	0. 1. 45 +	14. 57 —	...	...	par la néb. de la ♍.
Mai 11	10. 15. 3	181. 51. 8	4. 20. 6	0. 26. 15 —	12. 42 —	4	c	de la Vierge.
15	9. 56. 7	181. 44. 8	3. 28. 29	1. 4. 15 +	1. 15 —	6	2	déterminée.
17	9. 55. 58	181. 41. 35	3. 4. 0	1. 1. 42 +	25. 44 —	6	2	déterminée.

TABLE II. *Des Ascensions droites & des Déclinaisons des Étoiles avec lesquelles la Comète a été comparée. Leurs positions sont réduites au temps des Observations.*

ASCENSION droite des Étoiles. D. M. S.	DÉCLINAISON Boréale des Étoiles. D. M. S.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.° des Étoiles.	NOMS DES ÉTOILES qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
174. 27. 2	15. 48. 27	2	β	du Lion, *Connoissance des Temps*, qui a servi à la détermination de plusieurs Étoiles.
181. 12. 2	16. 7. 50	5	6	de la chevelure de Bérénice, comparée à β du Lion.
182. 17. 23	4. 32. 48	4	c	de la Vierge, Éphémérides de la Caille, Comète comparée le 11 Mai.
182. 29. 48	6. 32. 16	6	17	de la Vierge, Flamstéed.
185. 27. 55	11. 31. 14	7	20	de la Vierge, Flamstéed, comparée à ρ de la Vierge.
187. 36. 48	11. 38. 44	7	27	de la Vierge, comparée à la 15.e déterminée.
187. 40. 32	11. 27. 35	5	ρ	de la Vierge, comparée plusieurs fois à ε, Comète comparée les 14, 15 & 17 Avril.
188. 47. 32	10. 46. 59	7	33	de la Vierge, comparée à la 20.e déterminée.
189. 18. 17	10. 46. 17	7	28	de Bérénice, comparée à la 29.e déterminée, Com. comparée les 6 & 7 Avril.
189. 28. 2	15. 20. 16	6	29	de Bérénice, comparée à β du Lion, Com. comp. les 4, 5 & 6 Avril.
192. 47. 53	12. 9. 3	3	ε	de la Vierge, *Connoissance des Temps*.
194. 49. 36	18. 42. 28	5	42	de Bérénice, comparée à la 55.e déterminée, Comète comparée les 27, 28 & 29 Mars.
202. 32. 24	21. 4. 36	6	1	1.re du Bouvier, comparée à la 53.e & à *Arcturus*, Comète comparée les 22, 23 & 24 Mars.
204. 12. 14	18. 34. 7	4	τ	du Bouvier, comparée à celle *n.°* 7 du Bouvier, Flamstéed.
204. 48. 42	22. 21. 46	6	6	du Bouvier, comparée à *e*, Comète comparée les 21 & 22 Mars.
205. 40. 54	19. 1. 52	7	7	du Bouvier, comparée à η du Bouvier.
206. 3. 21	19. 30. 48	3	η	du Bouvier, comparée à la 79.e déterminée Com. comparée les 26 & 27 Mars.
207. 4. 12	22. 46. 24	6	e	du Bouvier, comparée à la 64.e déterminée.
210. 4. 39	26. 9. 30	5	d	du Bouvier, comparée à la 76.e déterminée.
211. 24. 35	20. 20. 9	1	α	*Arcturus*, *Astronomie-nautique*, Comète comparée les 24, 25 & 26 Mars.
218. 25. 45	27. 28. 50	6	34	du Bouvier, comp. à ε, Com. comp. les 10 & 11 Mars.
218. 50. 14	28. 0. 56	3	ε	du Bouvier, *Connoissance des Temps*, Comète comparée les 6, 7, 8 & 9 Mars.

ASCENSION droite.	DÉCLINAISON des ÉTOILES.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.° des Étoiles.	NOMS DES ÉTOILES qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
D. M. S.	D. M. S.			
223. 45. 0	27. 49. 7	5	ψ	du Bouvier, comparée à ε, Comète comparée les 7 & 8 Mars.
226. 18. 59	29. 58. 36	5	χ	du Bouvier, comparée à la 97.e déterminée.
227. 44. 59	30. 24. 55	5	o	de la Couronne, comparée à β, Comète comparée le 3 Mars.
229. 41. 6	29. 51. 58	4	β	de la Couronne, comparée à ι, Comète comparée les 28 Février, 1, 2, 3, 4 & 5 Mars.
238. 9. 6	30. 29. 18	5	ι	de la Couronne, comparée à ξ, Comète comparée les 26, 27, 28 Février & 1.er Mars.
243. 22. 32	31. 25. 6	5	ξ	Couronne, comparée à ζ d'Hercule, Comète comp. le 25 Février.
243. 36. 55	32. 51. 38	5	23	d'Hercule, comparée à ζ, Comète comparée les 19 & 21 Février matin.
244. 53. 2	33. 12. 10	6	26	d'Hercule, comparée à ζ, Comète comparée les 19 & 21 Février matin.
248. 14. 47	32. 0. 43	3	ζ	d'Hercule, Comète comparée les 18, 19 & 21 Février matin.
253. 21. 39	33. 53. 28	6	d	d'Hercule, Comète comparée le 14 Février matin.
257. 16. 57	33. 20. 50	5	u	d'Hercule, comparée à ε, Comète comparée le 9 Février matin.
258. 5. 18	32. 45. 45	6	72	d'Hercule, comparée à ε d'Hercule.
280. 23. 12	32. 34. 23	6	ν¹	de la Lyre, comparée à ν², Comète comparée le 25 Janvier matin.
280. 24. 27	32. 18. 39	6	ν²	de la Lyre, comparée à γ, Comète comparée le 25 Janvier matin.
280. 28. 53	33. 7. 14	4	β	de la Lyre, *Connoissance des Temps*, Com. comparée le 31 Janvier matin.
282. 40. 12	32. 23. 58	3	γ	de la Lyre, *Connoissance des Temps*, Comète comparée les 24 & 25 Janvier matin.
282. 55. 24	31. 51. 4	6	λ	de la Lyre, comparée à γ, Comète comparée les 23, 24 & 25 Janvier matin.
288. 51. 31	29. 12. 5	5	2	du Cygne, Flamstéed, Comète comparée le 19 Janvier matin.
179. 29. 47	16. 3. 53	1	7	déterminée par β du Lion.
180. 39. 53	3. 29. 44	2	6	déterminée par le *n.°* 7, Comète comparée les 15 & 17 Mai.
181. 37. 47	16. 22. 33	3	6	déterminée par β du Lion.
181. 40. 8	2. 48. 26	4	6	déterminée par le *n.°* 2.
181. 45. 53	4. 20. 6	5	7	déterminée par l'étoile *c* de la Vierge.
182. 25. 43	5. 46. 9	6	9	déterminée par le *n.°* 8.

Ascension droite.	Déclinaison des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.° des Étoiles.	Noms des Étoiles qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
D. M. S.	D. M. S.			
182. 32. 53	3. 57. 42	7	8	déterminée par c de la Vierge.
182. 44. 43	6. 5. 1	8	8	déterminée par la 17.e de la Vierge.
184. 6. 47	9. 50. 51	9	7	déterminée par le n.° 17.
184. 50. 55	10. 57. 0	10	8	déterminée par ρ de la Vierge, Comète comparée le 18 Avril.
185. 2. 17	8. 50. 43	11	7	déterminée par le n.° 12, Comète comparée les 22 & 23 Avril.
185. 33. 17	9. 11. 17	12	8	déterminée par le n.° 17.
185. 35. 32	8. 54. 56	13	7	déterminée par le n.° 12.
185. 49. 32	8. 58. 32	14	7	déterminée par le n.° 12.
185. 55. 23	12. 3. 43	15	8	déterminée par le n.° 16.
185. 59. 53	12. 46. 16	16	8	déterminée par le n.° 21, Com. comp. le 13 Avril.
186. 29. 17	10. 1. 37	17	8	déterminée par la 33.e de la Vierge, Com. comp. les 19, 20 & 21 Avril.
187. 26. 2	10. 3. 23	18	8	déterminée par le n.° 17.
187. 30. 17	16. 36. 49	19	8	déterminée par la 6.e de Bérénice, suiv.t Flamstéed.
187. 40. 2	11. 6. 15	20	8	déterminée par ρ de la ♍, Com. comp. le 18 Avril.
188. 13. 23	12. 8. 17	21	8	déterminée par ε de la Vierge, Comète comparée les 13 & 14 Avril avec ε.
188. 49. 40	10. 30. 15	22	8	déterminée par le n.° 20.
188. 58. 32	10. 16. 54	23	8	déterminée par le n.° 17.
189. 2. 3	13. 10. 23	24	7	déterminée par le n.° 29.
189. 2. 17	16. 47. 56	25	6	déterminée par la 6.e de Bérénice, suivant Flamstéed.
189. 26. 8	13. 19. 8	26	8	déterminée par le n.° 24.
190. 29. 47	16. 14. 2	27	8	déterminée par la 6.e de Bérénice.
190. 32. 32	13. 40. 29	28	8	déterminée par le n.° 24.
190. 42. 17	13. 37. 46	29	6	déterminée par le n.° 33, Com. comp. le 9 Avril.
191. 4. 54	15. 32. 50	30	7	déterminée par β du Lion, Com. comp. le 5 Avril.
191. 7. 32	13. 54. 32	31	8	déterminée par le n.° 33.
192. 21. 7	15. 2. 58	32	8	déterminée par la 29.e de Bérénice, suiv. Flamstéed.
192. 36. 47	14. 22. 19	33	8	déterminée par la 28.e de Bérénice.
193. 46. 43	16. 2. 53	34	9	déterminée par le n.° 35.
193. 49. 47	15. 55. 22	35	8	déterminée par la 29.e de Bérénice, & β du Lion, Comète comparée le 4 Avril.
194. 23. 51	16. 41. 25	36	8	déterminée par le n.° 38, par *Arcturus* & β du Lion, Comète comparée les 2 & 3 Avril.
194. 45. 10	18. 2. 24	37	7	déterminée par la 42.e de Bérénice, Comète comp. les 30 & 31 Mars.

Ascension droite.	Déclinaison des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.° des Étoiles.	Noms des Étoiles qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
D. M. S.	D. M. S.			
194. 48. 3	17. 20. 37	38	8	déterminée par le n.° 37, Com. comp. le 1.er Avril.
195. 21. 40	17. 19. 14	39	8	déterminée par le n.° 37, Com. comp. le 1.er Avril.
195. 25. 29	18. 42. 9	40	8	déterminée par la 42.e de Bérénice, Com. comp. le 29 Mars.
195. 34. 43	16. 30. 17	41	8	déterminée par le n.° 36.
196. 8. 15	17. 22. 49	42	8	déterminée par le n.° 37, Com. comp. le 31 Mars.
196. 26. 6	18. 28. 44	43	8	déterminée par la 42.e de Bérénice, suiv. Flamstéed.
196. 29. 6	18. 12. 48	44	8	déterminée par le n.° 37.
196. 42. 6	18. 28. 6	45	8	déterminée par la 42.e de Bérénice.
197. 23. 6	18. 56. 27	46	8	déterminée par la 42.e de Bérénice.
197. 25. 51	18. 44. 43	47	8	déterminée par la 42.e de Bérénice.
197. 44. 14	17. 15. 41	48	8	déterminée par la 42.e de Bérénice.
197. 46. 36	18. 55. 49	49	8	déterminée par la 42.e de Bérénice.
198. 11. 2	18. 27. 42	50	8	déterminée par la 42.e de Bérénice.
198. 14. 2	18. 29. 7	51	8	déterminée par la 42.e de Bérénice.
200. 54. 5	19. 40. 10	52	8	déterminée par η du Bouvier.
201. 0. 42	21. 46. 59	53	8	déterminée par la 6.e du Bouvier, Comète comp. le 21 Mars.
201. 8. 12	21. 55. 15	54	8	déterminée par le n.° 53.
202. 6. 58	19. 23. 46	55	7	déterminée par η du Bouvier, Comète comparée le 27 Mars.
202. 32. 24	20. 19. 39	56	7	déterminée par la 1.re du Bouvier, & *Arcturus*, Comète comparée le 25 Mars.
202. 32. 27	21. 8. 27	57	8	déterminée par le n.° 53.
203. 38. 12	21. 35. 18	58	8	déterminée par la 1.re du Bouvier, suiv. Flamstéed.
203. 38. 42	19. 31. 40	59	8	déterminée par η du Bouvier.
204. 54. 17	19. 46. 44	60	7	déterminée par la même η.
204. 58. 27	22. 22. 25	61	9	déterminée par la 6.e du Bouvier.
204. 59. 12	22. 22. 28	62	9	déterminée par la même 6.e
207. 40. 36	23. 2. 42	63	7	déterminée par l'étoile ε du Bouvier.
207. 54. 25	22. 37. 16	64	8	déterminée par le n.° 65.
207. 59. 44	21. 57. 20	65	8	déterminée par le n.° 69.
208. 15. 58	23. 23. 15	66	7	déterminée par le n.° 63, Com. comp. le 17 Mars.
208. 32. 36	20. 14. 52	67	8	déterminée par η du Bouvier.
208. 51. 14	23. 47. 12	68	8	déterminée par le n.° 66.
209. 29. 20	22. 14. 37	69	8	déterminée par le n.° 75.
209. 30. 21	23. 36. 44	70	8	déterminée par le n.° 66, Com. comp. le 17 Mars.

ASCENSION droite.	DÉCLINAISON des ÉTOILES.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.° des Étoiles.	NOMS DES ÉTOILES qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
D. M. S.	D. M. S.			
209. 31. 56	25. 23. 17	71	7	déterminée par le *n.° 76.*
209. 48. 58	21. 31. 16	72	8	déterminée par le *n.° 75.*
209. 51. 36	24. 11. 43	73	8	déterminée par le *n.° 66*, Com. comp. le 17 Mars.
210. 14. 58	23. 43. 49	74	7	déterminée par le *n.° 70.*
210. 28. 35	21. 40. 57	75	7	déterminée par le *n.° 80.*
210. 54. 10	25. 49. 51	76	8	déterminée par le *n.° 82.*
211. 11. 39	20. 56. 1	77	8	déterminée par *Arcturus.*
211. 14. 3	24. 44. 24	78	7	déterminée par le *n.° 71.*
211. 26. 7	19. 56. 44	79	7	déterminée par *Arcturus.*
211. 34. 50	21. 9. 12	80	7	déterminée par le *n.° 77.*
211. 45. 58	25. 23. 0	81	7	déterminée par le *n.° 71*, la déclinaison estimée.
213. 18. 5	26. 21. 34	82	7	déterminée par le *n.° 85*, Com. comp. le 13 Mars.
213. 27. 50	24. 44. 12	83	7	déterminée par le *n.° 71.*
214. 35. 43	25. 31. 9	84	8	déterminée par le *n.° 86*, Com. comp. le 13 Mars.
214. 43. 20	26. 51. 35	85	7	déterminée par ε du Bouvier, Comète comparée les 11 & 12 Mars.
215. 8. 35	26. 5. 30	86	8	déterminée par le *n.° 82.*
215. 38. 30	27. 40. 38	87	7	déterminée par le *n.° 85*, déclinaison estimée.
218. 0. 55	26. 56. 28	88	8	déterminée par la 34.ᵉ du Bouvier, Comète comp. le 11 Mars.
219. 6. 44	28. 28. 12	89	8	déterminée par ε du Bouvier.
220. 48. 14	28. 24. 37	90	8	déterminée par le *n.° 89.*
220. 49. 6	27. 22. 55	91	7	déterminée par ε du Bouvier.
222. 9. 40	27. 42. 53	92	8	déterminée par la même ε.
222. 35. 14	28. 2. 41	93	8	déterminée par la même ε.
223. 25. 14	29. 8. 4	94	6	déterminée par le *n.° 89.*
223. 34. 47	27. 57. 16	95	8	déterminée par ε du Bouvier, Comète comparée le 6 Mars.
223. 43. 44	29. 56. 6	96	7	déterminée par la 94.ᵉ
224. 40. 1	29. 21. 57	97	8	déterminée par β de la Couronne, Comète comp. le 2 Mars.
225. 24. 14	30. 3. 38	98	6	déterminée par la 97.ᵉ
232. 38. 36	29. 54. 41	99	8	déterminée par β de la Couronne, Comète comp. le 28 Février.
233. 10. 37	30. 44. 32	100	7	déterminée par le *n.° 101.*
233. 26. 29	30. 50. 44	101	8	déterminée par le *n.° 105.*
234. 9. 21	30. 42. 3	102	8	déterminée par le *n.° 101.*

Ascension droite. D. M. S.	Déclinaison des Étoiles. D. M. S.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.° des Étoiles.	Noms des Étoiles qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
234. 53. 36	30. 35. 20	103.	8	déterminée par ι de la Couronne, Comète comp. le 27 Février.
235. 47. 6	31. 16. 39	104	7	déterminée par le *n.° 101*.
235. 47. 14	30. 33. 44	105	8	déterminée par ι de la Couronne, Comète comp. les 26 & 27 Février.
236. 37. 51	30. 10. 48	106	7	déterminée par β de la Couronne.
237. 28. 44	30. 39. 11	107	8	déterminée par ι de la Couronne, Comète comp. les 26 & 28 Février.
237. 32. 51	30. 3. 47	108	7	déterminée par β de la Couronne.
237. 37. 2	31. 1. 28	109	8	déterminée par ξ de la Couronne, ξ & ζ d'Hercule, Comète comparée le 25 Février.
239. 24. 36	30. 30. 59	110	8	déterminée par ι de la Couronne.
242. 56. 47	31. 2. 57	111	8	déterminée par ξ de la Couronne.
244. 26. 40	32. 35. 20	112	8	déterminée par la 23.e d'Hercule, suiv.^t Flamstéed.
254. 54. 49	31. 30. 20	113	7	déterminée par ε d'Hercule.
257. 16. 34	31. 47. 40	114	7	déterminée par la même ε.
258. 12. 52	31. 29. 7	115	7	déterminée par la même ε.
258. 26. 37	32. 12. 32	116	8	déterminée par la même ε.
260. 14. 42	33. 56. 11	117	7	déterminée par la même ε, Comète comparée le 9 Février matin.
262. 39. 42	32. 52. 24	118	7	déterminée par la 72.e d'Hercule.
263. 46. 57	33. 5. 23	119	8	déterminée par la même.
264. 2. 42	33. 19. 32	120	7	déterminée par la même.
266. 55. 27	32. 42. 15	121	7	déterminée par la même.
267. 20. 23	33. 26. 49	122	7	déterminée par le *n.° 125*, Comète comparée le 1.er Février matin.
268. 8. 8	33. 14. 44	123	6	déterminée par le *n.° 122*.
268. 22. 53	33. 20. 3	124	6	déterminée par la même *122*.
270. 55. 23	33. 24. 33	125	7	déterminée par β de la Lyre, Comète comparée les 31 Mars & 1.er Février matin.
271. 1. 28	33. 14. 56	126	8	déterminée par le *n.° 125*.
272. 16. 8	33. 27. 55	127	7	déterminée par la même *125*, Comète comparée le 31 Janvier matin.
275. 47. 45	33. 29. 15	128	7	déterminée par la même *125*.
277. 7. 53	33. 17. 50	129	5	déterminée par la même *125*.
278. 3. 53	33. 29. 41	130	7	déterminée par la même *125*.
280. 6. 0	33. 32. 3	131	7	déterminée par la même *125*.
280. 19. 23	33. 27. 27	132	7	déterminée par β de la Lyre.

ASCENSION droite.	DÉCLINAISON des ÉTOILES.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.° des Étoiles.	NOMS DES ÉTOILES qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
D. M. S.	D. M. S.			
282. 11. 12	32. 37. 53	133	6	déterminée par γ de la Lyre, Comète comparée le 25 Janvier matin.
284. 8. 40	31. 25. 38	134	6	déterminée par λ de la Lyre, Comète comparée le 23 Janvier matin.
288. 52. 39	27. 40. 8	135	7	déterminée par β du Cygne.
289. 15. 2	28. 20. 1	136	8	déterminée par le *n.° 135.*
289. 52. 32	29. 0. 52	137	7	déterminée par le *n.° 136.*
290. 27. 46	27. 30. 48	138	6	Étoile double de β du Cygne, déterminée par β.

POSITIONS de quatorze Nébuleuses rapportées sur la Carte de la route apparente de la Comète de 1779.

ASCENSION droite.	DÉCLINAISON des NÉBULEUSES.	Numéros.	NOMS DES CONSTELLATIONS où se trouvent les Nébuleuses.
D. M. S.	D. M. S.		
182. 41. 5	5. 42. 5	1	nébuleuse dans la Vierge, découverte le 11 Mai 1779.
184. 26. 58	9. 16. 9	2	dans la Vierge, découverte le 19 Février 1771, Comète comparée les 22 & 23 Avril.
186. 37. 23	13. 2. 42	3	dans la Vierge, découverte le 15 Avril 1779.
187. 41. 38	12. 52. 36	4	dans la Vierge, découverte le 15 Avril 1779.
188. 6. 53	12. 46. 2	5	dans la Vierge, découverte le 15 Avril 1779.
191. 27. 38	22. 52. 31	6	dans la chevelure de Bérénice, découverte le 1.er Mars 1780.
195. 30. 26	19. 22. 44	7	au-dessous de la chevelure de Bérénice, découverte le 27 Février 1777, Comète comparée les 27 & 28 Mars.
196. 5. 30	43. 12. 37	8	entre les Chiens de chasse, découv. par M. Méchain en 1779.
202. 51. 19	29. 32. 57	9	dans les Chiens de chasse, découverte le 3 Mai 1764.
248. 18. 48	36. 54. 44	10	à la cuisse droite d'Hercule, découverte le 1.er Juin 1764.
281. 20. 8	32. 46. 3	11	dans la Lyre, découverte le 31 Janvier 1779.
287. 0. 1	29. 48. 14	12	entre la Lyre & la tête du Cygne, découverte le 19, déterminée le 23 Janvier 1779.
295. 59. 9	18. 13. 0	13	Près de la Flèche, découv. par M. Méchain, le 28 Juin 1780.
297. 21. 41	22. 4. 0	14	dans le Renard, découverte le 12 Juillet 1764.

J'ai

J'ai déjà publié un grand Mémoire ſur les Nébuleuſes & les amas d'Étoiles que l'on obſerve ſur l'horizon de Paris. Voyez *Mém. de l'Acad. ann. 1771, p. 435;* la *Connoiſſ. des Temps pour 1783, page 225;* & celle de *1784, p. 227.*

Je rapporterai en finiſſant ce Mémoire, différens élémens de cette Comète : les premiers ont été trouvés par M. le Préſident Bochard de Saron, Honoraire de cette Académie, d'après trois de mes obſervations, celles des 18 Janvier, 11 Février & 6 Mars; les deuxièmes, par M. le Chevalier d'Angos, d'après la première de mes obſervations de chaque jour; les troiſièmes, par M. Méchain, d'après ſes obſervations; & les quatrièmes, par M. Reggio, d'après les obſervations faites à Milan.

ÉLÉMENS.	M. DE SARON.	M. D'ANGOS.	M. MÉCHAIN.	M. REGGIO.
	S. D. M. S.	*S. D. M. S.*	*S. D. M. S.*	*S. D. M. S.*
Lieu du nœud aſcendant......	0. 25. 3. 1	0. 25. 3. 57	0. 25. 5. 51	0. 25. 4. 19
Inclinaiſon de l'orbite.........	32. 26. 14	32. 25. 30	32. 24. 0	32. 24. 44
Lieu du périhélie dans l'orbite..	2. 27. 14. 0	2. 27. 13. 40	2. 27. 13. 11	2. 27. 12. 55
Logarithme de la diſt. périhélie.	0,713218	0,713187	0,713127	0,712946
Paſſage au périhélie. Janv. 1779.	$4^j\ 2^h\ 30'\ 0''$	$4^j\ 2^h\ 24'\ 30''$	$4^j\ 2^h\ 12'\ 0''$	$4^j\ 2^h\ 54'\ 20''$
Sens du mouvement direct.				

TABLE des Obſervations qui ont été employées à la recherche des Élémens, par M. le Préſident de Saron.

1779.	TEMPS moyen.	ASCENSION droite obſervée.	DÉCLIN. Boréale obſervée.	LONGITUDE obſervée.	LONGITUDE calculée.	DIFFÉR. avec la Théorie.	LATITUDE Boréale obſervée.	LATITUDE Boréale calculée.	DIFFÉR. avec la Théorie
	H. M. S.	*D. M. S*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*
Janv. 18	18. 38. 0	289. 6. 46	29. 32. 41	297. 3. 35	297. 3. 35	—0. 0	51. 13. 56	51. 13. 56	—0. 0
Févr. 11	17. 34. 30	256. 26. 42	33. 34. 23	249. 30. 54	249. 30. 52	—0. 2	56. 4. 55	56. 4. 59	+0. 4
Mars. 6	11. 23. 0	224. 8. 59	28. 40. 15	210. 24. 35	210. 24. 35	—0. 0	43. 6. 58	43. 6. 58	—0. 0
26	8. 50. 40	200. 25. 35	19. 47. 28	190. 41. 4	190. 40. 14	—0. 50	26. 11. 25	26. 9. 10	—2. 15
Avril 19	9. 49. 54	185. 52. 25	10. 12. 48	181. 16. 25	181. 17. 57	+1. 32	11. 41. 51	11. 39. 53	—1. 58
Mai.. 11	10. 11. 6	181. 51. 8	4. 20. 6	180. 1. 52	180. 0. 17	—1. 35	4. 42. 50	4. 41. 55	—0. 55
17	9. 52. 0	181. 41. 35	3. 4. 0	180. 19. 58	180. 20. 0	+0. 2	3. 29. 14	3. 26. 49	—2. 25

D'après mes trois premières obſervations des 18, 22 & 23 Janvier, M. l'abbé Boſcovich, Correſpondant de l'Académie, avoit recherché les élémens de cette Comète, par ſa méthode graphique d'approximation, qui eſt très-abrégée, & qu'il a publiée dans le *VI.e Tome des Mémoires des Savans Étrangers.* M. le Préſident de Saron avoit également employé la même méthode graphique, avant de faire le calcul par la méthode ordinaire; les élémens qui en ſont réſultés diffèrent peu des autres: les voici.

ÉLÉMENS.	M. DE SARON.	M. BOSCOVICH.
	S. D. M. S.	*S. D. M.*
Lieu du nœud aſcendant......	0. 26. 31. 31	0. 26. 10
Inclinaiſon de l'orbite........	32. 18. 0	32. 32
Lieu du périélie dans l'orbite...	2. 27. 33. 42	2. 25. 41
Diſtance périhélie...........	0,7139	0,715
Paſſage au périhélie, Janvier...	$4^j\ 3^h\ 30'$	$3^j\ 20^h$

Ces élémens, que l'on trouve promptement par trois premières obſervations d'une Comète, ſervent & abrègent de beaucoup le travail & les premiers tâtonnemens que l'on eſt toujours obligé de faire par les calculs de la méthode ordinaire.

M. le Chevalier d'Angos, Officier au régiment de Navarre, déjà connu avantageuſement de l'Académie, m'ayant demandé les obſervations que j'avois faites de la Comète, pour calculer les élémens de ſon orbite ; je lui envoyai ſoixante-trois obſervations, qui étoient la première obſervation faite chaque jour, priſes de la Table qui précède.

Voici l'extrait de la Lettre que M. le Chevalier d'Angos m'a fait l'honneur de m'écrire.

« J'ai l'honneur de vous adreſſer, Monſieur, les élémens » que j'ai déduits des ſoixante-trois obſervations que vous avez » eu la bonté de me communiquer. J'y joins une Table qui

renferme le temps moyen des obſervations, les longitudes & « les latitudes de la Comète, déduites des aſcenſions droites « & déclinaiſons que vous avez déterminées; les longitudes & « les latitudes qui réſultent de la théorie; enfin, la comparaiſon « des unes & des autres. «

J'ai d'abord employé, pour avoir une orbite parabolique « approchée, une méthode analytique aſſez ſemblable à celle « que l'on trouve dans l'immortel Ouvrage de Newton; je ſuis « revenu enſuite aux méthodes de fauſſes poſitions : j'ai fait « différentes combinaiſons pour reſſerrer les limites des erreurs, « & vous verrez par la Table que j'y ai aſſez bien réuſſi. «

Nota. Dans la Table ſuivante, la différence des longitudes pour « le 13 Février, va à 2′ 1″, & elle eſt dans un ſens contraire à celles « qui précèdent & qui ſuivent; mais auſſi m'avez-vous mandé que « cette obſervation eſt marquée *douteuſe* dans votre Journal, à cauſe « des nuages. »

TABLE des positions de la Comète, déduites des Observations, & comparées aux positions calculées d'après les Élémens, par M. le Chevalier d'Angos.

1779.	TEMPS moyen.	LONGITUD. observées.	LONGITUD. calculées.	DIFFÉR. des Longitud.	LATITUD. observées.	LATITUD. calculées.	DIFFÉR. des Latitudes.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.
Janv. 18	18. 19. 14	297. 4. 30	297. 5. 11	+ 0. 41	51. 13. 7	51. 13. 23	+ 0. 16
22	17. 26. 16	290. 10. 32	290. 11. 38	+ 1. 6	53. 44. 32	53. 45. 20	+ 0. 48
23	17. 45. 17	288. 17. 18	288. 18. 17	+ 0. 59	54. 17. 5	54. 17. 0	— 0. 5
24	17. 44. 36	286. 23. 10	286. 23. 31	+ 0. 21	54. 45. 13	54. 45. 21	+ 0. 8
30	17. 14. 6	274. 22. 2	274. 21. 30	— 0. 32	56. 38. 15	56. 38. 40	+ 0. 25
31	17. 58. 54	272. 14. 8	272. 15. 1	+ 0. 53	56. 48. 53	56. 48. 15	— 0. 38
Févr. 8	17. 59. 6	255. 35. 1	255. 36. 51	+ 1. 50	56. 41. 10	56. 42. 0	+ 0. 50
10	17. 19. 11	251. 33. 32	251. 34. 33	+ 1. 1	56. 18. 52	56. 19. 44	+ 0. 52
11	15. 5. 53	249. 43. 35	249. 45. 22	+ 1. 47	56. 6. 18	56. 7. 0	+ 0. 42
13	16. 49. 14	245. 39. 28	245. 37. 27	— 2. 1	55. 32. 6	55. 31. 55	— 0. 11
17	14. 29. 3	238. 3. 45	238. 4. 28	+ 0. 43	54. 4. 8	54. 4. 35	+ 0. 27
18	16. 1. 26	236. 3. 55	236. 4. 38	+ 0. 43	53. 35. 25	53. 36. 6	+ 0. 41
20	13. 4. 4	232. 37. 8	232. 37. 26	+ 0. 18	52. 40. 26	52. 41. 7	+ 0. 41
25	11. 40. 56	223. 58. 29	224. 0. 9	+ 1. 40	49. 48. 6	49. 48. 1	— 0. 5
26	13. 34. 46	222. 13. 1	222. 13. 24	+ 0. 23	49. 5. 57	49. 5. 41	— 0. 16
27	11. 37. 4	220. 43. 13	220. 44. 18	+ 1. 5	48. 28. 8	48. 28. 6	— 0. 2
28	11. 28. 1	219. 8. 55	219. 9. 57	+ 1. 2	47. 46. 1	47. 45. 34	— 0. 27
Mars 1	13. 56. 18	217. 27. 42	217. 27. 34	— 0. 8	46. 56. 43	46. 57. 33	+ 0. 50
2	16. 20. 56	215. 47. 20	215. 47. 38	+ 0. 18	46. 7. 6	46. 8. 14	+ 1. 8
3	11. 3. 50	214. 38. 20	214. 38. 26	+ 0. 6	45. 31. 2	45. 32. 11	+ 1. 9
4	10. 24. 34	213. 14. 24	213. 14. 14	— 0. 10	44. 45. 43	44. 46. 28	+ 0. 45
5	10. 3. 55	211. 51. 8	211. 50. 56	— 0. 12	43. 57. 51	43. 59. 11	+ 1. 20
6	10. 48. 13	210. 26. 48	210. 26. 13	— 0. 35	43. 8. 1	43. 8. 39	+ 0. 38
7	9. 59. 27	209. 9. 25	209. 8. 56	— 0. 29	42. 20. 11	42. 20. 38	+ 0. 27
8	9. 26. 6	207. 52. 42	207. 52. 55	+ 0. 13	41. 31. 4	41. 31. 18	+ 0. 14
9	9. 4. 56	206. 38. 50	206. 38. 24	— 0. 26	40. 41. 4	40. 41. 0	— 0. 4
10	9. 36. 11	205. 23. 40	205. 23. 27	— 0. 13	39. 48. 20	39. 48. 12	— 0. 8
11	9. 12. 54	204. 13. 22	204. 13. 32	+ 0. 10	38. 57. 10	38. 57. 0	— 0. 10
12	9. 23. 19	203. 4. 22	203. 4. 10	— 0. 12	38. 4. 21	38. 4. 20	— 0. 1
13	9. 50. 45	201. 56. 8	201. 56. 14	+ 0. 6	37. 11. 28	37. 10. 44	— 0. 44
17	11. 14. 13	197. 48. 18	197. 48. 13	— 0. 5	33. 36. 28	33. 37. 20	+ 0. 52
21	9. 43. 32	194. 20. 24	194. 20. 13	— 0. 11	30. 14. 24	30. 14. 5	— 0. 19

1779.	TEMPS moyen.	LONGITUD. observées.	LONGITUD. calculées.	DIFFÉR. des Longitud.	LATITUD. observées.	LATITUD. calculées.	DIFFÉR. des Latitudes.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.
Mars. 22	10. 28. 57	193. 30. 34	193. 30. 49	+ 0. 15	29. 22. 9	29. 22. 14	+ 0. 5
23	9. 12. 59	192. 47. 49	192. 45. 53	— 1. 56	28. 35. 9	28. 35. 16	+ 0. 7
24	8. 50. 30	192. 4. 0	192. 3. 36	— 0. 24	27. 47. 2	27. 46. 58	— 0. 4
25	8. 11. 58	191. 22. 22	191. 22. 11	— 0. 11	27. 0. 4	26. 59. 47	— 0. 17
26	8. 24. 59	190. 42. 2	190. 41. 1	— 1. 1	26. 12. 4	26. 11. 46	— 0. 18
27	7. 51. 45	190. 3. 45	190. 2. 59	— 0. 46	25. 26. 53	25. 27. 10	+ 0. 17
28	8. 54. 28	189. 24. 16	189. 23. 48	— 0. 28	24. 39. 16	24. 38. 13	— 1. 3
29	0 . 33. 7	188. 46. 35	188. 45. 41	— 0. 54	23. 51. 0	23. 49. 10	— 1. 50
30	9. 15. 38	188. 13. 54	188. 13. 4	— 0. 50	23. 9. 31	23, 8. 2	— 1. 29
31	12. 27. 33	187. 37. 11	187. 36. 32	— 0. 39	22. 21. 3	22. 19. 26	— 1. 37
Avril. 1	7. 22. 42	187. 12. 38	187. 11. 57	— 0. 41	21. 47. 49	21. 46. 15	— 1. 34
2	7. 59. 8	186. 42. 35	186. 41. 23	— 1. 12	21. 5. 27	21. 3. 52	— 1. 35
3	8. 23. 47	186. 13. 23	186. 12. 32	— 0. 51	20. 24. 2	20. 22. 46	— 1. 16
4	8. 53. 42	185. 45. 41	185. 45. 23	— 0. 18	19. 43. 27	19. 42. 33	— 0. 54
5	8. 55. 45	185. 20. 1	185. 19. 14	— 0. 47	19. 4. 55	19. 4. 7	— 0. 48
6	8. 20. 27	184. 55. 33	184. 55. 26	— 0. 7	18. 28. 15	18. 27. 32	— 0. 43
7	8. 32. 30	184. 32. 55	184. 31. 56	— 0. 59	17. 51. 48	17. 50. 46	— 1. 2
9	8. 8. 28	183. 50. 35	183. 49. 34	— 1. 1	16. 41. 45	16. 41. 0	— 0. 45
13	8. 38. 35	182. 37. 1	182. 36. 45	— 0. 16	14. 31. 11	14. 30. 46	— 0. 25
14	8. 28. 29	182. 21. 40	182. 21. 21	— 0. 19	14. 1. 1	14. 0. 46	— 0. 15
15	9. 48. 15	182. 6. 4	182. 5. 23	— 0. 41	13. 30. 28	13. 30. 7	— 0. 21
17	8. 18. 18	181. 40. 20	181. 40. 21	+ 0. 1	12. 35. 38	12. 35. 25	— 0. 13
18	9. 54. 36	181. 28. 38	181. 27. 38	— 1. 0	12. 8. 4	12. 6. 43	— 1. 21
19	9. 49. 53	181. 16. 26	181. 16. 41	+ 0. 15	11. 41. 52	11. 40. 41	— 1. 11
20	9. 48. 24	181. 6. 40	181. 6. 29	— 0. 11	11. 16. 40	11. 15. 22	— 1. 18
21	9. 59. 38	180. 56. 33	180. 56. 58	+ 0. 25	10. 51. 49	10. 50. 33	— 1. 16
22	10. 22. 4	180. 47. 20	180. 48. 9	+ 0. 49	10. 27. 46	10. 26. 16	— 1. 30
23	9. 33. 29	180. 40. 23	180. 40. 29	+ 0. 6	10. 5. 54	10. 3. 50	— 2. 4
Mai.. 11	10. 11. 5	180. 1. 51	180. 0. 1	— 1. 50	4. 42. 48	4. 42. 41	— 0. 7
15	9. 52. 6	180. 12. 23	180. 11. 42	— 0. 41	3. 52. 41	3. 51. 19	— 1. 22
17	9. 50. 58	180. 19. 50	180. 19. 44	— 0. 6	3. 29. 13	3. 27. 36	— 1. 37

Cette Comète eſt nouvelle, c'eſt-à-dire qu'elle ne reſſemble à aucune de celles dont les élémens ont été donnés juſqu'à préſent : celle-ci fait la ſoixante-quatrième de calculée, de

manière à pouvoir la reconnoître dans le temps qu'elle reparoîtra.

RECUEIL des Obſervations de la Comète de 1779.

À PARIS.

La Comète a été obſervée à l'Obſervatoire royal.

Obſervée auſſi par M. Méchain, qui a donné le Mémoire de ſes obſervations à l'Académie, le 12 Mai 1779, avec les élémens de la Comète, qu'il en a déduits d'après ſes propres obſervations.

À BERLIN.

La Comète fut découverte à Berlin le 6 Janvier, par M. Bode, Aſtronome, de l'Académie royale des Sciences de cette ville; je n'eus connoiſſance de cette découverte que le 27 Janvier par M. Baër, Correſpondant de notre Académie, qui me dit: *je viens de lire dans une Gazette allemande, la découverte de votre Comète à Berlin.* Je le priai de me faire paſſer cette Gazette avec la traduction de l'article qui la concernoit: la voici.

Extrait de la Gazette de Hambourg, n.° 7, *du 12 Janvier.*

Le 6 de ce mois, à 7 heures $\frac{3}{4}$ du ſoir, M. Bode, Aſtronome, découvrit ici, à l'Oueſt-nord-oueſt, près de l'horizon, une Comète qu'on ne pouvoit que difficilement diſtinguer à l'œil; mais avec un téleſcope de 7 pieds, on la voyoit avec un noyau brillant, aſſez vif, avec une queue d'environ 25 minutes; elle étoit ſituée dans la voie lactée, entre le Dauphin & le Renard: en meſurant ſa diſtance de l'étoile α du Dauphin & de l'étoile vingt-neuvième dans le Renard, ſelon Flamſtéed, M. Bode détermina la longitude de la Comète de $12^d\ 28'$, & ſa déclinaiſon ſeptentrionale de $39^d\ 6'$.

A 9 heures, la Comète ſe coucha, & elle devoit ſe lever

à 5 heures du matin, mais un ciel entièrement couvert empêcha de l'obſerver.

Le 7 au ſoir, le ciel s'éclaircit un peu vers les 7 heures $\frac{1}{2}$, & l'on pouvoit obſerver la Comète pendant quelques minutes; elle étoit éloignée d'environ un degré de l'endroit du ciel où elle s'étoit trouvée la veille, de manière que ſa marche étoit dans une direction oppoſée à celle des ſignes, avec une augmentation de latitude boréale, s'étant approchée de l'étoile dix-huitième de la Flèche. Les vapeurs empêchèrent de faire des obſervations ultérieures, & depuis ce temps le ciel a toujours été couvert.

Dans la Gazette, *n.º 16*, on trouve la ſuite de ces obſervations.

Le temps couvert que nous avons eu ici, depuis près de ſeize jours, a interrompu les obſervations de la Comète.

Le 20 Janvier, M. Bode l'obſerva entre les étoiles ſeize, dix-ſept, vingt-deux & vingt-quatrième du Renard, ſelon Flamſtéed, ſous une longitude de $10^{s} 9^{d}$, & une latitude boréale de 43 degrés $\frac{1}{2}$: ce ne fut que le 21 au ſoir que le ciel s'éclaircit un peu, & à 6 heures on obſerva la Comète au téleſcope de 7 pieds; elle paroiſſoit à l'Oueſt-nord-oueſt, très-bas & dans une lumière foible où il y avoit des vapeurs.

Sa grandeur apparente ne paroiſſoit pas avoir augmentée depuis le 10; elle avoit pris ſon chemin par le cou du Cygne, en s'avançant vers la Lyre, par un mouvement rétrograde & une latitude boréale qui alloit en augmentant: elle ſe trouvoit à peu-près ſur la ligne qui va de β du bec du Cygne à l'étoile γ de la Lyre, mais plus près de la dernière.

Après 6 heures, le ciel ſe couvrit entièrement.

Si le temps peut s'éclaircir, on la verra au premier jour ſous la grande étoile de la Lyre: depuis le 6, ſon mouvement progreſſif a fait un chemin de 20 degrés dans un arc des plus grands du ciel; ſa courſe apparente a beaucoup de reſſemblance à celle de la Comète de 1707, mais non pas ſa courſe véritable.

À *White-Kinghts, quinze lieues Nord-ouest de Londres.*

M. le chevalier Englefield, de la Société royale de Londres, m'a mandé dans sa Lettre du 3 Mars 1779, « Notre ami de » Magellan m'a communiqué votre Notice sur la découverte » que vous venez de faire d'une nouvelle Comète; je l'ai cher- » chée, mais le temps toujours couvert m'a empêché de la voir: » ce n'a été que le 14 Février que j'ai commencé à l'apercevoir; » & depuis ce jour j'ai fait les observations suivantes.

1779.	Temps vrai.	Ascension droite.	Déclinais. Boréale.
	H.	D. M.	D. M.
Février. 14	13	252. 32	33. 31
16	13	249. 32 ½	33. 14 ¾
17	12	248. 21 ¼	32. 56 ¾
18	13	246. 59 ¼	32. 37 ¼
19	12	245. 31 ¼	32. 45 ¾
24	14	238. 10	31. 39
27	11	234. 3	31. 2

La Comète fut comparée le 14 à l'étoile *d* d'Hercule, les 16, 17, 18 & 19 avec ζ d'Hercule, les 24 & 27 à ι de la Couronne.

À *Milan.*

La Comète y fut observée par M.rs Cesaris & Reggio; leurs observations sont rapportées dans les Éphémérides de Milan pour 1781, *page 247.* Elles sont aussi rapportées dans celles de 1782, avec quelques changemens occasionnés par le mouvement d'*Arcturus*, qu'on n'avoit pas employés. Voici la Table des positions de la Comète, prises des Éphémérides de 1782.

1779.

1779.	TEMPS moyen.	ASCENSION droite de la Comète observée.	DÉCLIN. Boréale de la Comète observée.	DIFFÉRENCE en ascension droite entre la Comète & les Étoiles.	DIFFÉRENCE en déclinaison entre la Comète & les Étoiles.	POSITIONS DES ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.
Mars 8	13. 18. 33	221. 18. 26	27. 53. 8	2. 28. 12 +	0. 23. 36 —	ε Bouvier.... A. D. 218. 50. 14 D. B. 28. 0. 44
10	12. 6. 22	218. 38. 55	27. 4. 4	12. 41. 10 —	0. 23. 10 —	
11	11. 12. 4	217. 20. 55	26. 40. 11	13. 59. 10 —	0. 47. 3 —	
12	10. 40. 0	216. 4. 26	26. 15. 50	15. 15. 39 —	1. 11. 24 —	α Couronne.. A. D. 231. 20. 5 D. B. 27. 27. 14
13	10. 44. 41	214. 47. 34	25. 48. 52	16. 32. 31 —	1. 38. 22 —	
14	9. 48. 51	213. 33. 50	25. 22. 58	17. 46. 15 —	2. 4. 16 —	
15	11. 5. 15	212. 15. 4	24. 54. 56	6. 35. 10 —	3. 5. 58 —	ε du Bouvier
18	10. 54. 24	208. 40. 47	23. 21. 44	2. 43. 12 —	3. 11. 37 +	
19	9. 25. 37	207. 36. 46	23. 5. 4	3. 47. 13 —	2. 44. 54 +	
20	9. 43. 0	206. 30. 25	22. 36. 32	4. 53. 34 —	2. 16. 25 +	
22	9. 41. 34	204. 18. 56	21. 39. 51	7. 5. 3 —	1. 19. 44 +	*Arcturus*..... A. D. 211. 23. 59 D. B. 20. 20. 7
23	9. 15. 48	203. 18. 55	21. 11. 49	8. 5. 4 —	0. 51. 42 +	
24	8. 48. 26	202. 20. 40	20. 44. 34	9. 3. 19 —	0. 24. 27 +	
26	10. 12. 46	200. 22. 47	19. 47. 25	5. 39. 50 —	0. 16. 33 +	
27	11. 8. 56	199. 25. 17	19. 17. 42	6. 37. 20 —	0. 13. 10 —	
Avril 2	8. 12. 21	194. 42. 17	16. 39. 27	11. 20. 20 —	2. 51. 25 —	
3	8. 6. 15	194. 0. 29	16. 13. 37	12. 2. 8 —	3. 17. 15 —	η du Bouvier. A. D. 206. 2. 37 D. B. 19. 30. 52
4	8. 0. 58	193. 19. 39	15. 48. 15	12. 42. 58 —	3. 42. 37 —	
5	8. 16. 39	192. 38. 55	15. 23. 5	13. 23. 42 —	4. 7. 47 —	
6	8. 57. 14	192. 2. 36	14. 58. 15	14. 0. 1 —	4. 32. 37 —	
7	8. 38. 46	191. 24. 31	14. 33. 21	1. 23. 31 —	2. 24. 18 +	
8	8. 50. 24	190. 49. 32	14. 9. 15	1. 58. 30 —	2. 0. 12 +	
10	8. 47. 35	189. 44. 19	13. 23. 1	3. 3. 43 —	1. 13. 58 +	
11	9. 9. 18	189. 13. 0	13. 0. 19	3. 35. 2 —	0. 51. 16 +	
12	9. 24. 23	188. 43. 25	12. 38. 10	4. 4. 37 —	0. 29. 7 +	ε de la Vierge. A. D. 192. 48. 2 D. B. 12. 9. 3
13	9. 24. 31	188. 15. 27	12. 16. 12	4. 32. 35 —	0. 7. 9 +	
14	8. 29. 47	187. 49. 21	11. 55. 4	4. 58. 41 —	0. 13. 59 —	
15	8. 31. 55	187. 24. 13	11. 33. 40	5. 23. 49 —	0. 35. 23 —	
16	8. 37. 50	186. 59. 55	11. 13. 21	5. 48. 7 —	0. 55. 42 —	
19	10. 41. 23	185. 52. 4	10. 12. 17	36. 43. 5 +	2. 50. 16 —	*Regulus*..... A. D. 149. 8. 59 D. B. 12. 2. 23
21	9. 24. 34	185. 14. 51	10. 34. 13	7. 33. 11 —	2. 34. 50 —	ε, ♍.

À TOULOUSE.

La Comète y fut observée par M.rs Garipuy & Darquier; les observations de M. Garipuy ont été envoyées à M. le Monnier, qui les a communiquées à l'Académie: voici celles de M. Darquier, qu'il m'a envoyées en Septembre 1779; il a desiré que je les rapporte à la suite de mon Mémoire, avec un Catalogue d'Étoiles qu'il a déterminées.

TABLE des Positions de la Comète & des Étoiles qui ont été employées à sa détermination.

1779.	TEMPS vrai.	ASCENSION droite de la Comète.	DÉCLINAISON Boréale de la Comète	ASCENSION droite des Étoiles.	DÉCLINAIS. Boréale des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettr. de Bayer & N.° des Étoiles.	ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.			
Févr.. 11	13. 12. 14	256. 40. 57	33. 34. 26	257. 17. 33	33. 20. 38	5	u	d'Hercule.
15	13. 59. 9	250. 11. 49	33. 14. 41	250. 41. 6	33. 31. 32	5	200	déter. par β, Lyre.
16	12. 4. 30	249. 48. 48	33. 6. 58	248. 49. 38	33. 6. 49	5	193	déter. par η Couron.
17	11. 56. 38	248. 26. 42	32. 57. 55	....	....	.....	.....	je crois la même.
18	12. 37. 3	246. 57. 58	32. 51. 29	243. 37. 8	32. 51. 6	5	23	d'Hercule.
19	12. 52. 1	245. 30. 56	32. 42. 45	243. 37. 8	32. 51. 6	5	23	
20	12. 18. 49	244. 8. 37	32. 31. 32	231. 0. 28	37. 7. 29	4	θ	
21	12. 33. 41	242. 41. 52	32. 19. 45	231. 0. 28	37. 7. 29	4	θ	
22	11. 42. 20	241. 18. 46	32. 7. 39	231. 0. 28	37. 7. 29	4	θ	
23	11. 31. 47	239. 52. 28	31. 56. 14	231. 0. 28	37. 7. 29	4	θ	de la Couronne.
24	11. 12. 10	238. 27. 31	31. 43. 43	231. 0. 28	37. 7. 29	4	θ	
25	11. 3. 47	237. 1. 28	31. 31. 2	231. 0. 28	37. 7. 29	4	θ	
26	11. 15. 49	235. 33. 17	31. 17. 38	243. 21. 58	31. 26. 39	5	ξ	
27	10. 30. 53	234. 10. 11	31. 1. 1	215. 34. 45	31. 20. 55	4	ρ	du Bouvier.
28	10. 47. 1	232. 44. 4	30. 46. 50	231. 57. 41	30. 46. 35	6	122	déter. par σ Bouvier.
Mars.. 7	9. 46. 35	222. 51. 54	28. 22. 53	194. 9. 20	28. 48. 10	.....	41	de Bérénice.
8	9. 42. 43	221. 27. 17	27. 58. 17	218. 50. 13	28. 0. 47	3	ε	du Bouvier.
9	10. 21. 59	220. 3. 18	27. 32. 30	218. 50. 13	28. 0. 47	3	ε	
10	9. 27. 47	218. 45. 16	27. 9. 39	231. 20. 22	27. 28. 7	1	α	
11	9. 15. 51	217. 26. 47	26. 42. 50	233. 23. 17	27. 0. 6	4	γ	de la Couronne.
	10. 31. 59	217. 22. 16	26. 42. 45	233. 23. 17	27. 0. 6	4	γ	
13	11. 30. 38	214. 40. 32	25. 50. 33	229. 30. 30	25. 52. 35	6	111	déter. par υ Bouvier.
14	8. 42. 41	213. 35. 24	25. 21. 37	256. 29. 47	25. 6. 48	5	δ	d'Hercule.
17	8. 34. 9	209. 55. 47	23. 57. 38	202. 38. 35	23. 37. 5	6	2	du Bouvier.
21	9. 21. 17	205. 22. 18	22. 8. 13	245. 11. 17	21. 58. 53	3	β	d'Hercule.
	9. 21. 17	205. 22. 23	22. 8. 4	204. 48. 40	22. 19. 24	5	6	du Bouvier.
22	8. 30. 50	204. 21. 59	21. 38. 23	202. 32. 3	21. 4. 43	6	1	
	9. 9. 51	204. 19. 44	21. 37. 42	206. 0. 16	21. 42. 30	6	19	
23	7. 59. 18	203. 21. 11	21. 12. 49	206. 0. 16	21. 42. 30	6	19	du Catalogue.
24	8. 1. 5	202. 21. 20	20. 42. 56	206. 0. 16	21. 42. 30	6	19	
	9. 6. 8	202. 18. 55	20. 41. 52	211. 24. 51	20. 20. 36	1	α	*Arcturus.*
25	9. 31. 3	201. 19. 39	20. 14. 41	211. 24. 51	20. 20. 36	1	α	

Je ne fus instruit de l'apparition de la Comète de 1779, que par la Gazette de France, qui arriva ici le 9 Février, dans laquelle M. Messier annonçoit la découverte qu'il venoit d'en faire.

Le temps avoit été couvert depuis le 26 Janvier jusqu'au 10 de Février, excepté le 6, & dans la nuit du 9 au 10, jour auquel je la cherchai vers minuit; je la trouvai au pli de la cuisse gauche d'Hercule, & suivant l'étoile *u* de cette constellation, elle en étoit à 2 minutes environ de temps, & un peu plus boréale.

C'est avec ma lunette achromatique de 42 pouces de foyer, que je la trouvai; comme il n'y avoit point de réticule, je n'obtins cette première détermination, que par la sortie de l'Étoile & de la Comète du champ de la lunette, vers les 3 heures $\frac{1}{4}$ après minuit; quoiqu'elle ne puisse pas s'éloigner beaucoup de la vérité, je ne la place pas cependant au rang de mes observations.

Le noyau étoit peu brillant; on pouvoit lui soupçonner une queue courte & assez diffuse: la Comète devint de plus en plus apparente jusqu'aux 20 & 21 Février, où je la voyois très-bien à la vue simple; les jours suivans, la clarté de la Lune, qui fut en opposition le 23, la rendit fort difficile à voir.

Le 18 Février, son noyau parut beaucoup plus brillant que la veille; en la considérant pendant quelque temps, je vis une petite Étoile qu'elle avoit occultée, & qui continua de s'éloigner occidentalement.

Ayant déterminé, comme je l'ai rapporté, la position de la Comète, le 10 Février vers minuit, par la sortie de la Comète, & de celle de l'étoile *u* d'Hercule du champ de la lunette, je disposai l'instrument dans la journée du 11, parallactiquement sur une méridienne tracée à la porte orientale de mon Observatoire; j'adaptai à la lunette un réticule rhomboïde, fait par Lenel, sous mes yeux: sa largeur fut déterminée par un grand nombre d'observations, de 25′ 15″ de grand cercle, & sa hauteur totale de 50′ 30″.

C'eſt avec cette lunette ainſi montée, que j'ai obſervé la Comète, depuis le 11 Février à $1^h\ 12'\ 14''$ après minuit, juſqu'au 25 de Mars à $9^h\ 31'$: pendant cet intervalle de temps, la Comète a parcouru $55^d\ 21'\ 28''$ en aſcenſion droite, contre l'ordre des ſignes, & $13^d\ 18'\ 2''$ de déclinaiſon, en s'éloignant du pôle, & pendant cet intervalle de temps, j'ai obtenu trente-deux obſervations.

Ce qu'il y a de ſingulier, c'eſt que cette Comète, qui s'eſt d'abord approchée du pôle, s'en eſt éloignée enſuite dans ſes limites de déclinaiſons, & pour ainſi dire ſtationnaire, quand j'ai pu l'obſerver ici; car du 10 au 11 Février, elle ne parcouroit que 2 minutes en rétrogradant.

Je joins à chaque obſervation l'aſcenſion droite & la déclinaiſon de l'Étoile à laquelle la Comète a été comparée, avec le temps vrai, l'aſcenſion droite, conclue par la différence des paſſages, en tenant compte du mouvement de la pendule & de la déclinaiſon, par la même différence aux côtés obliques du réticule, réduit en degrés par les méthodes connues de l'uſage du rhomboïde. La poſition ſtable & invariable de la lunette, de la direction du fil horizontal, ſuivant le parallèle, permettoit de donner une grande préciſion aux obſervations; j'ai été cependant obligé de les abandonner au 25 Mars, à cauſe de la poſition de ma lunette, vis-à-vis de la porte orientale de mon Obſervatoire, devenant trop incommode par ſa grande élévation, ne pouvant plus l'apercevoir.

Il a paru peu de Comètes qu'on ait pu obſerver auſſi bien, auſſi commodément & auſſi long-temps que celle-ci; elle a eu même l'avantage qu'on a pu l'obſerver long-temps, & preſque toujours au Méridien, & tous les Aſtronomes ſavent que les obſervations faites à ce point, ſont préférables à celles faites dans d'autres, hors du Méridien.

En commençant les obſervations de la Comète, je m'aperçus qu'elle ſe trouvoit ſouvent ſur le parallèle de pluſieurs Étoiles, dont la poſition n'étoit pas compriſe dans le grand Catalogue Britannique, & que pluſieurs des Étoiles de Flamſtéed avoient beſoin d'être rectifiées, comme la vingt-troiſième d'Hercule,

qui eſt moins avancée dans Flamſtéed, qu'elle ne devroit l'être d'environ 2′ 5″; la diſtance au pôle de δ de la Couronne trop foible de 5 minutes : ce ſont des remarques pareilles qui m'ont engagé à obſerver un grand nombres d'Étoiles.

Profitant de la poſition de ma lunette achromatique, que j'avois placée parallactiquement pour obſerver la Comète, qui étoit garnie d'un réticule rhomboïde, dont j'avois déterminé les dimenſions, comme je l'ai déjà rapporté, j'obſervai depuis le 10 Février juſqu'à la fin d'Avril, au fil horaire & aux côtés obliques du rhomboïde, les Étoiles qui paſſoient dans le même champ de la lunette que la Comète.

Comme le mouvement de la Comète en déclinaiſon étoit aſſez lent, j'avois la facilité de pouvoir obſerver deux jours de ſuite les mêmes Étoiles, & en faiſant paſſer le troiſième jour boréalement dans la lunette celles qui y avoient d'abord paſſé auſtralement, je les déterminai l'une par l'autre.

Les plus boréales le furent par δ d'Hercule & β de la Lyre, depuis le 33.e degré 57 minutes de déclinaiſon boréale, & par les autres Étoiles connues qui ſe ſont trouvées ſur la route, juſqu'au 20.e degré, ce qui forme une zone d'environ 14 degrés de largeur, & qui commence à 181 degrés d'aſcenſion droite, & s'étend juſqu'au 283.e

J'ai refait les mêmes obſervations à l'occident, dans le mois de Juillet, ainſi toutes les Étoiles ont été obſervées deux fois, la plupart l'ont été trois.

C'eſt le réſultat de ce travail qui formera le Catalogue que je rapporte, il ſera compoſé de dix colonnes.

La première, contiendra les numéros des Étoiles, depuis 1 juſqu'à 271.

La deuxième, la grandeur des Étoiles.

La troiſième, les aſcenſions droites.

La quatrième, leurs déclinaiſons.

Les cinquième & ſixième, la variation annuelle en aſcenſion droite & en déclinaiſon, calculée directement.

Les ſeptième & huitième, la différence de leurs poſitions avec celles du Catalogue britannique, les ſignes + ou −

les affectent ſelon que mes déterminations ſont plus fortes ou plus foibles que celles de Flamſtéed : en rapportant ces différences, je n'ai pas prétendu donner la préférence à mes déterminations ſur celles de l'Auteur célèbre de ce Catalogue; mais ſi quelqu'Aſtronome dans la ſuite reprend ce travail, on ſera plus à portée de démêler les mouvemens particuliers des Étoiles, ſi elles en ont.

La neuvième, les Étoiles qui appartiennent au Catalogue Britannique, déſignée par les lettres grecques & par les numéros.

La dixième, les conſtellations auxquelles appartiennent les Étoiles.

Les obſervations ne donnant que les aſcenſions droites & les déclinaiſons apparentes, je les ai réduites aux vraies & à l'époque du 1.er Janvier 1780, en les dépouillant de l'effet de l'aberration & de la nutation que j'ai calculées directement par les Tables, pour la très-majeure partie; les autres ont été calculées par celles qui ſont rapportées dans la Connoiſſance des Temps de 1781.

Les Aſtronomes qui ont obſervé la Comète, trouveront dans ce Catalogue des Étoiles auxquelles ils l'auront comparée, ſans avoir connu leur poſition.

Dans mon travail, j'ai rencontré quelques nébuleuſes, dont la plupart ſont inconnues; mais celle à laquelle je me ſuis arrêté, eſt une nébuleuſe ſituée entre les deux belles étoiles β & γ de la Lyre; elle eſt fort terne, mais parfaitement terminée; elle eſt groſſe comme Jupiter, & reſſemble à une Planète qui s'éteindroit: on trouvera ſa poſition déterminée dans mon Catalogue.

Si l'on conſidère que cette nébuleuſe, qui eſt placée entre deux belles Étoiles, qui ſont très-près l'une de l'autre, pouvant paſſer en même temps dans le même champ de la lunette, & vers leſquelles les Aſtronomes ont dû ſouvent tourner leurs inſtrumens, il y a lieu de s'étonner qu'on n'en ait pas parlé; il faut convenir auſſi qu'il faut une lunette aſſez forte pour l'apercevoir : ſeroit-ce une nouvelle production de la Nature ? ou auroit-elle la même date que les Étoiles qui l'environnent ?

CATALOGUE des Étoiles déterminées par M. DARQUIER, pour le 1.er Janvier 1780.

Numéros des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	ASCENSION droite.	DÉCLINAIS. Boréale.	VARIATION annuelle.		DIFFÉRENCE avec FLAMSTÉED.		Lettres de BAYER & Numéros.	NOMS des CONSTELLATIONS
				En ASCENS. droite.	En DÉCLINAISON.	En ASCENS. droite.	En DÉCLINAISON.		
		D. M. S.	D. M. S.	S. Déc.	S. Déc.	M. S.	M. S.		
1	6	181. 47. 23	28. 32. 23	45. 2	20. 0				
2	6	182. 24. 58	28. 18. 8	45. 7	20. 0	....	....	.....	Étoile double.
3	5	183. 51. 49	28. 29. 23	45. 5	20. 0	+ 1. 4	+ 0. 8	b	de Bérénice.
4	6	183. 59. 54	28. 2. 47	45. 4	20. 0	+ 0. 18	+ 0. 3	α	
5	7	185. 9. 27	28. 16. 26	45. 2	20. 0				
6	6	187. 31. 39	28. 20. 13	44. 8	19. 9				
7	7	188. 33. 55	28. 36. 5	44. 6	19. 8				
8	7	189. 19. 38	27. 57. 46	44. 5	19. 8				
9	5	189. 37. 55	28. 40. 32	44. 3	20. 0				
10	5	190. 15. 16	28. 13. 32	44. 2	19. 7	+ 1. 18	— 1. 10	31	de Bérénice.
11	7	201. 11. 48	23. 36. 34	43. 0	18. 0				
12	7	201. 53. 55	23. 38. 31	42. 9	18. 6				
13	6	202. 32. 21	20. 23. 28	43. 3	18. 5				
14	6	202. 32. 31	21. 4. 30	43. 2	18. 5	— 0. 27	— 0. 15	1	du Bouvier.
15	6	202. 39. 3	23. 37. 11	42. 8	18. 5	— 1. 24	+ 0. 16	2	
16	7	203. 31. 2	28. 41. 9	41. 8	18. 4				
17	5	204. 49. 8	22. 19. 12	42. 7	18. 2	— 0. 25	— 2. 30	6	du Bouvier.
18	7	204. 50. 40	20. 30. 3	43. 0	18. 2				
19	5	206. 0. 44	21. 42. 18	42. 7	18. 0				
20	7	206. 22. 57	23. 44. 54	42. 3	17. 9				
21	6	206. 38. 19	28. 34. 24	41. 3	17. 9	+ 0. 22	— 0. 16	9	du Bouvier.
22	6	207. 48. 27	28. 26. 42	41. 1	17. 7	+ 0. 18	+ 0. 2	11	
23	7	208. 2. 41	20. 16. 9	42. 7	17. 7				
24	6	208. 16. 43	23. 33. 22	42. 0	17. 7				
25	7	208. 22. 50	28. 33. 53	41. 7	17. 6				
26	6	208. 32. 8	20. 18. 56	42. 7	17. 6				
27	7	209. 21. 48	22. 15. 0	42. 2	17. 5				
28	6	209. 49. 29	21. 28. 41	42. 3	17. 4				
29	7	209. 51. 44	20. 49. 37	42. 4	17. 4				
30	8	209. 52. 40	20. 46. 11	42. 4	17. 4				
31	7	210. 29. 12	21. 38. 55	42. 1	17. 3				
32	6	211. 11. 30	20. 56. 9	42. 2	17. 2				
33	6	211. 24. 43	28. 46. 35	40. 5	17. 1				
34	1	211. 25. 18	20. 20. 27	42. 3	17. 1	— 0. 39	— 2. 54	α	*Arcturus.*
35	6	211. 29. 14	22. 16. 26	41. 5	17. 1				
36	5	211. 35. 2	21. 9. 25	43. 2	17. 1				
37	6	211. 42. 57	20. 15. 46	42. 3	17. 0				
38	6	213. 19. 40	26. 22. 57	40. 7	16. 8				
39	6	213. 34. 19	28. 25. 0	40. 1	16. 8				
40	6	213. 49. 46	21. 35. 26	41. 8	16. 7				
41	5	214. 4. 6	20. 12. 52	42. 4	16. 6	— 0. 0	+ 0. 6	f	du Bouvier.
42	6	214. 13. 20	28. 38. 16	40. 0	16. 8				
43	6	214. 44. 55	26. 50. 39	40. 1	16. 5				
44	4	215. 35. 23	31. 20. 52	38. 8	16. 5	+ 0. 41	+ 0. 17	ρ	du Bouvier.
45	6	215. 58. 21	31. 59. 50	38. 8	16. 2				
46	5	216. 16. 21	30. 42. 24	39. 0	16. 3	+ 0. 21	+ 0. 31	σ	du Bouvier.

Numéros des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Ascension droite.	Déclinais. Boréale.	Variation annuelle. En Ascens. droite.	Variation annuelle. En Déclinaison	Différence avec Flamstéed. En Ascens. droite.	Différence avec Flamstéed. En Déclinaison.	Lettres de Bayer & Numéros.	Noms des Constellations
		D. M. S.	D. M. S.	S. Déc.	S. Déc.	M. S.	M. S.		
47	5	216. 32. 58	23. 44. 39	40. 9	16. 1				
48	6	216. 35. 54	24. 56. 53	40. 6	16. 1				
49	7	216. 41. 24	28. 26. 23	39. 7	16. 1				
50	6	217. 42. 52	31. 26. 1	38. 6	15. 9				
51	7	217. 45. 22	31. 28. 33	38. 6	15. 9				
52	6	217. 50. 21	32. 14. 19	38. 2	15. 8				
53	6	217. 59. 59	25. 27. 2	40. 3	15. 8				
54	6	218. 25. 40	27. 28. 40	39. 7	15. 7	— 0. 38	+ 0. 33	34	du Bouvier.
55	3	218. 50. 47	28. 0. 42	39. 6	15. 6	+ 0. 23	+ 0. 11	ε	
56	7	219. 7. 39	28. 27. 38	39. 2	15. 6				
57	6	219. 28. 10	25. 1. 1	40. 2	15. 8				
58	5	219. 39. 41	25. 14. 40	40. 7	15. 4				
59	5	219. 39. 34	25. 17. 37	40. 1	15. 4				
60	7	219. 57. 30	23. 42. 18	40. 5	15. 4				
61	6	220. 32. 5	21. 11. 59	41. 1	15. 2				
62	7	220. 48. 55	30. 9. 20	38. 6	15. 2				
63	6	220. 49. 43	28. 28. 37	39. 1	15. 2				
64	6	220. 52. 52	32. 48. 9	37. 7	15. 2				
65	7	220. 54. 55	33. 35. 26	37. 5	15. 2				
66	6	221. 16. 26	32. 54. 50	37. 6	15. 1				
67	7	221. 24. 36	32. 19. 28	37. 8	15. 0				
68	7	221. 32. 9	33. 43. 9	37. 7	15. 0				
69	6	221. 34. 23	25. 14. 27	39. 9	15. 0				
70	6	221. 34. 8	25. 17. 39	39. 9	15. 0				
71	5	221. 58. 15	25. 31. 58	39. 8	15. 0				
72	6	222. 9. 59	27. 42. 40	39. 4	14. 9				
73	6	222. 16. 23	25. 3. 7	39. 9	14. 8				
74	6	222. 49. 58	32. 33. 55	37. 5	14. 7				
75	7	222. 56. 51	32. 15. 22	37. 5	14. 7				
76	5	223. 5. 13	25. 53. 0	37. 5	14. 6	— 1. 30	— 0. 1	ω	du Bouvier.
77	6	223. 20. 54	32. 32. 39	37. 4	14. 6				
78	6	223. 21. 48	34. 6. 18	36. 9	14. 6				
79	6	223. 35. 26	25. 57. 33	38. 8	14. 5				
80	6	223. 43. 46	29. 56. 20	38. 2	14. 5				
81	4	223. 45. 13	27. 48. 53	38. 9	14. 5	— 0. 30	+ 0. 18	ψ	du Bouvier.
82	6	224. 9. 41	31. 58. 0	37. 4	14. 4				
83	4	224. 22. 38	25. 43. 50	39. 1	14. 6	— 0. 1	+ 0. 9	c	du Bouvier.
84	7	224. 23. 52	30. 43. 32	37. 8	14. 3				
85	6	224. 39. 40	29. 21. 23	38. 3	14. 3				
86	6	224. 43. 27	27. 12. 14	38. 9	14. 2	+ 0. 6	+ 3. 7	b	du Bouvier.
87	6	224. 58. 25	25. 30. 19	39. 4	14. 2				
88	7	225. 0. 4	34. 4. 6	36. 6	14. 2				
89	7	225. 25. 9	33. 54. 57	36. 6	14. 1				
90	6	225. 26. 56	31. 28. 50	37. 4	14. 1				
91	7	225. 30. 14	25. 4. 42	39. 5	14. 0				
92	6	225. 49. 41	32. 18. 1	37. 1	14. 0				
93	6	226. 17. 36	32. 36. 44	36. 9	13. 9				
94	6	226. 18. 33	29. 58. 55	37. 8	13. 8	— 0. 39	— 0. 13	χ	du Bouvier.
95	3	226. 38. 53	34. 6. 22	36. 3	13. 8	— 2. 4	— 2. 26	δ	

Numéros des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Ascension droite.	Déclinais. Boréale.	Variation annuelle. En Ascens. droite.	Variation annuelle. En Déclinaison	Différence avec Flamstéed. En Ascens. droite.	Différence avec Flamstéed. En Déclinaison.	Lettres de Bayer. & Numéros.	Noms des Constellations
		D. M. S.	D. M. S.	S. Déc.	S. Déc.	M. S.	M. S.		
96	7	226. 48. 6	31. 43. 1	37. 2	13. 7				
97	6	227. 14. 4	27. 39. 4	38. 5	13. 6				
98	5	227. 14. 37	31. 7. 22	37. 3	13. 6				
99	5	227. 18. 5	32. 25. 27	36. 8	13. 6				
100	5	227. 39. 2	33. 19. 0	36. 4	13. 5				
101	6	227. 45. 43	30. 24. 44	37. 5	13. 5				
102	5	227. 52. 1	25. 45. 6	39. 0	13. 5				
103	5	227. 58. 33	32. 15. 59	38. 8	13. 4				
104	6	228. 0. 16	25. 4. 44	39. 2	13. 4				
105	6	228. 0. 31	25. 9. 1	39. 8	13. 4				
106	5	228. 14. 3	33. 43. 26	36. 2	13. 3	— 2. 45	— 0. 37	50	du Bouvier.
107	7	228. 29. 6	32. 21. 4	36. 7	13. 3				
108	5	228. 31. 32	31. 5. 29	36. 9	13. 3	+ 0. 41	— 0. 4	η	de la Couronne.
109	6	228. 53. 56	25. 36. 9	38. 9	13. 2				
110	6	229. 0. 2	20. 19. 51	40. 6	13. 2				
111	7	229. 17. 19	33. 14. 49	36. 2	13. 1				
112	6	229. 30. 50	25. 52. 35	38. 8	13. 0				
113	3	229. 40. 19	29. 51. 42	38. 0	13. 0	— 1. 41	— 0. 43	β	de la Couronne.
114	7	229. 44. 14	20. 31. 27	40. 5	13. 0				
115	6	229. 51. 54	27. 53. 56	38. 1	12. 9				
116	5	230. 21. 53	32. 2. 35	36. 5	12. 8				
117	6	230. 29. 58	21. 8. 19	40. 2	12. 8				
118	7	230. 57. 26	31. 4. 57	36. 8	12. 6				
119	7	230. 59. 8	31. 5. 50	36. 8	12. 6				
120	4	231. 0. 41	32. 6. 38	36. 8	12. 6	— 1. 1	— 0. 8	θ	} de la Couronne.
121	1	231. 20. 44	27. 28. 3	38. 0	12. 6	— 0. 16	+ 0. 17	α	}
122	5	231. 28. 9	32. 12. 9	36. 3	12. 5				
123	6	231. 58. 17	30. 46. 35	36. 8	12. 4				
124	5	232. 12. 36	25. 13. 4	38. 7	12. 3				
125	5	232. 12. 49	25. 16. 37	38. 7	12. 3				
126	6	232. 13. 19	31. 1. 4	36. 7	12. 2				
127	6	232. 42. 50	25. 48. 53	38. 5	12. 2				
128	6	232. 56. 13	32. 11. 56	36. 7	12. 2				
129	5	233. 28. 30	32. 24. 54	36. 0	11. 9				
130	5	233. 26. 17	20. 27. 8	40. 0	11. 9				
131	4	233. 23. 49	27. 0. 17	38. 0	11. 9	— 0. 49	— 0. 7	γ	de la Couronne.
132	5	233. 36. 21	32. 5. 46	36. 2	11. 9				
133	5	233. 40. 35	25. 10. 10	38. 6	11. 9				
134	6	233. 40. 45	25. 4. 8	38. 6	11. 9				
135	5	233. 49. 14	22. 8. 32	39. 6	11. 8				
136	5	233. 49. 23	33. 13. 10	35. 6	11. 8	— 1. 1	— 0. 18	π	de la Couronne.
137	6	234. 34. 38	31. 15. 40	36. 3	11. 6				
138	7	234. 46. 13	33. 41. 39	35. 3	11. 6				
139	6	234. 49. 34	32. 25. 22	36. 0	11. 6				
140	4	235. 6. 0	26. 44. 22	35. 8	11. 5	+ 3. 18	— 5. 8	δ	de la Couronne.
141	7	235. 20. 55	25. 56. 52	35. 8	11. 5				
142	5	235. 25. 5	21. 36. 49	39. 6	11. 4	+ 0. 11	— 1. 40	ρ	du Serpent.
143	6	235. 52. 31	29. 34. 0	36. 7	11. 3				
144	7	236. 23. 53	32. 59. 32	35. 4	11. 1				

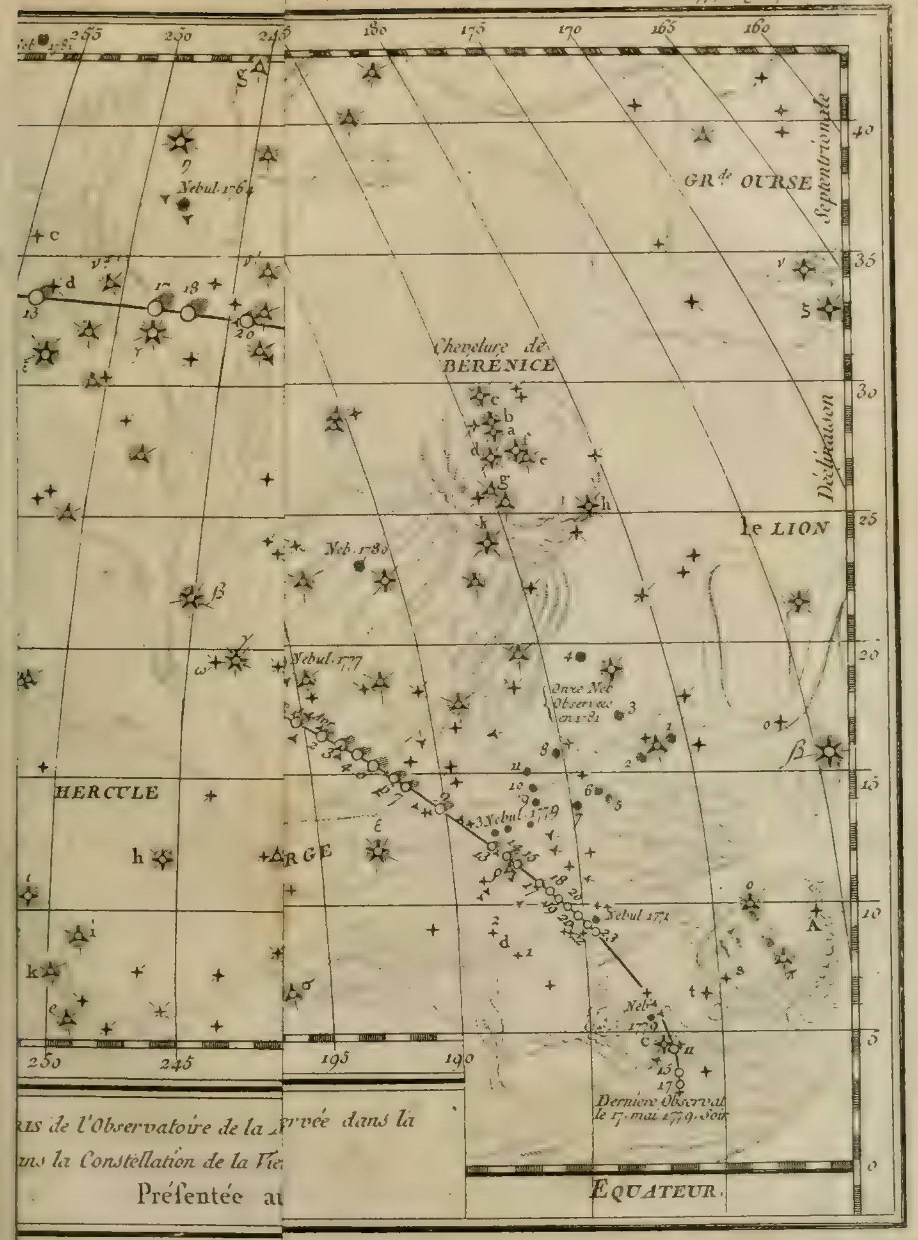
Numéros des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	ASCENSION droite.	DÉCLINAIS. Boréale.	VARIATION annuelle. En ASCENS. droite.	En DÉCLI-NAISON.	DIFFÉRENCE avec FLAMSTÉED. En ASCENS. droite.	En DÉCLI-NAISON.	Lettres de BAYER & Numéros.	NOMS des CONSTELLATIONS
		D. M. S.	D. M. S.	S. Déc.	S. Déc.	M. S.	M. S.		
145	6	237. 7. 47	25. 2. 1	38. 3	10. 9				
146	6	237. 36. 18	22. 15. 25	39. 3	10. 7				
147	6	237. 59. 31	29. 33. 42	36. 5	10. 6				
148	6	238. 8. 42	33. 58. 23	34. 8	10. 6	+ 0. 30	— 1. 26	ρ	de la Couronne.
149	7	238. 10. 38	20. 19. 20	39. 9	10. 6				
150	6	238. 56. 13	33. 6. 48	35. 8	10. 4				
151	6	239. 2. 12	22. 27. 55	39. 1	10. 3				
152	6	139. 18. 4	32. 51. 15	35. 0	10. 2				
153	5	239. 28. 5	22. 22. 56	39. 0	10. 1				
154	6	239. 48. 0	21. 37. 1	39. 0	10. 1				
155	7	239. 59. 3	30. 59. 43	36. 1	10. 3				
156	6	240. 34. 47	31. 28. 35	36. 1	10. 3				
157	6	240. 48. 2	33. 54. 42	34. 4	9. 8				
158	6	240. 56. 2	33. 11. 36	34. 7	9. 7				
159	6	241. 0. 3	33. 19. 12	34. 7	9. 7				
160	6	241. 5. 41	33. 10. 23	34. 7	9. 7				
161	6	241. 24. 36	21. 33. 36	39. 2	9. 5				
162	7	242. 13. 9	21. 33. 10	39. 2	9. 5				
163	6	242. 31. 1	20. 20. 44	39. 2	9. 5				
164	7	242. 37. 21	33. 10. 36	34. 5	9. 2				
165	5	242. 39. 9	21. 38. 8	39. 1	9. 2				
166	7	242. 56. 57	31. 3. 7	35. 4	9. 1				
167	7	242. 57. 51	33. 35. 5	34. 3	9. 1				
168	3	243. 3. 23	19. 41. 0	39. 8	9. 1	+ 0. 41	+ 0. 14	γ	d'Hercule.
169	6	243. 18. 0	22. 16. 44	38. 8	9. 0				
170	5	243. 20. 31	31. 23. 6	35. 3	9. 0				
171	5	243. 22. 40	31. 26. 46	35. 3	9. 0	— 0. 47	+ 1. 56	ξ	de la Couronne.
172	5	243. 30. 29	34. 17. 34	33. 9	9. 0	— 2. 7	— 2. 11	1	de la Couronne.
173	6	243. 32. 7	34. 11. 7	34. 0	8. 9				
174	5	243. 37. 23	32. 51. 13	34. 6	8. 9	— 2. 1	— 0. 36	23	d'Hercule.
175	6	243. 53. 31	19. 45. 12	39. 7	8. 8				
176	7	244. 6. 54	25. 4. 0	37. 7	8. 8				
177	6	244. 43. 55	19. 32. 16	39. 8	8. 6				
178	6	244. 53. 43	33. 12. 16	34. 3	8. 5				
179	3	245. 11. 50	21. 59. 1	38. 8	8. 4	+ 1. 18	+ 1. 42	β	d'Hercule.
180	7	245. 29. 22	31. 0. 47	35. 2	8. 3				
181	6	245. 35. 20	31. 27. 26	35. 2	8. 3				
182	6	245. 48. 5	25. 19. 1	37. 5	8. 2				
183	6	245. 48. 20	33. 59. 31	33. 9	8. 2	— 2. 1	— 0. 11	31	d'Hercule.
184	7	246. 12. 42	25. 56. 0	37. 5	8. 2				
185	7	246. 13. 52	30. 58. 0	35. 2	8. 0				
186	7	246. 58. 26	31. 27. 45	35. 2	8. 0				
187	6	247. 2. 3	20. 1. 4	38. 6	7. 8				
188	7	247. 21. 48	31. 3. 58	35. 2	8. 0				
189	6	247. 29. 58	25. 8. 42	37. 5	7. 7				
190	7	247. 42. 13	25. 59. 19	37. 1	7. 6				
191	5	247. 58. 51	25. 15. 46	37. 1	7. 6				
192	3	248. 15. 4	31. 59. 27	35. 1	7. 4	— 1. 5	— 0. 57	ζ	d'Hercule.
193	7	248. 16. 43	31. 19. 10	35. 1	7. 4				

Numéros des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Ascension droite.	Déclinais. Boréale.	Variation annuelle. En Ascens. droite.	Variation annuelle. En Déclinaison	Différence avec Flamstéed. En Ascens. droite.	Différence avec Flamstéed. En Déclinaison.	Lettres de Bayer, & Numéros.	Noms des Constellations.
		D. M. S.	D. M. S.	S. Déc.	S. Déc.	M. S.	M. S.		
194	6	248. 26. 36	33. 31. 50	33. 8	7. 2				
195	5	248. 49. 51	33. 6. 58	34. 9	7. 3				
196	6	249. 43. 49	25. 56. 57	37. 0	7. 8				
197	6	249. 58. 26	32. 48. 38	34. 0	6. 9				
198	6	250. 21. 43	33. 11. 25	33. 8	6. 7				
199	6	250. 36. 31	32. 55. 57	33. 8	6. 7				
200	6	250. 39. 0	26. 5. 45	36. 9	6. 6				
201	5	250. 39. 57	25. 2. 38	37. 3	6. 6	— 1. 0	— 0. 48	51	d'Hercule.
202	5	250. 41. 22	33. 31. 39	33. 6	6. 6				
203	7	250. 50. 27	33. 44. 7	33. 5	6. 6				
204	5	251. 9. 32	32. 4. 32	34. 3	6. 5				
205	7	251. 27. 19	30. 48. 54	34. 9	6. 4				
206	6	251. 28. 16	26. 5. 37	36. 9	6. 4	— 0. 25	— 0. 47	56	d'Hercule.
207	6	252. 4. 59	26. 10. 22	36. 9	6. 4				
208	3	252. 58. 19	31. 15. 47	34. 7	5. 9	+ 0. 34	— 0. 42	ε	d'Hercule.
209	6	253. 14. 15	19. 42. 1	39. 3	5. 7				
210	5	253. 17. 12	25. 49. 13	36. 9	5. 8				
211	6	253. 21. 33	33. 53. 20	33. 3	5. 8	— 0. 6	— 0. 38	d	d'Hercule.
212	6	253. 24. 35	32. 50. 27	33. 8	5. 7				
213	6	253. 29. 29	32. 12. 16	34. 3	5. 7				
214	5	253. 46. 57	19. 54. 10	39. 2	5. 6				
215	5	254. 15. 31	22. 20. 54	38. 3	5. 4				
216	6	255. 11. 15	33. 36. 4	33. 3	5. 1				
217	6	255. 16. 50	30. 59. 7	34. 5	5. 1				
218	6	255. 22. 46	33. 39. 37	33. 3	5. 0				
219	7	255. 23. 11	33. 19. 32	33. 4	5. 0				
220	7	255. 38. 17	32. 27. 47	33. 4	5. 0				
221	6	256. 2. 6	25. 14. 47	37. 0	4. 8				
222	5	256. 30. 29	25. 6. 58	37. 0	4. 7	+ 1. 59	+ 0. 26	δ	d'Hercule.
223	6	257. 1. 30	26. 6. 56	36. 6	4. 5				
224	5	257. 17. 54	33. 20. 52	33. 3	4. 4	— 0. 3	— 0. 22	u	d'Hercule.
225	6	257. 21. 10	26. 4. 14	36. 6	4. 4				
226	5	257. 45. 44	25. 46. 9	36. 6	4. 4				
227	5	258. 6. 6	32. 58. 13	33. 5	4. 1				
228	6	258. 6. 33	32. 45. 43	33. 5	4. 1	+ 2. 18	— 1. 53	W	d'Hercule.
229	5	258. 21. 10	25. 6. 54	36. 9	4. 1				
230	7	259. 7. 49	32. 52. 40	33. 5	4. 1				
231	6	259. 24. 43	29. 37. 56	36. 0	3. 7				
232	5	260. 20. 33	26. 3. 56	36. 5	3. 4				
233	5	260. 38. 45	30. 42. 4	34. 4	3. 3				
234	7	261. 38. 12	32. 33. 35	33. 5	3. 0				
235	5	262. 3. 38	30. 56. 11	34. 2	2. 8				
236	7	262. 40. 23	32. 52. 11	33. 3	2. 6				
237	6	262. 51. 40	29. 21. 36	32. 2	2. 5				
238	5	262. 55. 1	31. 20. 29	34. 4	2. 5				
239	7	262. 55. 38	32. 52. 26	34. 4	2. 5				
240	5	263. 40. 38	29. 31. 28	35. 1	2. 3				
241	7	263. 47. 40	33. 5. 50	33. 1	2. 2				
242	6	264. 3. 20	33. 20. 3	33. 1	2. 2				

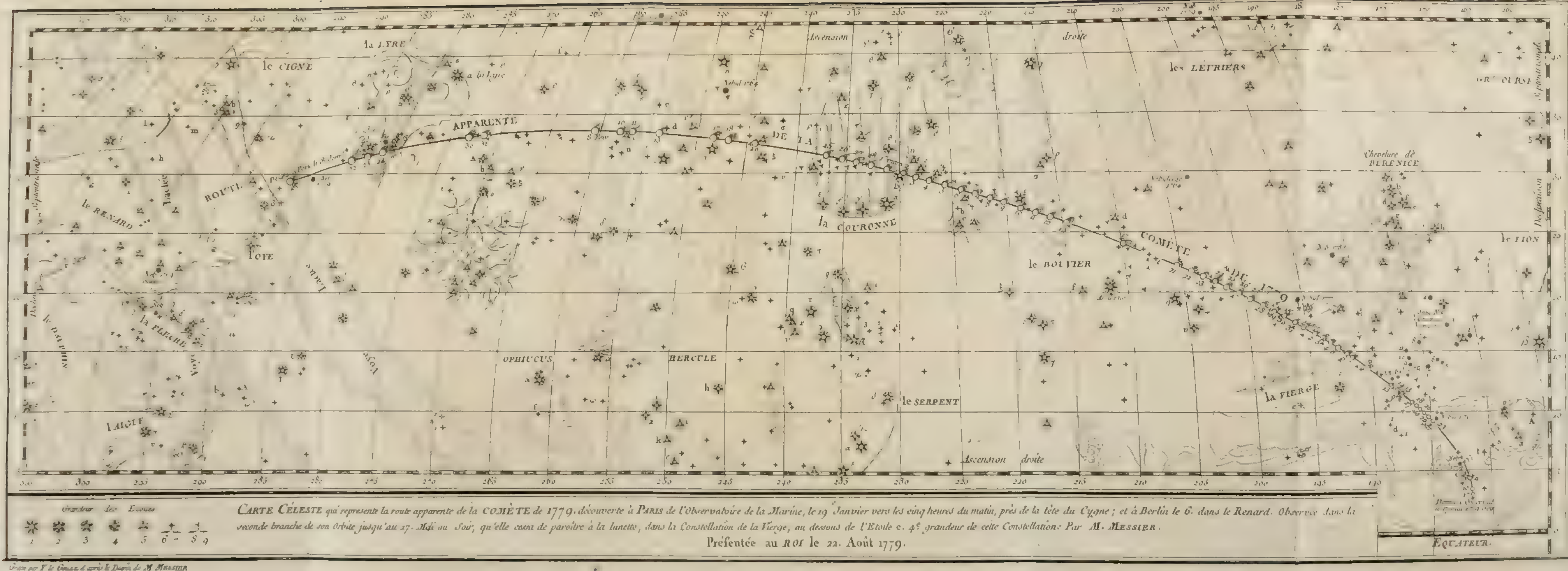
Numéros des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Ascension droite.	Déclinais. Boréale.	Variation annuelle. En Ascens. droite.	Variation annuelle. En Déclinaison	Différence avec Flamstéed. En Ascens. droite.	Différence avec Flamstéed. En Déclinaison.	Lettres de Bayer & Numéros.	Noms des Constellations
		D. M. S.	D. M. S.	S. Déc.	S. Déc.	M. S.	M. S.		
243	7	264. 8. 12	31. 14. 23	34. 1	2. 0				
244	6	264. 24. 21	25. 50. 15	36. 5	2. 0				
245	7	265. 23. 8	31. 7. 13	34. 1	2. 0				
246	5	265. 26. 29	29. 23. 1	34. 9	2. 0				
247	6	266. 0. 39	32. 2. 34	33. 7	2. 0				
248	5	266. 35. 50	26. 5. 19	34. 9	1. 6				
249	7	266. 49. 7	32. 28. 35	33. 4	1. 1				
250	4	267. 17. 20	29. 16. 17	35. 0	0. 9	+ 0. 50	— 1. 12	ξ	d'Hercule.
251	7	267. 20. 26	33. 26. 38	33. 0	0. 9				
252	7	267. 24. 25	32. 15. 33	33. 0	0. 9				
253	6	267. 29. 30	32. 40. 44	33. 0	0. 9				
254	7	267. 32. 4	30. 45. 40	34. 3	0. 9				
255	7	268. 8. 20	33. 13. 58	33. 1	0. 7				
256	7	268. 22. 14	33. 19. 34	33. 1	0. 7				
257	6	269. 12. 7	33. 18. 21	33. 0	0. 3				
258	5	269. 24. 29	32. 12. 48	33. 6	0. 2				
259	5	269. 58. 23	30. 58. 51	34. 1	0. 1				
260	5	270. 54. 47	31. 22. 28	34. 0	0. 3	+ 2. 41	+ 0. 31	A	d'Hercule
261	6	272. 16. 10	33. 28. 13	32. 2	0. 8				
262	7	272. 41. 34	32. 58. 22	33. 3	0. 7				
263	5	277. 8. 15	33. 17. 42	33. 2	0. 3				
264	7	278. 4. 29	33. 30. 24	33. 2	2. 3				
265	7	279. 11. 39	32. 58. 33	33. 4	3. 0				
266	6	280. 24. 51	32. 15. 52	33. 3	3. 7				
267	1	280. 29. 24	33. 7. 14	33. 3	3. 7	— 1. 11	— 0. 29	β	de la Lyre.
268	.....	281. 20. 50	32. 45. 59	33. 5	3. 9	....	....	.....	nébuleuse.
269	6	282. 11. 39	32. 10. 51	33. 8	4. 3				
270	3	282. 40. 45	32. 24. 2	33. 8	4. 3	+ 0. 3	— 0. 15	γ	de la Lyre.
271	6	283. 18. 21	32. 4. 19	34. 0	4. 6				

Nota. La première des deux colonnes de la variation annuelle pour l'ascension droite, est additive +: la seconde, pour la déclinaison, est soustractive — depuis le *n.° 1* jusqu'au *n.° 260*, & depuis ce dernier jusqu'au *271.e* additive +.





255
250
245
180
175
170
165
160
40
35
30
25
20
15
10
5
0
Nebul. 1764
GR.de OURSE
Septentrionale
Chevelure de BÉRÉNICE
Déclinaison
le LION
Neb. 1780
Nebul. 1777
Onze Neb. Observées en 1781
HERCULE
3 Nebul. 1779
RGE
Nebul. 1771
Neb. 1779
Derniere Observat. le 17. mai 1779. Soir
250
245
195
190
ris de l'Observatoire de la rvée dans la
ns la Constellation de la Vie
Présentée au
EQUATEUR.



CARTE CÉLESTE qui represente la route apparente de la COMÈTE de 1779, découverte à PARIS de l'Observatoire de la Marine, le 19 Janvier vers les cinq heures du matin, près de la tête du Cygne; et à Berlin le 6. dans le Renard. Observée dans la seconde branche de son Orbite jusqu'au 17. Mai au Soir, qu'elle cessa de paroître à la lunette, dans la Constellation de la Vierge, au dessous de l'Etoile c. 4.e grandeur de cette Constellation: Par M. MESSIER.

Préfentée au ROI le 22. Août 1779.

MÉMOIRE
SUR LE
MOYEN DE DISSOUDRE LA PLATINE
PAR L'ACIDE NITREUX.

Par M. TILLET.

PENDANT que plusieurs Chimistes distingués s'occupent de l'examen de la Platine, qu'ils la rendent très-ductile, & obtiennent des succès sur plusieurs points intéressans qui concernent ce métal singulier, j'ai cru devoir le considérer sous un point de vue relatif au commerce des matières d'Or & d'Argent, & examiner si un Essayeur, sans sortir des bornes ordinaires de ses opérations, sans employer d'autres agens que ceux dont il est dans l'usage de se servir, ne pourroit pas dépouiller l'or & l'argent de la platine, & n'auroit pas plus de précautions à prendre dans son travail, en supposant ce dernier métal allié aux deux autres, que si l'or & l'argent n'étoient mêlés qu'avec du cuivre. 23 Juin 1779.

En attendant que je puisse rendre compte à l'Académie des expériences que j'ai déjà faites à cet égard, & que je me propose de continuer, je vais avoir l'honneur de lui exposer quelques faits, dont d'habiles Chimistes tireront meilleur parti que moi, & déduiront des conséquences que je ne suis pas capable de saisir.

PREMIER FAIT.

La platine, soit brute & dans son état naturel, soit devenue ductile par les procédés que M. le comte de Sickingen a fait connoître, & par ceux que M. le comte de Milly doit publier, la platine dans ces deux états, est parfaitement dissoluble dans l'esprit de nitre pur, & dépouillé de tout acide marin : ce premier fait a lieu lorsqu'on mêle une certaine

quantité d'or pur, & une plus grande quantité d'argent fin avec la platine.

SECOND FAIT.

Si on ne mêle que de l'argent fin avec la platine, alors la diſſolution eſt très-incomplète; la liqueur diſſolvante ſe trouble, devient noire, & n'acquiert point de tranſparence, quel que long-temps qu'on la faſſe bouillir ſur le feu, même après le refroidiſſement, & quoiqu'on ait l'attention de la laiſſer aſſez long-temps dans le repos: le précipité noir qu'on trouve au fond du matras, la liqueur reſtant toujours trouble & ayant la couleur d'un brun-noirâtre, ce précipité, après avoir été lavé & recuit, eſt de véritable platine; il en a la couleur, &, ſelon les apparences, tous les caractères.

Il n'en eſt pas ainſi lorſqu'on mêle, par la voie de la fuſion & d'une fuſion parfaite, une certaine quantité d'or fin avec de la platine & de l'argent fin: la diſſolution de la platine & de l'argent eſt complète; la liqueur devient tranſparente, même ſur le feu, & l'or reſte au fond du matras.

Si on précipite une partie de la diſſolution d'un mélange d'or, d'argent & de platine par une petite quantité d'eſprit de ſel, on obtient un précipité d'un très-beau blanc, lequel ſéché, ne perd rien de ſa blancheur *.

Si on précipite de nouveau, par l'huile de tartre par défaillance, la liqueur ſurnageante du premier précipité, on obtient un léger précipité en forme de *coagulum,* lequel ſéché, a la couleur d'un vert-pâle.

Si on précipite d'abord l'autre partie de la diſſolution des trois métaux réunis par l'huile de tartre par défaillance, on a ſur le champ un précipité abondant, ſous la forme de flocons blancs, leſquels ſéchés, reſtent d'un blanc-ſale, & qui approche même de la couleur griſe.

* On verra dans le Mémoire, beaucoup plus étendu, qui ſuivra celui-ci, que ce premier précipité eſt de l'argent combiné avec l'acide marin & dépouillé de platine.

Mes premières expériences n'ayant roulé que ſur de petites quantités, il ne m'a guère été poſſible d'examiner ſéparément les précipités de la diſſolution dont je viens de parler; je me ſuis contenté d'abord, en les réuniſſant & les fondant enſemble avec un peu de borax, d'en obtenir un bouton d'argent que j'ai fait diſſoudre dans l'eſprit de nitre: mon but étoit, comme on le ſent bien, d'y reconnoître la préſence de la platine qui avoit été d'abord diſſoute avec l'argent dans la liqueur qui avoit fourni ces précipités; ce bouton d'argent ne contenant point d'or, m'a préſenté le même phénomène dont j'ai déjà parlé; l'eſprit de nitre dans lequel je l'ai mis en diſſolution, s'eſt un peu troublé, proportionnément à la petite quantité de platine que le bouton d'argent contenoit; il n'a point repris ſa tranſparence, & a laiſſé au fond du matras un petit dépôt noir, tel qu'il s'annonce quand on fait diſſoudre dans l'eſprit de nitre un mélange composé ſeulement d'argent & de platine. Il paroît donc prouvé que la platine, qui n'eſt que foiblement attaquée par l'eſprit de nitre lorſqu'on ne la mêle qu'avec de l'argent, eſt diſſoute auſſi complètement par cet acide que l'argent même, lorſque l'or fait partie du mélange, puiſqu'elle s'eſt annoncée dans la diſſolution du petit bouton d'argent dont je viens de parler, qui, lui-même, avoit ſubi avec elle la première diſſolution. Il paroît d'un autre côté, qu'il ſeroit difficile aujourd'hui de regarder l'or comme faiſant une partie eſſentielle & conſtitutive de la platine, puiſqu'on ne remarque aucune augmentation de poids ſur la matière d'or employée dans les expériences dont il s'agit: je ne dis pas cependant qu'on ne puiſſe extraire de la platine quelques particules d'or, comme elles ſe trouvent tous les jours dans d'autres matières que la platine, & où elles ne ſont conſidérées que comme étrangères à ces mêmes matières qui les renferment; mais tout ſemble annoncer, par les premières expériences que j'expoſe ici ſommairement, que l'or, loin de jouer un rôle eſſentiel dans la platine, n'en occaſionne la diſſolution complète, qu'autant qu'indiſſoluble lui-même par l'eſprit de nitre, il ſe joint à la platine pour

mieux l'abandonner enſuite à toute l'action de cet acide. Par une ſuite néceſſaire de cette obſervation, l'eau régale ſera ſeule le véritable diſſolvant de l'or; elle le ſera auſſi, à la vérité, de la platine pure; mais l'eſprit de nitre aura toute ſon action ſur celle-ci, par ſon mélange avec l'or & l'argent, tandis que l'or réſiſtera à ce même acide, & que les deux autres métaux qui étoient confondus avec lui, éprouveront une véritable diſſolution.

Je dois faire obſerver ici, d'après le premier travail ſur cet objet dont je ne me ſuis occupé encore que d'une manière générale, qu'il eſt difficile de ſéparer totalement la platine de l'or, par la voie d'un premier départ, & en conſervant à l'ordinaire l'or en cornet: la platine en effet recelée dans les interſtices de ce métal indiſſoluble par l'eſprit de nitre, y réſiſte dans quelques-unes de ſes parties, & ne cède enfin qu'après un ſecond, & quelquefois un troiſième départ; mais ſi on prend le parti d'employer pour un ſeul départ cinq fois autant d'argent qu'on a mis d'or & de platine pour l'expérience, alors on obtient l'or en chaux, & toute la platine ſe trouve ordinairement diſſoute avec l'argent. Ce dernier moyen exige de l'attention pour ne rien perdre de la quantité déterminée d'or qu'on a employée: j'eſpère qu'il ſera poſſible de conſerver l'or dans ſon état de pureté, & ſous la forme de cornet, en employant une quantité d'argent ſuffiſante pour qu'elle rende la platine acceſſible de toutes parts à l'eſprit de nitre, & en ménageant l'action de cet acide, de manière qu'il n'attaque d'abord que foiblement les deux métaux diſſolubles, & n'agiſſe enſuite avec toute ſa force, qu'autant que le cornet dépouillé en grande partie de la platine & de l'argent, ne donnera lieu qu'à une action modérée de l'acide nitreux. Je me réſerve volontiers le travail que pourra exiger l'expérience & le tâtonnement pour cet objet particulier, qui tient à l'opération des Eſſayeurs & à la ſureté du Commerce. Je ne doute point que quelques Chimiſtes plus éclairés que moi, ne s'occupent dans la ſuite du ſoin de conſidérer la platine ainſi diſſoute par l'acide nitreux, à la faveur de ſon

union

union avec l'or & l'argent : je profiterai avec plaisir de leurs lumières, & sans perdre de vue, moi-même, ce point curieux de recherche, je tournerai principalement mon application vers celui qui concerne la pratique, en cherchant à y mettre, s'il est possible, autant d'exactitude que de simplicité.

Je finis par observer que la platine résistant, comme l'or & l'argent, à l'action de la litharge dans la coupelle, on ne sauroit découvrir, par ce moyen, s'il entre de la platine dans l'argent auquel on fait subir cette opération : mais, d'après les expériences dont je viens de parler, on s'apercevra bientôt de la présence de la platine dans l'argent, si on fait dissoudre dans l'esprit de nitre une petite partie du mélange de ces deux métaux ; la liqueur se troublera, restera opaque, & il se fera un précipité noir au fond du matras, qui, après un recuit, sera bientôt reconnu s'il est dû à la platine ; au lieu que la liqueur seroit devenue claire & transparente après la dissolution, sans donner aucun précipité, si l'argent avoit été employé seul & dans son état de pureté.



RÉFLEXIONS

SUR LES

OBSERVATIONS DE LA DÉCLINAISON ou Variation de l'Aimant dans l'Océan Atlantique, FAITES À LA MER.

Par M. LE MONNIER.

Lû le 3 Mars 1779.

J'AI examiné avec ſoin les variations obſervées par Don Antonio d'Ulloa, dans ſa traverſée de Cadiz à la Vera-Cruz, & à ſon retour en l'année 1778; & aux remarques intéreſſantes qu'a faites ce Commandant de la flotte Eſpagnole, à bord du vaiſſeau de guerre l'*Eſpagne*, j'ai cru devoir ajouter les réflexions ſuivantes.

1.° La variation obſervée de $19^d\ 42'$ au mois de Mai, à Cadiz, étoit à peine, en 1776, de 1 degré moins grande vers l'oueſt, qu'à Paris; au lieu qu'à Londres ç'a été tout le contraire.

2.° M. d'Ulloa étant par 18 degrés $\frac{1}{2}$ de latitude boréale, 36 à 39 degrés à l'oueſt du pic de Ténériffe, la variation lui a paru nulle, après quoi elle a changé de dénomination ou du Nord à l'Eſt. On pourroit donc la placer ſur la Carte de Halley, à 52 degrés $\frac{1}{5}$ à l'oueſt du méridien de Londres; mais la Carte des variations du même Auteur, donne pour 1700 la variation nulle ſous la longitude de 30 degrés $\frac{1}{2}$ à cette même latitude de 18 degrés $\frac{1}{2}$ boréale: ainſi la ligne ſans déclinaiſon ſe feroit avancée vers l'Oueſt à cette latitude de 21 degrés $\frac{2}{3}$ en ſoixante-ſeize ans, ce qui ne s'étant trouvé tout au plus que d'environ 19 degrés ſous l'équateur magnétique, il nous faut encore examiner ces obſervations au retour, quoique par une latitude plus grande.

Le 24 Juillet, M. d'Ulloa attérant au port de la Vera-Cruz, a trouvé pareillement par les amplitudes ortives &

occases, la variation 7 degrés ½ au Nord-est; ce qui diffère à peine de ¾ de degré en excès, de ce qui avoit été trouvé en 1768 par les Boussoles qu'avoit pour lors feu l'abbé Chappe.

En 1778, M. d'Ulloa à son retour, a compté ses longitudes du cap de Cannaveral, situé à la côte de la Floride ainsi qu'à l'embouchure du canal de Bahama, & la variation lui a paru nulle par $28^d\ 57'$ de latitude, étant à l'Est de près de 19 degrés à l'égard de ce cap.

Par ces observations postérieures, la réduction devient bien moins sensible pour la variation de la ligne sans déclinaison, vers l'Ouest depuis 1700, laquelle n'auroit été que de 7 ½ à 9^d seulement, à 29 degrés de latitude sur la Carte de Halley, c'est-à-dire près de la moitié moins grande qu'elle n'a paru aux François & aux Anglois, sous le méridien & à l'Équateur magnétique, en soixante-quinze années.

Prenant un milieu, on auroit donc sous le tropique du Cancer, ou pour 24 degrés tout au plus de latitude boréale, le mouvement de la ligne sans déclinaison, en soixante-dix-sept années, d'environ 15 degrés, tandis que sous l'équateur magnétique on l'a trouvé plusieurs fois de 19 degrés tout au plus, pendant les mêmes intervalles de temps, à très-peu de choses près.

Comme M. d'Ulloa s'approchoit très-fort de l'île des Bermudes à son retour, on pourroit conjecturer avec raison, d'après les observations que nous venons de rapporter, comme aussi d'après celles de la nouvelle Angleterre qui ont été rendues publiques, que la ligne sans déclinaison ne se recourbe pas à beaucoup près autant que l'a supposé M. Halley sur sa Carte réduite, savoir vers les extrémités boréales de cette ligne sans déclinaison.

On trouve dans le deuxième volume des Voyages, publié à l'*Imprimerie du Louvre* en 1778, que six ans auparavant, à 73 degrés ⅕ ou ⅖ de longitude à l'ouest du Méridien de Paris, & par $30^d\ 17$ à $38'$ de latitude boréale, la variation nord-est n'étoit plus que de 2 degrés ¾: mais M. d'Ulloa a trouvé à 75 degrés ⅛ & à 73 degrés ½ de longitude &

par 29d 36 à 11′ de latitude, la variation au nord-eſt 3d 37′ ½. Il y auroit donc ici près d'un degré en excès, & même deux tiers de degrés au-delà, puiſqu'en ſix ans la variation a dû changer de toute cette dernière quantité : en un mot, M. d'Ulloa l'auroit trouvée trop grande, M.rs Verdun, Borda & Pingré étant par 29d ½ de latitude.

DÉCLINAISON DE L'AIGUILLE AIMANTÉE,

Obſervée à Paris en 1779.

Le 22 Mars, par un hâle moins vif qu'à l'ordinaire, & avec la nouvelle Bouſſole qu'on a décrite au volume précédent, nous avons obſervé, M.rs le Chevalier Schamps, Caſſini le fils & moi, à 11 heures du matin, en pointant pluſieurs fois la lunette au troiſième Moulin à Montmartre, toutes réductions faites, la déclinaiſon 20d 30′ à l'Obſervatoire.

Le 14 Juin, par un temps variable ou mêlé de quelques légères ondées, à la même heure que ci-deſſus, à peine a-t-on trouvé, en recommençant pluſieurs fois, un excès de 4 minutes; & adoptant la dernière obſervation, ſavoir lorſqu'on a pointé au troiſième Moulin à Montmartre, on aura, toutes réductions faites, la variation ou déclinaiſon de l'aiguille du Nord à l'Oueſt 20d 34′.

Nous aurions bien deſiré comparer cette aiguille bien choiſie avec différentes chapes d'agate, comme auſſi avec une autre aiguille de pareille longueur, mais d'un tiers ou de la moitié moins peſante; ce qu'il faudroit ſur-tout comparer entr'elles vers 3 heures du ſoir & par un temps calme ou plutôt tel qu'il le faut choiſir pour des recherches auſſi délicates.



MÉMOIRE
SUR LA
LONGITUDE DE LA NOUVELLE ZEMBLE.

Par M. LE MONNIER.

LE lieu où les Hollandois ont hiverné à la nouvelle Zemble, à 76 degrés de latitude boréale *, a été fixé en ce siècle-là, par la conjonction observée de la Lune à Jupiter, 5 heures précisément, comme on l'a déjà dit, à l'orient de Venise; on aura par conséquent, à l'égard de l'île de Fer, que nous supposons 20 degrés $\frac{1}{2}$ à l'ouest du méridien de Paris, $105^d\ 15'$ de longitude orientale: mais les Éphémérides ne représentoient souvent alors qu'à un demi-degré les longitudes de la Lune & de Jupiter, & c'est ce qu'il reste à examiner, ou du moins à comparer avec le résultat des 5 heures de différence en longitude assignée à l'égard du méridien de Venise, représenté par les Éphémérides de Schala. 30 Juin 1779.

Je trouve, quant à la longitude de Jupiter, qu'il vaut mieux la déduire ici des observations de Tycho, que des Tables astronomiques; mais n'ayant plus les mêmes avantages, faute d'un mouvement égal pour la Lune, & uniforme pour ainsi dire, que Tycho n'observa que plusieurs jours après, j'aurai recours aux périodes de dix-huit ans dix à onze jours, pour en déduire, s'il est possible, l'erreur des Tables lunaires, le 24 Janvier 1597, au soir.

Soit d'abord le $\frac{8}{18}$ Janvier 1597, la distance de Jupiter *Aldebaran*, observée par Tycho à $6^h\ 2'\frac{2}{3}$ du soir, de $32^d 40'$, & sa hauteur méridienne $45^d\ 10'\ 10''$: ayant trouvé que l'ascension droite de l'Étoile devoit être alors $63^d\ 16'\ 3''$, j'en ai conclu celle de Jupiter de $29^d\ 56'\ 8''$, & par conséquent, sa longitude ♉ $1^d 43'\ 5''$ tout au plus.

* Voyez sur-tout *Linschot* & la première des deux Cartes de l'édition latine de ce Voyage, publiée *in-folio* à Amsterdam, en 1599.

Mais le $\frac{21}{31}$ Janvier, je trouve auſſi par les diſtances obſervées à la même Étoile, la différence d'aſcenſion droite $32^d\ 4'\ 15''$, ce qui, joint à ſa déclinaiſon boréale, donne la longitude de Jupiter, ♉ $2^d\ 59'\ 56''$; or il eſt viſible par-là, que le 24 Janvier 1597, au moment de la conjonction, la longitude de Jupiter auroit été ♉ $2^d\ 19'\frac{3}{4}$ ou $20'$, & ſon aſcenſion & déclinaiſon boréale $30^d\ 29'$, & $11^d\ 18'$ tout au plus. Tels ſont les élémens néceſſaires, comme j'en ai averti ci-deſſus, pour trouver l'aſcenſion droite du milieu du ciel, l'abaiſſement de Jupiter ſous l'horizon, & l'heure vraie du Soleil, laquelle ſeroit $6^h\ 17'\frac{2}{3}$ du matin, ſi l'azimut ou l'aire de vent où la conjonction a paru ſe faire, avoit été bien obſervée, ſavoir de 11 degrés $\frac{1}{4}$, à compter du Nord vers l'Eſt.

On voit par-là, qu'il y a au moins o heures $\frac{1}{4}$ d'incertitude dans l'heure vraie, aſſignée par les Hollandois, que leurs ſabliers ou horloges dentées ou bien à rouages, ne leur donnoient pas alors trop facilement, outre qu'ils ne nous ont pas aſſez détaillé les preuves multipliées des corrections qu'ils ont dû faire à ces horloges : en effet, il eſt certain que Jupiter a dû paſſer au vrai méridien du côté du Nord, à $5^h\ 31'\ 48''$ du matin, & que l'azimut de 11 degrés $\frac{1}{4}$ doit être aſſurément du Nord vers l'Eſt; autrement il en faudroit ôter encore trois autres quarts-d'heure, ſi l'on vouloit ſuppoſer l'azimut de 11 degrés $\frac{1}{4}$ à l'oueſt du méridien, du côté du Nord. Comme les Hollandois nous aſſurent, & comme ils nous donnent en effet les preuves les plus vraiſemblables, qu'il y avoit un aire de vent à compter du Nord ſur leur compas rectifié, il s'enſuivroit donc de l'heure qu'on vient de trouver, ſavoir $6^h\ 17'\frac{2}{3}$, que la longitude de la nouvelle Zemble ſeroit encore 4. degrés $\frac{1}{2}$ plus grande vers l'Eſt, qu'elle n'a été conclue par leur premier & excellent Pilote, à l'aide des Éphémérides de Schala.

Il nous reſte donc à examiner encore s'il y auroit quelques corrections importantes à faire à cette longitude, à cauſe de l'erreur des Tables. Il a été douteux juſqu'ici qu'elle pût être

abſolument nulle, & les Adverſaires du Profeſſeur royal, J. Morin, ont prétendu plus de quarante ans après, qu'elle devoit être quelquefois énorme, malgré la ſupériorité des Rudolphines de Képler, ſur les Tables pruteniques, jointe aux premiers rayons de faveurs littéraires que S. M. Louis XIII & le Cardinal de Richelieu, Surintendant de la Marine, aient voulu dès-lors accorder à la ſcience des Longitudes.

Je trouve d'abord dans mes Obſervations de l'année 1741, déjà publiées, l'erreur des Tables Newtoniennes en défaut de 3 minutes $\frac{1}{4}$, puiſqu'elles donnent, le 23 Mars à $5^h 47' 56''$ de temps moyen, la longitude de la Lune $2^f 28^d 34' 9'' \frac{1}{2}$, au lieu que l'obſervation nous donne $2^f 28^d 37' 25'' \frac{1}{2}$; mais à cauſe de l'accélération du mouvement de la Lune, depuis le temps de Tycho juſqu'alors, jointe à quelques autres cauſes, dont on aura occaſion de parler, l'état de l'orbite lunaire ayant varié depuis la fin de Janvier 1597, à celle du mois de Mars 1741, ces circonſtances nous empêchent d'admettre ici la même erreur des Tables qu'on vient de découvrir, en la rapportant à l'année 1597. Voyez Gaſſendi, *vol. IV.*

Je ne trouve rien, comme je l'ai dit, au temps de cette conjonction parmi les obſervations de Tycho - Brahé, & environ trente-ſix ans après, je ne vois pas qu'Iſmaël Bouillaud ait ſaiſi quelques occultations correſpondantes. En 1669 & 1687, la Lune ne fut point obſervée à pareille diſtance du Soleil; mais enfin, je trouve une conjonction apparente de la Lune à Jupiter, dans les Regiſtres manuſcrits de M. de la Hire, laquelle a été déterminée à l'Obſervatoire royal, le 2 Mars 1705, à $10^h 38' 8''$ de temps vrai. Comme la quadrature de Jupiter au Soleil, ſe trouve dans les mêmes Regiſtres, obſervée le 6 Mars ſuivant, à $5^h 56' 51''$ de temps vrai, j'en ai déduit, en ſuppoſant le lieu du Soleil ♓ $16^d 0' 10''$, & les différences d'aſcenſions droites & de déclinaiſons obſervées, la longitude de ♃ ♉ $17^d 24' 25''$; d'où il m'a été facile, à l'aide des Tables de Halley, d'établir la longitude de ♃ ♉ $17^d 7' 49''$ pour l'inſtant de la conjonction obſervée le 2 Mars au ſoir : les Tables des Inſtitutions donnent ce

jour-là, à $10^h 50' 38''$ de temps moyen, la longitude de la Lune, ♓ $17^d 43' 52'' \frac{1}{2}$, avec une latitude boréale de $0^d 56' 8''$. L'angle parallactique, dans l'hypothèse de la Terre aplatie de $\frac{1}{200}$, étoit $51^d 49' 27'' \frac{1}{2}$; d'où l'on déduit la longitude apparente de la Lune, ♓ $17^d 5' 57'' \frac{1}{2}$: or M. de la Hire assurant, & même par une figure faite à dessein, que Jupiter lui a paru dans la ligne des cornes, ce qui indique sa conjonction apparente avec la Lune, & l'incertitude d'une pareille observation ne pouvant guère influer que d'une minute de temps, c'est-à-dire d'une demi-minute de degré sur la longitude de la Lune, il doit s'ensuivre que l'erreur des Tables Newtoniennes étoit en 1705, le 2 Mars au soir, de 1 minute $\frac{7}{8}$ en défaut ou négative; on peut donc admettre, selon les deux observations de 1705 & 1741, qu'elle devoit être encore moindre en 1597.

J'ai donc calculé le lieu de la Lune, sur les Tables des Institutions, le 24 Janvier 1597, pour $12^h 32'$ de temps moyen, au méridien de Paris, c'est-à-dire en supposant d'abord la nouvelle Zemble $5^h 44' \frac{1}{3}$ plus orientale, & j'ai trouvé sa longitude ♉ $2^d 20' 19'' \frac{1}{2}$; celles de Mayer donnent ♉ $2^d 21' 44'' \frac{1}{2}$; mais la longitude de Jupiter, déduite des observations de Tycho, étoit alors ♉ $2^d 19' \frac{3}{4}$ ou $20'$: ainsi dans la première hypothèse, qui est celle des Hollandois, savoir, que la conjonction de Jupiter à la Lune se seroit faite le 25 à 6 heures du matin, on auroit la longitude géographique de la nouvelle Zemble, au port de la Glace, à très-peu de chose près, la même que les $105^d 15'$ trouvés ci-dessus, ou plutôt $106^d 35'$, & 1^d à peine plus grande selon les Tables de Mayer.

Mais si l'on adopte pour l'heure de la conjonction, $6^h 17' \frac{2}{3}$ du matin à la nouvelle Zemble, la longitude de la loge des Hollandois se trouvera $4^d 25'$ ou $5^d \frac{1}{2}$ plus avancée.

Il nous reste à considérer encore ici l'effet de la parallaxe, & sur-tout celui de la réfraction, laquelle étant extraordinaire, a dû agir puissamment, dans le sens opposé à l'effet de ces parallaxes.

SECOND

SECOND MÉMOIRE SUR LE MOYEN DE DISSOUDRE LA PLATINE PAR L'ACIDE NITREUX,

Et ſur les Déchets extraordinaires qu'éprouve ce métal par l'effet de cette diſſolution.

Par M. TILLET.

JE rendis compte à l'Académie, le 23 Juin 1779, de mes premières obſervations ſur la diſſolution de la Platine dans l'acide nitreux, à la faveur du mélange de ce métal avec une certaine quantité d'or & d'argent : je ne pus lui préſenter alors que quelques faits principaux, en m'engageant à répéter mes expériences ſur cette matière, à les varier, d'après les faits nouveaux qui pourroient me frapper, & à conduire ſur-tout mon travail vers l'objet utile, qui peut ſeul donner quelque prix aux recherches dont il s'agit.

Je n'ai donc rien négligé d'abord pour m'aſſurer de nouveau des deux faits principaux que j'ai avancés : le premier conſiſte en ce que j'ai donné comme abſolument conſtante la diſſolution parfaite de la platine dans l'acide nitreux, lorſque ce métal a été mêlé intimement avec de l'or & de l'argent dans des proportions convenables ; le ſecond eſt relatif au mélange de l'argent ſeul avec la platine, duquel il ne réſulte, ainſi que je l'ai dit, qu'une diſſolution très-imparfaite, ſi l'on fait uſage également de l'acide nitreux ; & cette opération incomplète a toujours lieu, quelque concentré que ſoit cet acide, quoiqu'on l'ait plus ou moins affoibli, & quelqu'action qu'on ait tâché de lui donner, tant par une chaleur conſidérable, que par une ébullition long-temps ſoutenue.

N'ayant aucun doute ſur la diſſolution parfaite de la platine

dans l'acide nitreux, quand l'or fait partie du mélange, j'ai voulu me rendre certain d'une manière bien positive de la dissolution réelle d'une partie de la platine dans l'acide nitreux, lorsque ce métal n'étoit mêlé qu'avec de l'argent : je voyois très-bien qu'une grande partie de la platine précipitée en poudre noirâtre, n'avoit éprouvé qu'une division mécanique; mais je n'étois pas sûr que la portion de ce métal, restée dans la liqueur, y fût réellement dissoute, & je pouvois soupçonner avec quelque vraisemblance, que réduite en particules extrêmement atténuées par l'effet du dissolvant, elle y étoit en état de simple suspension & disposée à se précipiter d'elle-même après un certain temps : j'étois d'autant plus fondé dans cette présomption, que l'acide nitreux, après toute son action sur un mélange d'argent & de platine, reste long-temps fort trouble, même après son refroidissement; que les particules les plus atténuées du métal ne se précipitent que lentement; que la liqueur ne s'éclaircit qu'après quelques jours de repos, mais en conservant toujours une couleur brune & assez foncée pour laisser quelque incertitude sur une véritable dissolution. J'employai donc le moyen qui me parut le plus propre à dissiper mes doutes à cet égard : après avoir laissé reposer assez long-temps l'acide nitreux, dans lequel j'avois fait dissoudre de l'argent mêlé avec un peu de platine, je versai la liqueur aussi claire que je pus l'obtenir, sur un filtre de papier assez serré & que j'avois plié en quatre, afin que d'une filtration plus lente & plus gênée il n'en résultât qu'une liqueur avec laquelle les métaux fussent intimement combinés; j'étendis dans une grande quantité d'eau toute la liqueur que je retirai de cette filtration, & après l'avoir versée dans une terrine, j'y plongeai une plaque de cuivre; l'argent, comme on sent bien, ne tarda pas à se précipiter, & la platine qui avoit passé avec lui à travers le filtre, s'annonça également au-dessus de l'argent par des caractères que je reconnus, & dont un grand nombre d'expériences précédentes m'avoit averti. J'aurai lieu de revenir, dans la suite de ce Mémoire, sur la précipitation de l'argent & de la platine par le moyen

du cuivre, & de faire remarquer que ce procédé, relativement à la platine, n'eſt pas le meilleur que l'on puiſſe employer: il ſuffit pour ce moment-ci, qu'on regarde comme conſtant que la portion de platine reſtée dans l'acide nitreux, après la diſſolution d'un mélange de ce métal avec de l'argent ſeulement, après le dépôt qui s'eſt formé au fond du matras, & lorſque la liqueur s'eſt autant éclaircie qu'il eſt poſſible qu'elle le ſoit, il ſuffit, dis-je, qu'on reconnoiſſe que cette petite portion de platine eſt réellement diſſoute dans l'acide, & l'eſt auſſi parfaitement que l'argent, tandis que la plus grande partie de la platine employée dans le mélange, n'étant à proprement parler que diviſée, ſe précipite bientôt au fond du matras, perd beaucoup moins de ſon premier état que celle qui a éprouvé une véritable diſſolution, & ſouffre par conſéquent beaucoup moins de déchet que celle-ci, lorſqu'il s'agit de la rétablir dans l'état métallique & ſouvent ductile dont elle jouiſſoit.

Les nombreuſes expériences que j'ai faites pour conſtater la diſſolution de la platine par l'acide nitreux, ont roulé principalement ſur des mélanges où ce métal étoit joint à de l'or & de l'argent: ſi j'en ai fait quelques-unes ſur un mélange d'une petite portion de platine & d'une quantité plus ou moins conſidérable d'argent fin ſeulement, je n'y ai été conduit que par la ſimple curioſité; j'y ai eu pour but de conſidérer les criſtalliſations auxquelles ce dernier mélange donne lieu, & qui m'ont paru propres à caractériſer au premier coup-d'œil, l'argent qui contient un peu de platine: ces criſtalliſations ne ſont pas de nature, il eſt vrai, à devenir une règle pour déterminer la quantité préciſe de platine qu'un lingot d'argent peut contenir; mais elles préviennent utilement ſur une eſpèce d'alliage qu'on ne ſoupçonneroit jamais ſans ces caractères extérieurs, & avertiſſent alors de recourir à une opération différente de celle de la coupelle, ſi l'on veut ſéparer la platine de l'argent qui la contient: ces criſtalliſations une fois reconnues, comme un effet aſſez ſingulier qui décèle la platine, le mélange de ce métal avec l'argent

n'a plus rien qui intéresse. La séparation de ces deux métaux n'est pas possible par la voie de la coupelle, & on n'y parvient que difficilement par le moyen des acides. Le seul avantage que paroît offrir un alliage de cette espèce, c'est que l'argent fin acquiert de la consistance & du ressort par son union avec la platine pure, sans perdre beaucoup de sa ductilité, & en conservant dans le mat & le bruni, la couleur tranchante dont on sait que l'argent est susceptible.

S'il est peu de circonstances où l'on trouve quelqu'avantage à unir la platine avec l'argent dans de certaines proportions; & si d'ailleurs l'opération par laquelle on parvient à séparer ces deux métaux, demande un temps assez long, exige des soins pour qu'il n'en résulte pas beaucoup de déchets, & n'a pas la simplicité qu'on y desireroit, parce que la voie de la dissolution, à laquelle seule on peut recourir, ne conduit pas sur le champ à des produits bien distincts; il n'en est pas ainsi du mélange de ces métaux lorsque l'or s'y trouve joint, & qu'il s'agit de les obtenir tous les trois séparément.

Il faut observer d'abord qu'il ne convient point en général d'associer l'or à la platine, & qu'il est de l'intérêt du Commerce que le premier de ces métaux soit dépouillé des moindres parties du second, non-seulement parce qu'il est d'un prix supérieur à celui de la platine, mais encore par la raison que ce dernier métal altère sensiblement la riche couleur de l'or, & le fait d'une manière plus désagréable que le cuivre de rosette: l'or, à la vérité, acquiert toujours de la dureté & du ressort par son union avec la platine; mais cette propriété, avantageuse quelquefois, peut lui être procurée par d'autres métaux & d'une manière plus marquée que la platine ne peut la lui donner. Si l'on suppose cependant un mélange accidentel ou formé à dessein d'or, d'argent & de platine, & qu'il soit question de les séparer par le moyen de l'acide nitreux, alors on aura une dissolution complète des deux derniers de ces métaux; on obtiendra par ordre des précipités bien distincts, & il sera facile de faire reparoître chacune de ces substances dans l'état métallique qui leur est particulier.

Tels ſont les motifs qui m'ont déterminé à ne prendre pour objet principal de mes expériences que des mélanges des trois métaux, & d'en varier les proportions afin de ſaiſir celle où la platine attaquée avec plus de ſuccès, pourroit être ſéparée nettement des deux autres métaux, qui ne ſe trouvoient avec elle que pour en faciliter la diſſolution.

Je ne détaillerai point ici les expériences ſans nombre que j'ai faites, tant en petit qu'un peu en grand, pour bien connoître les faits que je deſirois de conſtater : comme rien ne s'y eſt démenti, à l'égard de la diſſolution bien réelle de la platine dans l'acide nitreux pur, & d'une diſſolution plus parfaite peut-être qu'on ne l'obtient par l'eau régale lorſqu'on fait attaquer la platine ſeule par les deux acides réunis, je n'expoſerai les détails que de quelques-unes de mes expériences; ils ſuffiront ſans doute pour qu'on puiſſe bien juger des conſéquences que j'en ai tirées, & pour que des Chimiſtes plus éclairés que moi perfectionnent mon travail avec moins de peine que je n'en ai eu à l'ébaucher.

Quoique les expériences en petit, ne conduiſent pas ordinairement à des réſultats ſur leſquels il ſoit prudent de compter, cependant du ſcrupule dans les recherches, des inſtrumens faits avec préciſion, & une égalité aſſez conſtante dans les produits, ſont une préſomption favorable pour les conſéquences qu'on en tire : alors une ſeule expérience en grand qui quadre avec une multitude d'autres, leſquelles n'ont roulé que ſur de petites quantités de matière, fait entrer, pour ainſi dire, celles-ci dans le nombre des épreuves exécutées en grand, & achève la conviction.

Je n'employai donc d'abord pour mes expériences que 10 ou 11 grains d'or fin, 1 grain ou 2 de platine, & 30 ou 36 grains d'argent fin. Je dois avertir que la platine dont je fis uſage, étoit ductile & auſſi pure, je crois, qu'il eſt poſſible de l'obtenir : mon deſſein étant de la diſſoudre complètement par l'acide nitreux, j'avois intérêt de ne l'employer qu'autant qu'elle étoit bien dépouillée de tout ce qui pouvoit être attaqué naturellement par ce même acide, afin que je

n'eusse aucun doute sur l'état parfait & vraiment métallique de la platine dont j'aurois opéré la dissolution.

En me réduisant ainsi à de petites quantités, pour les mélanges d'or, d'argent & de platine, j'eus l'avantage de faire plusieurs expériences à la fois, & de suppléer sur le champ par l'une à ce qui m'étoit échappé dans l'autre, ou dont quelque accident m'avoit privé.

L'opération de la coupelle étant un des meilleurs moyens qu'on puisse employer pour que le mélange des trois métaux soit aussi parfait qu'on peut l'espérer, j'y eus recours pour toutes les expériences en petit, & où le poids des trois matières réunies rouloit sur une centaine de grains. Le commencement de ce travail rentroit d'une manière si naturelle dans celui qui concerne les essais d'or, que je ne m'y écartai point de la méthode ordinaire: chacun des mélanges fut passé à la coupelle avec des doses de plomb proportionnées au poids des mélanges; les boutons qui en provinrent furent laminés & roulés en cornets; je les fis attaquer ensuite par l'acide nitreux à trois reprises différentes, & en ne me servant de cet acide concentré que pour terminer l'opération. La liqueur chargée d'argent & de platine, se trouva toujours claire & transparente au sortir du matras; elle l'avoit même été sur le feu vers la fin de son ébullition, & on n'auroit jamais soupçonné que la platine eût fait partie du mélange, après avoir observé sur-tout dans une autre circonstance, c'est-à-dire celle où l'or n'est point associé aux deux autres métaux, combien ce même acide est trouble, noirâtre pendant toute la durée de l'opération, malgré une ébullition long-temps soutenue, & n'acquiert enfin quelque transparence qu'après un assez long repos & le précipité d'une grande partie de la platine.

Les cornets d'or qui résultèrent de ces épreuves se trouvèrent entiers, & parurent au premier coup-d'œil dépouillés des deux autres métaux avec lesquels je les avois mêlés; je les lavai avec soin, & je leur fis subir ensuite un recuit tel que les essais d'or ordinaires l'auroient exigé. Je m'aperçus

d'abord, en considérant ces cornets, qu'ils n'avoient pas la belle couleur de l'or parfaitement épuré; qu'au lieu d'un jaune mat & un peu foncé, il y régnoit un ton de couleur un peu pâle, & on y remarquoit quelques petites taches noirâtres qu'on ne voit jamais sur les cornets d'or après un départ bien exact : je les mis dans la balance, & par leur poids un peu plus fort que celui de la quantité précise d'or que j'avois employée, je reconnus qu'une petite portion de la platine y étoit encore restée, & que l'excédant de poids que je trouvois lui étoit dû. Il n'étoit guère possible en effet que je l'attribuasse à l'argent qui, s'il occasionne quelquefois une surcharge dans les cornets d'or, ne l'y laisse jamais que très-légère, & telle pour l'ordinaire qu'on n'y fait aucune attention; au lieu qu'il s'agissoit pour les cornets d'or dont il est ici question, de plusieurs trente-deuxièmes de grain pour l'excédant de poids, lesquels si on les regarde comme portion de l'argent uni aux cornets avant le départ, n'auroient pas échappé à l'action de l'acide nitreux, d'après toute celle qu'on lui connoît quand il l'exerce sur ce métal. Il m'eût été difficile d'un autre côté d'attribuer cette surcharge du cornet à de nouvel or que la platine eût fourni; la couleur fausse des cornets, les taches que j'y observois, me rappeloient naturellement à la platine, comme cause réelle de l'excédant de poids; & la suite de mes expériences ne m'a laissé aucun doute sur ce fait, que j'aurai lieu de rappeler : j'y insisterai même plus qu'il ne paroît le mériter, afin d'écarter toute idée d'une augmentation de la matière d'or, comme dûe à celui qu'on a soupçonné dans la platine, qu'on a regardé comme partie constitutive de ce métal, par la raison sans doute qu'il a une très-grande pesanteur spécifique, & que les particules d'or qu'on trouve presque toujours mêlées avec la platine brute, semblent assigner à ces deux métaux une origine commune.

Mais on verra bientôt que si la platine est d'une pesanteur spécifique qui a quelque chose de frappant, ce caractère distinctif ne tient point à la présence de l'or; qu'il semble

même diſparoître dans les parties atténuées, dans le précipité preſque ſans conſiſtance qui réſulte de la platine diſſoute dans l'acide nitreux, & que ce métal, qui eſt ſeul comparable à l'or du côté de la peſanteur, loin de réſiſter à cet acide, dans les épreuves dont il s'agit ici, s'y altère, s'y décompoſe en grande partie, tandis que le cuivre, dont la peſanteur ſpécifique n'approche pas de celle de la platine, cède ſans peine il eſt vrai à l'action de l'acide nitreux, mais reparoît bientôt avec tous ſes caractères métalliques, annonce ſa peſanteur naturelle, même en état de précipité, & n'éprouve qu'un déchet médiocre lorſqu'on le rétablit par la fonte dans toute ſa ductilité.

Ayant donc remarqué aſſez conſtamment qu'il reſtoit encore un peu de platine dans les cornets d'or, quelque précaution que je priſſe pour qu'aucune de ſes parties n'échappât à l'action de l'acide nitreux, & m'étant aperçu que plus j'employois de platine dans le mélange des trois métaux, moins le départ étoit complet, je me bornai à une petite quantité de platine pour de nouvelles expériences; elle fut de la vingt-quatrième partie de l'or que j'employai, avec une quantité d'argent deux à trois fois plus forte que celle de l'or. Je parvins enfin à dépouiller totalement les cornets de la platine qu'ils contenoient; ils avoient la netteté, le beau mat & la couleur que j'y deſirois, & je ne retrouvai à la balance que le poids précis de l'or qui étoit entré dans le mélange.

Le ſuccès de cette expérience exige des précautions; il faut que le mélange éprouve une grande chaleur dans la coupelle pendant que la litharge s'y imbibe, que la matière y circule avec un peu plus de vivacité que les eſſais d'or ne le demandent, & que les trois métaux ſoient parfaitement combinés dans le bouton qui les contient; il convient encore que ce bouton ſoit réduit en une lame fort mince, & que, par une conſéquence néceſſaire de cette dernière précaution, le départ ſoit conduit avec beaucoup de ménagemens: ſi en effet on bruſquoit l'opération, en commençant à ſe ſervir d'un acide nitreux un peu trop fort, quelques parties du cornet

cornet pourroient s'en détacher; peut-être même se briseroit-il entièrement, en laissant alors de l'incertitude sur la réunion totale de l'or employé: aussi ai-je toujours eu l'attention, pour ces épreuves délicates, de ne faire usage de l'acide nitreux porté à un certain degré de force qu'au moment d'achever le départ, après que cet acide, très-affoibli d'abord pour la première attaque du cornet, rendu ensuite plus actif pour la seconde, avoit criblé lentement ce cornet, & par-là l'avoit préparé à toute l'action d'un acide nitreux plus puissant.

Dans la vue d'obtenir, s'il étoit possible, un succès égal, en employant le double de platine, je formai un mélange dans lequel ce métal entroit pour un douzième sur onze parties d'or & une quantité d'argent proportionnée. Il me resta presque toujours après l'opération un léger excédant de poids dans les cornets d'or, & cette surcharge de quelques trente-deuxièmes de grain n'étoit pas constamment égale; je fis même une expérience qui me convainquit que si je n'avois pas dépouillé l'or de la totalité de la platine, je ne pouvois pas en attribuer la cause à un défaut d'action de l'acide nitreux: les étuis d'or destinés à renfermer des cornets d'essais, & que j'ai proposés pour faire tout-à-la-fois le départ de plusieurs de ces cornets dans un même matras, ces étuis me servirent utilement pour l'épreuve dont il s'agit. Je fis passer à la coupelle douze grains d'or pur & trente grains d'argent fin; j'en obtins un bouton d'essai ordinaire dont je formai un cornet destiné, comme on peut le prévoir, à servir de témoin dans l'expérience que je projetois: deux autres cornets qui contenoient chacun 11 grains d'or fin, 1 grain de platine & l'argent nécessaire pour le départ, furent mis chacun dans un étui, comme le cornet où il n'entroit point de platine fut renfermé dans le sien, & un même matras servit pour le départ de ces trois cornets. Je donnai à cette expérience l'attention qu'elle demandoit, en ménageant, comme on a vu plus haut, l'action de l'acide nitreux, afin que les trois cornets restassent bien entiers: après qu'ils eurent reçu un recuit convenable dans leur étui, ils en sortirent sans y avoir éprouvé

Mémoires de l'Acad. année 1778, page 505.

la moindre adhérence & ſans qu'aucune de leurs parties ſe fût détachée; portés enſuite à la balance, ils m'inſtruiſirent bientôt de l'effet de l'acide nitreux dont j'étois ſur-tout occupé dans ce moment: le premier de ces cornets avoit exactement le poids des douze grains d'or que j'avois employés pour lui, avant qu'il fut ſoumis au départ. Il n'en étoit pas ainſi des deux autres; l'un conſervoit encore un huitième de grain au-delà des onze grains d'or qu'il avoit reçus, & j'obſervai dans l'autre un excédant de poids encore plus fort; cette ſurcharge aſſez inégale ne pouvoit être attribuée ſans doute qu'à la platine: l'état de ces cornets ne l'annonçoit pas au premier coup-d'œil; mais en les conſidérant avec une certaine attention, & en les rapprochant d'autres cornets d'or qui ne contenoient rien d'étranger à ce métal, on ne remarquoit à leur ſurface ni la grande netteté, ni la couleur riche & particulière à l'or mat qui auroit dû les diſtinguer.

Je ne pouvois pas douter que dans cette expérience l'acide nitreux n'eût agi autant qu'il falloit ſur tout ce qu'il étoit capable de diſſoudre, puiſqu'il n'étoit reſté aucune partie d'argent dans le cornet d'or de 12 grains, quoiqu'on s'aperçoive quelquefois d'une légère ſurcharge en argent dans les eſſais ordinaires par un vice de l'opération: j'ai donc dû conclure avec beaucoup de fondement, que ſi le même acide employé à trois repriſes dans le même matras, & agiſſant avec le même degré de force ſur les trois cornets réunis, a enlevé à l'un tout l'argent qu'il contenoit, ſans porter d'atteinte à l'or, on doit regarder cet acide comme ayant exercé dans cette expérience toute l'action dont il étoit capable, & que s'il s'eſt trouvé un excédant de poids ſur les deux autres cornets, il ne faut pas l'attribuer à un défaut d'énergie dans le diſſolvant ou à quelque vice dans l'opération: tout en effet y a été parfaitement égal, au grain près de platine que chacun de ces deux cornets contenoit, & dont une très-petite portion s'eſt trouvée inacceſſible à l'acide nitreux pendant qu'il a pu diſſoudre ſans peine la plus grande partie de ce métal.

La cauſe de cette imperfection aſſez ordinaire du départ,

lors même que la platine n'entre que pour un douzième de l'or dans le mélange des trois métaux, & qu'on a pour but de conserver en entier le cornet d'or pur qui doit résulter de l'opération, cette cause ne se présente pas d'abord à l'esprit, & peut-être ne pourrois-je pas hasarder à ce sujet quelques conjectures si, dans le courant de mes expériences, je n'eusse pas été averti plusieurs fois d'un fait que je ne soupçonnois pas.

J'ai été contraint, pour des expériences beaucoup plus en grand que celles dont je viens de parler, & que j'exposerai dans la suite de ce Mémoire, d'employer un creuset pour fondre ensemble & mêler aussi intimement que je le pourrois l'or, l'argent & la platine destinés dès-lors à être soumis au départ: après avoir forgé le lingot provenant de cette fonte, & du poids de 4 onces au moins, je le réduisois en lames très-minces, & je le divisois en trente-deux parties; chacune d'elles, du poids d'un gros ou environ, étoit roulée en cornet, & j'en réunissois ensuite seize pour un seul départ dans un même matras. Après cette opération, les lotions répétées dans l'eau distillée & le recuit ordinaire, je vis que mes seize cornets étoient en général assez bien conservés; mais je m'aperçus qu'il régnoit des fentes circulaires sur quelques-uns d'eux, qu'il s'élevoit un peu au-dessus du corps du cornet de petites lames minces, très-étroites, dont la surface étoit d'or, mais qui avoient une consistance, un ressort que n'ont jamais les cornets sortis d'un départ, & encore moins des parties effilées & fort minces qui s'en seroient détachées: j'eus bientôt reconnu, à l'aide de la loupe, qu'une petite portion de platine, ayant encore la couleur de ce métal en état de ductilité, régnoit dans l'intérieur des petites lames circulaires qui s'étoient séparées en partie du corps du cornet, & que l'or leur servant comme d'une espèce de fourreau, les auroit toujours dérobées à ma vue, si ces petites lames, par un effet de leur ressort naturel, n'eussent pas occasionné une rupture dans le cornet & ne m'eussent pas averti de leur présence par la couleur si différente de l'or qu'elles offroient du

côté de la tranche & à la faveur de cette même rupture du cornet.

On voit clairement sans doute, d'après les détails dans lesquels je viens d'entrer, qu'une portion peu considérable de la platine ductile & réduite en petites parties que j'avois employée, pour l'expérience dont il s'agit ici & à laquelle je reviendrai, n'étoit pas entrée en fusion dans le creuset, lorsque j'y fis fondre les trois métaux; qu'elle y resta comme isolée & au fond du creuset, selon toute apparence, pendant que ces métaux se combinèrent & se pénétrèrent réciproquement; qu'elle passa dans le lingot en état de platine pure, lorsque je vidai le creuset; qu'elle s'alongea entre les rouleaux du laminoir, en prenant toute l'étendue que son volume, quel qu'il fût, lui permit d'occuper; qu'elle s'étendit peut-être de 1 ou 2 pouces sur 96 de longueur qu'avoit la lame entière produite par le lingot; qu'elle put par conséquent faire partie de deux des cornets que je tirai de cette lame, y résister à l'acide nitreux, & s'y manifester enfin après leur départ, avec tous les indices que j'ai exposés.

Si ce fait, qui m'a paru mériter quelque attention, est regardé comme constant, je crois qu'il fera naître des conjectures bien fondées sur la cause de l'excédant de poids qu'on remarque ordinairement dans les cornets d'or qui résultent d'un mélange d'or, d'argent & d'un peu de platine, après que ces métaux ont été séparés.

La platine résiste, étant seule, au feu le plus violent de nos fourneaux; elle ne se fond qu'avec peine, étant jointe à d'autres métaux assez fusibles, tels que l'or, l'argent & le cuivre; j'aurai même lieu de faire observer, dans d'autres expériences que je rapporterai, qu'on regarde quelquefois la platine comme fondue parfaitement avec quelqu'un de ces métaux fusibles, tandis qu'elle n'y est que dans un état pâteux & bien éloigné de celui d'une exacte combinaison. Dès-lors ne pourroit-on pas soupçonner, avec beaucoup de vraisemblance, que dans les mélanges d'or, d'argent & de platine, quelques-unes des parties de ce dernier métal refusent quelque-

fois de s'incorporer dans la matière en fusion, & y resten dans l'état simple de ramollissement, parce que les parties de la matière en bain qui les environnent, n'ont pas assez de chaleur pour faire passer à l'état de fluidité ces petites portions de platine & achever la combinaison ? Des faits palpables viendront bientôt à l'appui de ce que j'avance ici, & prouveront, je crois, qu'on n'est pas toujours sûr d'avoir fondu complètement la platine, au milieu même des métaux qu'on voit en pleine fusion.

D'ailleurs il est bon d'observer que de petites portions de platine fondue, à la faveur de l'or & de l'argent, peuvent se trouver non pas pénétrées par l'un & l'autre de ces métaux, mais enveloppées simplement & hors d'attaque par conséquent de tout ce qui seroit capable de les entamer, puisqu'elles ne peuvent l'être qu'autant qu'elles sont pénétrées de l'or & de l'argent réunis, qu'autant que les trois métaux forment un tout parfaitement combiné.

Ces remarques, dont il eût été difficile que je me fusse occupé avant que d'avoir considéré avec attention, dans le courant de mes expériences, quelques effets peu ordinaires & que j'étois bien éloigné de prévoir, ces remarques, dis-je, ne paroissent-elles pas conduire à une explication assez plausible de la cause de l'excédant de poids qu'offrent communément les cornets d'or, après le départ des trois métaux réunis dont j'ai parlé plus haut ?

Il est certain d'abord, qu'en faisant attaquer par l'acide nitreux un mélange d'or, d'argent & de platine, on obtient la dissolution de l'argent & celle de la plus grande partie de la platine ; que moins on emploie de ce dernier métal dans l'opération du départ, moins il en reste proportionnément dans les cornets d'or ; & qu'en ne faisant entrer la platine que pour un vingt-quatrième du poids de l'or dans un alliage de cette espèce, on peut parvenir à dépouiller totalement les cornets d'or du peu de platine qu'ils contenoient. Ce métal, si rebelle, quand il est seul, aux plus vives attaques de l'acide nitreux, cède donc facilement à ce même

acide quand il ſe trouve combiné avec l'or & l'argent? Cette diſſolution n'a donc lieu, n'eſt conſtante & plus parfaite peut-être que celle de la platine ſeule par l'eau régale, qu'à la faveur d'une exacte combinaiſon des trois métaux? S'il eſt évident que dans ces circonſtances l'acide nitreux a la plus grande action ſur la platine, comment ſeroit-il poſſible qu'une petite portion de ce métal échappât à la puiſſance de cet acide, pendant que ce métal auroit été diſſous preſqu'en entier, & l'auroit été promptement ſi on ne ſuppoſoit pas que cette petite portion de platine n'a été garantie de l'action de l'acide que parce qu'elle ſe trouvoit en état de platine pure, & comme iſolée entre les trois métaux mélangés? Le fait que j'ai cité plus haut, ce filet de platine ductile, que l'or recouvroit, qui avoit été laminé ſous cette enveloppe, & que je n'aperçus qu'à la faveur de la rupture du cornet, cette portion de platine ainſi conſervée, après la fonte complète en apparence des trois métaux auxquels elle appartenoit, ne ſemble-t-elle pas venir à l'appui de l'opinion que j'expoſe? Si on ne regarde pas encore ce fait, quelque frappant qu'il ſoit, comme auſſi concluant pour cette opinion qu'il le paroît au premier coup-d'œil, on voit au moins qu'il méritoit que je m'y rendiſſe attentif, & qu'il conduit à une explication aſſez naturelle de l'excédant de poids ſur les cornets d'or dont je cherche ici la raiſon.

Qelle que ſoit la cauſe de cet excédant de poids, on peut l'enlever par une ſeconde opération, qui ſera faite avec d'autant plus de ſuccès, que cet excédant ſera plus foible relativement à la quantité d'or fin qui ſera entrée dans les cornets; & c'eſt alors que ceſſera toute illuſion ſur une augmentation de la matière même de l'or, comme produite par celui qu'on a ſoupçonné dans la platine : après une telle expérience, le préjugé tombe néceſſairement; l'or qu'on avoit employé reſte ſeul, & l'excédant de poids s'évanouit.

J'ai déjà annoncé qu'on parvenoit plus aiſément à dépouiller l'or de la platine dans l'opération du départ, en évitant de le conſerver en cornet, & en le faiſant précipiter en une chaux

aſſez fine au fond du matras. On ſait que par un départ trop prompt & un acide nitreux trop actif, on a bientôt briſé les cornets d'eſſais & diviſé l'or en une infinité de parties; mais dans cette opération-ci, c'eſt d'un mélange des trois métaux où l'argent entre en plus grande quantité que le départ des eſſais d'or ne l'exige, c'eſt de la diſſolution lente & progreſſive des deux métaux attaquables par l'acide nitreux, qu'il faut attendre une chaux d'or bien atténuée, ſur-tout ſi la combinaſon des matières a été parfaite, & qu'on peut eſpérer que cet or réduit en poudre ne contiendra plus rien d'étranger. On ne ſauroit ſe diſſimuler cependant que ce procédé demande beaucoup d'attention & une certaine dextérité pour qu'il n'en réſulte pas un inconvénient; l'or ainſi précipité en une chaux très-diviſée qu'il faut bien laver pour la dépouiller de l'acide nitreux dont elle reſte imbibée, & qui tient encore en diſſolution quelques parties des deux autres métaux, cet or eſt difficile à raſſembler parfaitement; on court le riſque par une ſuite des lotions & de la précipitation de cette chaux d'or dans un creuſet, afin qu'elle y éprouve un recuit, de perdre quelques-unes de ſes parties les plus atténuées, & de ne pas obtenir par conſéquent dans cette circonſtance le poids total de l'or qu'on aura employé: mais avec des précautions on peut éviter cette perte; & comme on ſera rarement dans le cas d'avoir recours à ce procédé moins ſimple pour dépouiller l'or de la platine, on y portera plus volontiers une certaine attention, celle qu'on donne à des expériences délicates & où il s'agit d'établir des produits qui entreront en comparaiſon.

Je n'ai conſidéré juſqu'ici la platine que relativement à ſa diſſolution dans l'acide nitreux, à la faveur de l'or & de l'argent qu'on lui aſſocie, & par rapport encore à la difficulté qu'on éprouve pour la bannir totalement de celui de ces métaux qui réſiſte à l'acide nitreux & ſubſiſte en entier après l'opération. Je vais expoſer dans la ſuite de ce Mémoire, les obſervations que j'ai faites ſur la manière de ſéparer la platine, après ſa diſſolution dans l'acide nitreux, de l'argent avec lequel elle y eſt combinée, ſur l'état où elle ſe trouve par

une ſuite de cette diſſolution, & ſur les déchets conſidérables que j'y ai remarqués, malgré toutes les précautions que j'ai priſes pour ne rien perdre du précipité de ce métal.

Mes expériences, lorſque je commençai ces recherches, ne roulèrent d'abord que ſur de petites quantités des trois métaux réunis, & par conſéquent ſur très-peu de platine en particulier; mais elles furent ſi mulipliées que je pus recueillir, à différentes repriſes, pluſieurs précipités de platine, & les conſidérer attentivement, avant que de leur faire reprendre l'état métallique, que rien en eux ne paroiſſoit annoncer.

Le premier moyen que j'employai pour retirer la platine de l'acide nitreux, où elle avoit été diſſoute avec l'argent qui étoit entré dans le mélange des trois métaux, fut d'étendre la diſſolution dans une grande quantité d'eau & d'y mettre enſuite une plaque de cuivre rouge, ſuivant le procédé connu & adopté pour les travaux en grand: l'argent ſe précipita d'abord avec ſon éclat métallique; il couvrit le cuivre de ramifications brillantes, découpées comme la fougère & ſi déliées qu'elles s'inclinoient en tout ſens au moindre mouvement de l'eau; elles offroient alors un ſpectacle très-agréable, par l'éclat plus ou moins vif qu'elles prenoient à la plus légère ondulation: mais ce ſpectacle nouveau pour moi, quoique j'euſſe fait précipiter mille fois de l'argent par le cuivre, ne dura pas long-temps; bientôt une poudre brune commença à s'attacher à ces ramifications; elle en ternit l'éclat par des degrés inſenſibles, les affaiſſa peu-à-peu & les couvrit enfin de manière que je n'aperçus plus l'argent dont la plaque de cuivre étoit enveloppée, ni même celui qui s'étoit précipité au fond du vaſe, & que cette poudre brune déroboit totalement à mes yeux. Je ne doutai point qu'elle ne fût dûe à la platine contenue dans la diſſolution, & je ſoupçonnai dès-lors qu'elle avoit été la cauſe aſſez difficile à expliquer des belles ramifications que j'avois d'abord remarquées.

J'aurai occaſion de faire obſerver qu'un dixième de platine fondu avec de l'argent fin, y occaſionne des criſtalliſations, y donne lieu à la formation d'une multitude de figures pyramidales

pyramidales & régulières, qui ont beaucoup de rapport avec le fait dont je viens de parler.

J'avois donc obtenu, par ce moyen, l'argent & la platine précipités l'un après l'autre, mais confondus en grande partie & hors d'état, étant réduits à des molécules impalpables, de pouvoir être séparés même grossièrement : je n'hésitai point par conséquent à laisser ces deux métaux confondus ; ils formoient une chaux grise que je lavai avec soin & que je fis recuire dans un creuset : elle conserva la même couleur après le recuit ; mais lorsque je l'eus fondue, le lingot qui en provint avoit à peu-près la blancheur de l'argent exempt de platine, & la mie du lingot, à l'endroit où il fut cassé, étoit d'un blanc assez mat.

Ce fut en examinant sa superficie à l'aide d'une loupe, que je commençai à m'apercevoir des cristallisations dont j'ai parlé, & que je fus mis sur la voie pour en obtenir de plus parfaites : on verra bientôt pourquoi je remarque ici que la couleur grise de la chaux subsista après le recuit, & disparut après la fonte. Je réduisis ce lingot en lames très-minces que je fis dissoudre par l'acide nitreux ; après le refroidissement de la liqueur & un assez long repos, j'eus au fond du matras un précipité de platine, mais bien moins considérable que je ne l'attendois : je n'ignorois pas que l'acide nitreux avoit pu en dissoudre une partie, & produire par-là une diminution sur le précipité ; mais cet acide en eût-il autant dissous qu'il en étoit resté en dépôt au fond du matras, ce qui n'étoit guère probable d'après d'autres expériences que j'avois faites sur un pareil mélange de platine & d'argent, je ne jugeois point encore que ce précipité fût aussi considérable, à beaucoup près, que la poudre noirâtre qui recouvroit la chaux d'argent, & qui confondue avec elle, étoit entrée dans la composition du lingot que je venois de faire dissoudre.

Je crus donc devoir répéter cette même expérience, à une différence près qui paroissoit peu essentielle, mais d'où j'attendois quelque lumière sur ce qui m'avoit surpris dans l'expérience dont je viens de parler : au lieu de faire recuire

& de fondre ensuite la chaux d'argent mêlée de platine que j'obtins en précipité par le cuivre d'une dissolution pareille à la première, je me contentai de la faire sécher sur un feu doux, & après l'avoir ramenée, en la remuant sans cesse avec une spatule, à l'état d'extrême division où elle étoit d'abord, je la mis dans un matras dont la boule avoit beaucoup plus de capacité qu'il n'en eût fallu pour une dissolution ordinaire d'argent; je ne versai d'abord qu'un peu d'acide nitreux affoibli sur cette chaux: on juge bien que malgré cette précaution l'effervescence fut très-vive; lorsqu'elle fut calmée, je versai de nouvel acide nitreux; j'en ménageai l'action en ne l'appliquant à la chaux que par intervalles; & c'est ainsi que par degrés & à froid je parvins à dissoudre la plus grande partie de l'argent qu'elle contenoit. Lorsque je n'eus plus à craindre une certaine effervescence, tant de la chaleur qu'il convenoit de donner à la dissolution que de l'emploi d'un acide plus actif, je mis le matras sur des charbons à demi-éteints, & j'y laissai l'acide en ébullition jusqu'à ce qu'il m'eut paru qu'il avoit produit tout son effet: lorsque la liqueur se fut refroidie & eut acquis de la transparence, je la décantai avec précaution; je versai sur le dépôt resté au fond du matras un acide nitreux plus fort, & je le fis bouillir aussi pendant quelque temps sur un feu modéré: après le refroidissement de cet acide, je remarquai que le dépôt étoit beaucoup plus considérable que celui de l'expérience précédente, & qu'il paroissoit répondre à la quantité de poudre noirâtre qui avoit recouvert la chaux d'argent dans l'un & l'autre précipité que j'avois obtenu par le cuivre. Je commençai dès-lors à soupçonner que si je n'avois eu que très-peu de dépôt après la dissolution du lingot dont j'ai parlé plus haut, quoiqu'il contînt autant de poudre noirâtre que la chaux dont il s'agit ici, c'est que, par la fonte, une grande partie de cette poudre s'étoit décomposée, avoit perdu peut-être les propriétés métalliques, & la faculté par conséquent de s'incorporer dans le lingot; au lieu que cette même poudre noirâtre mêlée avec la chaux d'argent & foiblement attaquée

par l'acide nitreux, qui exerçoit principalement & avec la plus grande facilité sur l'argent toute l'action dont il étoit capable, cette poudre résultant de la platine, a pu rester dans le même état où elle étoit lorsqu'elle s'est précipitée par le moyen du cuivre, puisqu'en la faisant attaquer de nouveau par l'acide nitreux, je n'ai pu produire sur elle qu'un effet qu'elle avoit déjà éprouvé : mais il n'en a pas été ainsi sans doute de l'effet qu'a produit sur elle le feu, & un feu tel qu'il est nécessaire pour que la chaux d'argent se réduise parfaitement en bain.

En réfléchissant sur les faits que j'expose ici, dans l'ordre où ils m'ont frappé, on commence à sentir que la dissolution de la platine ductile, affinée, ayant toute sa pesanteur spécifique, prise en un mot dans l'état le plus parfait que nous lui connoissions, on commence, dis-je, à entrevoir que cette dissolution par l'acide nitreux, est une terrible épreuve pour ce métal, & qu'il y souffre dans sa matière propre, dans les principes qui le constituent, une altération dont les autres métaux sont à l'abri. Les faits que j'ai encore à rapporter, quadreront avec ceux-ci : on verra sans cesse des précipités de platine, ou au moins une grande partie de ces précipités, échapper aux moyens connus de rendre aux substances métalliques les propriétés qui les distinguent, & disparoître, pour ainsi dire, entre des mains occupées à les rétablir dans leur premier état.

Il faut beaucoup de précautions pour recueillir ces précipités & pour les réduire à un état sec & pulvérulent; l'infinité de particules dont ils sont l'assemblage, ont tant de légèreté qu'elles ne tombent totalement au fond du matras qu'après un long repos, & qu'on ne soupçonneroit jamais qu'elles eussent appartenu à un métal d'une aussi grande pesanteur que l'est la platine. Je crus d'abord qu'en mettant cette poudre noirâtre dans une capsule de verre, pour l'y faire sécher sur un bain de sable & ensuite dans un creuset, afin qu'elle y éprouvât un recuit, je pourrois l'obtenir, comme les précipités d'autres métaux, en un état pulvérulent & même métallique; mais je fus fort trompé à cet égard : ce précipité réduit à

très-peu de chose, dans la capsule de verre par la sécheresse, en comparaison de ce qu'il étoit avant qu'il y reçût une douce chaleur, s'attacha fortement au fond & aux parois de la capsule; je ne pus en détacher une partie qu'à l'aide de la pointe d'une lame de couteau; & une autre portion de ce même précipité que je voulus faire sécher dans un creuset, y resta tellement adhérente, qu'il me fut impossible de l'en détacher. J'avois eu l'attention cependant de laver à plusieurs reprises ce précipité, & de lui enlever par-là, autant qu'il m'avoit été possible, les moindres parties de l'acide, très-affoibli d'ailleurs, dans lequel il avoit nagé: je vis alors qu'il falloit se borner à la capsule de verre pour faire sécher ce dépôt noirâtre, mais qu'il y avoit une précaution à prendre pour ne rien perdre de ce dépôt desséché: ce soin ne consista qu'à rapprocher vers le milieu de la capsule les parties du dépôt qui en étoient le plus éloignées, à mesure qu'elles commençoient à perdre leur humidité, à ne pas attendre qu'elles l'eussent perdue entièrement pour les détacher de la surface du vase, & à former ainsi au milieu de la capsule un petit amas auquel s'étoit réduit tout le dépôt que j'y avois mis. J'eus alors le précipité de platine sous la forme d'une poudre noirâtre, dont j'ai été contraint de parler plusieurs fois avant que j'eusse dit comment je l'avois obtenue: elle étoit si légère que le moindre souffle l'auroit dissipée, & qu'un petit amas de cette poudre, de la grosseur ou à peu-près d'une noisette, ne pesoit pas tout-à-fait 5 grains: encore est-il bon d'observer qu'elle receloit quelques parties d'argent qui en augmentoient un peu le poids.

Je fis plusieurs expériences dans la vue d'examiner si cette poudre ne pourroit pas reprendre une certaine consistance & revenir à l'état métallique dont elle me paroissoit si éloignée: j'en fis passer à la coupelle avec du plomb seulement; j'en mêlai d'autre avec une quantité déterminée d'argent fin, & une dose de plomb convenable, qui subit également l'épreuve de la coupelle; je joignis encore du *minium* à une portion de cette poudre, & je la traitai par le flux noir. Le résultat

de ces expériences fut toujours que presque la totalité de cette poudre disparoissoit dans les produits : à peine l'argent mis à dessein dans la coupelle conservoit-il quelque trace de platine ; on s'en apercevoit encore moins dans les petits grains d'argent dûs aux particules de ce métal que la poudre contenoit, & que la litharge, en s'imbibant dans les coupelles, avoit laissées sur leur bassin : rien n'avoit pu donner à ce précipité de platine la consistance d'une matière quelconque, loin de l'avoir rétabli dans son état métallique; je n'aperçus même aucune espèce de scories sur le bassin des coupelles où ce précipité, soit seul avec du plomb, soit joint à de l'argent, avoit passé par l'épreuve de la litharge.

Dans une de mes expériences, où j'avois joint à 24 grains d'or fin 69 grains d'argent fin également, & 5 grains ou à peu-près de précipité de platine, je ne remarquai point de scories aux bords du bassin de la coupelle, comme on y en voit dans quelques circonstances, après que la litharge s'y est imbibée ; le bouton composé d'or, d'argent & de quelques particules de platine, étoit net, bien arrondi, & avoit l'éclat ordinaire : je le pesai avant que d'en faire le départ; je fus surpris d'en trouver le poids plus foible de 4 à 5 grains qu'il n'auroit dû être suivant la quantité des trois matières que j'avois employées, & je craignis, dans le premier moment, d'avoir oublié de mettre dans la coupelle le précipité de platine en poudre, quoiqu'il fût spécialement l'objet de mon expérience ; mais je ne pus pas douter, par un examen plus particulier du bouton, par la suite du départ que j'en fis & le résultat de cette opération, que le précipité de la platine n'eût été joint dans la coupelle aux deux autres métaux : les deux cornets d'or que j'obtins de cette expérience, étoient à la vérité très-beaux, mais je crus y apercevoir quelques indices légers de platine, & ils me suffirent pour que les conséquences que j'avois à tirer me parussent bien fondées.

Si on rapproche en effet cette dernière expérience de celles qui la précèdent, on reconnoîtra sur le champ que le précipité de platine n'a pas plus de consistance dans une épreuve que

dans une autre, malgré les différences qu'on y a remarquées; & que si quelque portion de ce précipité y a repris ses propriétés métalliques, elle est peu considérable & laisse toujours subsister une présomption assez forte sur la décomposition de ce métal singulier.

On m'objectera peut-être que cette poudre noirâtre que mes expériences m'ont donnée, n'est pas dûe à la platine pure & dépouillée de tout ce qui lui est étranger; que la matière noire & ferrugineuse avec laquelle on la trouve toujours unie, peut être l'origine de celle que j'ai recueillie par voie de dissolution, & qu'il est difficile de concevoir qu'un métal aussi solide se détruise, pour ainsi dire, par l'effet d'un dissolvant, & encore dans des circonstances particulières, tandis que l'action de ce même dissolvant n'a jamais de pareilles suites dans les autres métaux qui s'y trouvent exposés, quelque force qu'on suppose dans cet acide pour les dissoudre, quelle que soit la violence avec laquelle ces métaux en sont attaqués. Je répondrai en rappelant ici ce que j'ai dit, que la platine dont j'ai fait la matière de mes expériences, étoit très-ductile, qu'elle devenoit brillante à peu-près comme l'argent au sortir du laminoir, & qu'elle étoit aussi pure que je pouvois l'espérer: j'ajouterai que je ne me servis que d'or & d'argent fins pour toutes mes opérations, & que je fus très-attentif, en les suivant, à ne laisser aucune incertitude sur ce qui résulteroit de la dissolution de la platine par l'acide nitreux.

S'il est nécessaire d'écarter l'or & l'argent fins pour remonter au principe de ce résidu singulier, il n'est pas possible de le chercher ailleurs que dans la platine; & si la pureté de celle dont je me suis servi n'est pas parfaitement prouvée, on verra au moins, par une expérience dont je rendrai compte, que les portions de ce métal qui se sont annoncées encore avec les caractères métalliques, après une première dissolution, les ont perdus à la seconde, & se sont converties en cette poussière noirâtre que j'ai tenté en vain de ramener à son premier état de solidité.

On remarque sans doute, dans le compte que je viens de

rendre de mes premières expériences, que le moyen dont je me suis servi pour retirer de l'acide nitreux l'argent & la platine qu'il tenoit en diſſolution, n'étoit pas le meilleur que je puſſe employer : on a vu que, par une ſuite de la confuſion qui ſe faiſoit des deux métaux précipités l'un ſur l'autre par la même cauſe, j'étois obligé de mettre de nouveau l'argent en diſſolution pour que la platine s'en ſéparât & reſtât ſeule au fond du matras. Il eſt vrai que ce procédé n'étoit pas aſſez ſimple ni même propre à me procurer des produits bien diſtincts ; mais il me fut utile pour me faire connoître cette poudre noire, ce réſidu ſans conſiſtance que la platine fournit ; je pus, en l'employant, diſtinguer aſſez bien la partie du métal capable de reprendre les caractères métalliques d'avec la portion de ce même métal que j'eſſayai en vain, par différens moyens, de rétablir dans ſon premier état. Le procédé en effet dont je fis uſage en continuant mes recherches, fut plus favorable à la vérité pour ſéparer l'argent de la platine d'une manière exacte, mais il étoit de nature à me dérober la préſence de ce réſidu noirâtre, & à ne me laiſſer après le dépôt total de l'argent, pour produit preſque unique de la platine, que la partie de ce métal qui en avoit repris les propriétés. Je dûs donc au moyen le moins avantageux de faire précipiter l'argent & la platine du diſſolvant qui les contenoit, la connoiſſance de ce réſidu ſingulier : quoiqu'en apparence il ſoit peu digne d'attention, je crois cependant qu'il pourra donner lieu à de nouvelles recherches ſur la nature de la platine ; que les Chimiſtes, qui ſe ſont déjà occupés de ce métal avec tant de ſuccès, pourront le conſidérer de nouveau relativement à mon travail qui n'eſt qu'ébauché, & que bientôt ils verront mieux que moi, par les épreuves que la platine ſubira entre leurs mains, combien elle eſt éloignée, malgré tout ce qui la diſtingue, de l'or & de l'argent, ſur-tout quand on conſidère l'état fixe de ces deux métaux & les principes inaltérables qui les conſtituent.

Lorſque je commençai mes expériences, pour ſéparer de la manière la plus exacte l'argent & la platine que l'acide

nitreux tenoit en diſſolution, je me bornai à une petite quantité des trois métaux, afin de ne tenter des expériences un peu plus en grand qu'avec la certitude d'y réuſſir: je n'employai d'abord que 12 ou 24 grains d'or fin, 2 ou 4 grains de platine ductile & une quantité d'argent fin trois fois plus forte, ou à peu-près, que celle de l'or qui faiſoit partie du mélange: les trois métaux paſſoient à la coupelle, non pour y être épurés, comme on ſent bien, puiſqu'aucun d'eux ne contenoit d'alliage, mais afin qu'ils s'y fondiſſent complètement à la faveur de la litharge, & y entraſſent dans une combinaiſon parfaite: le bouton que j'en retirois étoit laminé, réduit en cornet & diſſous dans l'acide nitreux: à meſure que je retirois du matras l'acide plus ou moins affoibli, que j'y avois mis à deux ou trois repriſes, je le verſois dans un flacon où devoit ſe faire le premier précipité; je lavois le cornet d'or, je lui donnois le recuit ordinaire, & je ne m'occupois plus enſuite que de la diſſolution d'argent & de platine que le flacon contenoit.

Je commençois par y verſer une quantité d'eau diſtillée, égale à celle de la diſſolution, & je faiſois parfaitement le mélange de la totalité de la liqueur, en agitant fortement le flacon; j'y verſois enſuite à pluſieurs repriſes de l'eſprit de ſel; je laiſſois repoſer la liqueur pendant quelques heures, afin que ſa partie ſupérieure s'éclaircît, & que je puſſe juger, en y faiſant tomber des gouttes d'eſprit de ſel, ſi elle contenoit ou non quelques parties d'argent: lorſque je m'étois rendu certain que la totalité, ou à peu-près, de ce métal s'étoit précipitée au fond du flacon, je laiſſois repoſer la liqueur pendant pluſieurs jours; je ne la décantois même qu'autant qu'elle étoit de la plus grande tranſparence & que l'eſprit de ſel ne la troubloit plus. L'affaiſſement bien marqué de l'argent & ſon adhéſion au fond du flacon me donnoit la facilité de verſer dans un vaſe de verre ou dans une terrine de grès la liqueur très-claire, & juſqu'à la dernière goutte; elle ne contenoit plus que la platine: l'argent en effet reſté dans le flacon en étoit entièrement dépouillé, comme je l'ai toujours reconnu,

reconnu, en rendant à ce métal sa première ductilité. La liqueur que la terrine contenoit, & qui étoit devenue une eau régale foible, attiroit ensuite toute mon attention; elle en fut long-temps l'objet principal dans le cours de mes expériences, parce que je n'employai pas d'abord le seul moyen d'en retirer totalement la platine, & que je fus trompé sur ce qu'il y avoit de réel en résidu de ce métal dans les premiers précipités que j'obtins. J'étendois donc dans une assez grande quantité d'eau distillée cette liqueur, tenant la platine en dissolution, & après l'avoir mêlée parfaitement en me servant d'une spatule de bois, j'y versois de l'alkali fixe avec ménagement; après l'effervescence qui en étoit la suite prompte, j'y versois de nouvel alkali; j'attendois qu'il eût produit son effet, & je continuois ainsi d'y en verser jusqu'à ce que la liqueur devînt calme & que l'acide fût saturé : alors je commençois à m'apercevoir que la liqueur perdoit un peu de sa transparence, qu'il nageoit une infinité de particules blanchâtres, légères, un peu transparentes elles-mêmes, & qui, en se réunissant, tomboient fort lentement au fond du vase; lorsque le dépôt étoit formé & que la liqueur avoit repris sa transparence, j'en décantois la plus grande partie, & je filtrois le reste à travers du papier fin, assez serré & plié en quatre: le dépôt resté sur le filtre ressembloit beaucoup, tant pour la couleur que pour l'espèce de consistance qu'il avoit, à de la colle de farine qui a perdu une partie de son humidité. J'enlevois de dessus le filtre la feuille sur laquelle étoit le dépôt; je le laissois sécher à l'air; je l'enveloppois ensuite dans cette même feuille de papier, & j'en formois un peloton que je brûlois dans un creuset bien couvert, en le faisant rougir au milieu des charbons. Étant certain que par cette précaution je ne perdois rien du dépôt, je mêlois la poudre jointe aux cendres du papier à laquelle il s'étoit réduit, soit avec du *minium*, soit avec de la chaux de cuivre, & je la traitois par le flux noir : je passois à la coupelle le culot de plomb qui me venoit d'une part, & je faisois dissoudre dans l'acide nitreux le culot de cuivre réduit en lames minces que je

retirois d'un autre côté; je n'employois l'acide, dans cette circonſtance, qu'à froid & après l'avoir affoibli.

Dès les premières expériences que je fis pour retirer la platine de l'acide nitreux, par le procédé plus exact dont je viens d'expoſer les détails, je vis avec ſurpriſe que non-ſeulement le plomb ſur la coupelle & le cuivre dans le matras ne m'avoit pas laiſſé la petite quantité de platine à laquelle je devois m'attendre, dans l'ordre ordinaire des réductions de métaux, mais qu'il s'y en trouvoit à peine quelques particules, dont peut-être je ne me ſerois pas aperçu ſi je n'euſſe pas compté ſur un produit plus ou moins fort en platine dans ces opérations. Je répétai pluſieurs fois ces expériences tantôt en me bornant à la quantité préciſe d'or, d'argent & de platine que j'avois d'abord employée, tantôt en augmentant un peu la quantité de ces trois métaux, & en donnant une attention nouvelle aux détails de l'opération : j'ai toujours reconnu que ce qui reſtoit en platine, ſoit ſur la coupelle, ſoit dans le matras, n'avoit aucune proportion avec la quantité de ce métal qui étoit entrée dans le mélange, & j'ai ſenti que ce fait, aſſez ſurprenant en lui-même, méritoit encore d'être approfondi.

Dans la forte perſuaſion où j'étois que la platine diſſoute dans l'acide nitreux pouvoit en être précipitée par le moyen de l'alkali fixe, mais que peut-être cette précipitation n'avoit lieu que difficilement, je crus qu'en mêlant de la diſſolution de cuivre par le même acide avec celle qui contenoit de la platine, le dépôt de ce dernier métal deviendroit plus facile à la faveur du cuivre qui s'y trouveroit mêlé, & qui certainement ſeroit très-prompt à ſe précipiter.

Je verſai donc de l'alkali fixe ſur un mélange de ces deux ſortes de diſſolution : lorſque la liqueur bien ſaturée eut repris ſa tranſparence, j'en décantai la plus grande partie, & je filtrai le reſte qui contenoit tout le dépôt : lorſque la filtration fut finie, je fis ſécher ce dépôt bleuâtre; je l'enveloppai avec le papier même ſur lequel il étoit reſté; je le réduiſis en cendres, comme on a vu que je l'ai fait pour

une autre expérience, & je procédai à la réduction de ce dépôt par le moyen du flux noir. J'avois fait diſſoudre un gros de cuivre dans l'acide nitreux qui me ſervit pour cette expérience, & qui fut mêlé avec la diſſolution de platine : je retrouvai ce même gros de cuivre, ou à peu-près, dans le culot que je retirai de cette opération ; je l'aplatis ſous le marteau ; je le laminai, & je le fis diſſoudre à froid dans de l'acide nitreux affoibli ; mais ce fut inutilement pour y retrouver auſſi la quantité de platine que j'avois employée : cette expérience ne fit que confirmer celles dont j'ai rendu compte ; elle me convainquit, par une comparaiſon frappante, que le cuivre, bien inférieur à la platine, quant à la peſanteur ſpécifique & à la roideur des parties, n'éprouvoit pas cependant une altération conſidérable dans ſa diſſolution par l'acide nitreux, tandis que la platine, avec des caractères qui annoncent la plus grande ſolidité dans les principes qui la conſtituent, ne ſort jamais d'une pareille épreuve, l'acide nitreux fût-il affoibli, qu'avec des pertes qui étonnent & qui doivent la faire regarder à cet égard, comme au-deſſous même du cuivre, loin qu'on puiſſe la placer à côté des métaux précieux.

On juge ſans doute que d'après tout ce qui s'étoit paſſé ſous mes yeux, & un grand nombre d'expériences qui ne s'étoient point démenties ſur le fait dont il s'agit ici, je fus conduit comme néceſſairement à conclure, ou que la platine ſe décompoſoit, ſe détruiſoit en très-grande partie lorſque je la rendois diſſoluble par l'acide nitreux, ou qu'une fois diſſoute dans cet acide, elle y reſtoit ſi bien combinée, que les moyens dont je me ſuis ſervi pour la faire précipiter n'étoient pas capables de produire cet effet, ne pouvoient pas au moins le produire tout entier.

J'ai donc fini par tourner mes vues de ce dernier côté ; j'ai voulu être certain que j'aurois retiré de la diſſolution de platine, la moindre des parties de ce métal qu'elle auroit contenue ; j'ai deſiré que ſi enſuite de cette diſſolution, la platine ne paroiſſoit pas en total ou à peu-près, comme l'or, l'argent, le cuivre, & avec l'éclat & la ſolidité qui

caractérisent les métaux, on ne pût attribuer qu'à la nature même de la platine les déchets extraordinaires qu'on y observeroit.

Je n'ai pas eu besoin, pour parvenir à ce but, de m'écarter beaucoup de la route que j'avois d'abord suivie; au lieu en effet de chercher la platine dans le dépôt seul qui, à la faveur de l'alkali fixe, s'étoit précipité de la dissolution, je la cherchai, tant dans ce dépôt même que dans la liqueur qui l'avoit fourni.

Persuadé que cette expérience-ci seroit plus décisive que celles dont j'ai rendu compte, pour qu'il ne subsistât aucun doute, s'il étoit possible, sur le fait dont il est ici question, je la fis un peu plus en grand que n'étoient les précédentes; à une once d'or fin, je joignis 2 gros de platine ductile & 2 onces 6 gros d'argent fin, je fondis ces trois métaux dans un creuset; je les y mêlai aussi parfaitement qu'il me fut possible pendant que la matière étoit en bain, & je la coulai ensuite dans une lingotière dont aucune grenaille de ce mélange ne s'écarta; le lingot que j'obtins de cette fonte étoit très-net & aussi doux que peuvent l'être l'or & l'argent qui contiennent de la platine; il fut forgé, réduit en une lame mince & divisé en trente-deux parties, lesquelles furent roulées en cornets du poids chacun d'un gros ou environ: je fis dissoudre dans l'acide nitreux seize de ces cornets qui composoient à peu-près 2 onces, & je conduisis cette opération avec les mêmes soins que j'avois donnés à d'autres dont j'ai parlé précédemment. Lorsque les cornets d'or eurent été recuits & pesés, je remarquai que leur poids étoit de 4 gros 12 grains, c'est-à-dire plus fort de ces 12 grains qu'il n'auroit fallu pour que ces cornets eussent représenté exactement la quantité d'or que j'avois employée: on a vu en effet qu'il étoit entré une once d'or dans le lingot dont les seize cornets, avant le départ, formoient la moitié, & que par conséquent il ne devoit me rester que 4 gros de ce métal après la dissolution de la platine & de l'argent. Je ne fus point surpris de cette surcharge de 12 grains; le poids de la platine, dans cette expérience, étoit

d'un gros ſur quatre d'or fin: je ſavois que quand on l'emploie dans une pareille proportion pour le mélange des trois métaux, & qu'on veut conſerver en entier les cornets, il eſt très-difficile de la diſſoudre en totalité; mais cet inconvénient n'influoit en rien, comme on va en juger, ſur les conſéquences qu'il y avoit à tirer de l'opération; au lieu de ſuppoſer un gros de platine dans la diſſolution, je ne comptai que ſur 60 grains, & j'établis mes réſultats ſur le pied d'un ſixième de moins à l'égard de ce métal.

Après avoir étendu cette diſſolution dans une certaine quantité d'eau, j'en fis précipiter l'argent par l'eſprit de ſel, & je verſai enſuite de l'alkali fixe juſqu'à ſaturation ſur la liqueur tranſparente que j'avois décantée du flacon où l'argent étoit reſté en dépôt: au lieu d'attendre que cette liqueur s'éclaircît en me donnant un précipité, je l'agitai beaucoup au contraire & je la verſai bruſquement dans une terrine que je plaçai ſur un bain de ſable, afin qu'elle s'y évaporât lentement à la faveur d'une chaleur modérée; j'avois ſoin, à meſure qu'elle diminuoit & laiſſoit ſur les bords le ſel qui s'y deſſéchoit bien-tôt & y adhéroit fortement, de le détacher de la ſuperficie de la terrine & de le faire rentrer dans la liqueur; je parvins ainſi peu-à-peu à raſſembler en une maſſe ſaline tout ce que la liqueur contenoit, & lorſqu'elle fut bien sèche, j'en conſtatai le poids; il étoit de 5 onces 4 gros.

J'avois d'abord penſé que pour retirer la platine de ce dépôt ſalin, qui étoit une eſpèce de nitre régénéré, il me ſuffiroit, en faiſant uſage du flux noir, de le compoſer d'une partie de ſalpêtre égale à la quantité du dépôt ſalin que j'emploîrois, & de deux parties de tartre qui détonneroient ſeules avec le ſalpêtre; je croyois qu'en mêlant enſuite le dépôt ſalin, joint à une certaine quantité de *minium* avec le flux noir, j'obtiendrois, par une réduction prompte, un culot de plomb plus ou moins chargé de la platine que le dépôt ſalin auroit fournie: mais je ne réuſſis point dans cette expérience; je ne recueillis des ſcories que quelques grenailles de plomb; je la fis même une ſeconde fois avec auſſi peu de ſuccès; j'en

ſentis bien-tôt la raiſon; il n'étoit pas entré aſſez de tartre dans la compoſition du flux noir, & il convenoit d'ailleurs que le dépôt ſalin fût joint au ſalpêtre pour la détonation.

On a vu plus haut que la maſſe ſaline retirée de la liqueur peſoit 5 onces 4 gros.

Je n'employai d'abord que la cinquième partie de ce dépôt ſalin, qui peſoit par conſéquent 1 once 57 grains; je la mêlai avec une quantité égale de ſalpêtre rafiné, & je les fis détoner enſuite avec un peu plus de 4 onces de tartre; lorſque ce flux noir eut été réduit en poudre, j'y mêlai 6 gros de cuivre provenant du dépôt que laiſſent après elles aux affinages, les eaux-fortes de repriſe: cette eſpèce de chaux de cuivre me parut préférable à toute autre pour cette opération; ce n'eſt qu'une poudre impalpable & par-là très-propre à ſaiſir dans ſa réduction toutes les particules éparſes des autres matières métalliques avec leſquelles ce cuivre en poudre ſe trouve confondu.

La fonte de ce mélange réuſſit comme je le deſirois; les ſcories étoient nettes, & je trouvai au fond du creuſet en forme de cône renverſé dont je me ſervis, un culot de cuivre du poids de 4 gros 48 grains. Je ne fus point étonné du déchet de 1 gros 24 grains ſur la chaux de cuivre que j'avois employée: on peut voir en effet, dans un Mémoire que j'ai lû à l'Académie, ſur la fonte de la chaux de cuivre des affinages, qu'après pluſieurs expériences pour la revivifier le plus utilement qu'il ſeroit poſſible, la moindre perte que j'éprouvai ſur cette chaux, en la rétabliſſant dans ſon état métallique, fut de 22 pour 100 ou environ; & on voit que dans l'expérience dont il s'agit ici, les déchets ont été dans un rapport égal ou à peu-près ſur cette même chaux.

Année 1775, page 193.

Page 202.

On peut ſe rappeler que les ſeize cornets d'or dépendans de l'expérience dont il eſt ici queſtion, avoient un excédant en poids de 12 grains, qui ne pouvoit être attribué qu'à une portion de platine dont ces cornets n'avoient pas été dépouillés; dès-lors il devient conſtant que le dépôt ſalin réſultant de la diſſolution ne contenoit, comme je l'ai dit,

que 60 grains de ce métal; que le cinquième de ce dépôt, qui avoit été la matière de mon expérience, n'en contenoit que 12, & que cette cinquième partie de la platine devoit se trouver dans le culot de cuivre, pesant 4 gros 48 grains, qui m'étoit resté de cette opération.

Je réduisis ce culot de cuivre en lames fort minces & propres à être promptement attaquées par l'acide nitreux : je n'en employai d'abord qu'une douzième partie ou 28 grains; je les fis dissoudre à froid dans l'acide nitreux que j'avois affoibli; la dissolution fut lente, mais complète; & lorsque je m'aperçus que l'acide n'agissoit plus sur le métal, je mis le matras sur le feu, & j'y tins la liqueur en ébullition pendant quelque temps : il s'en précipita une poudre noirâtre que je lavai avec de l'eau distillée, que je rassemblai avec soin & que je fis recuire ensuite dans un petit creuset : elle y prit une couleur grise; examinée au microscope, elle avoit le coup-d'œil de la platine en poudre & tous les caractères métalliques : je la pesai à une balance délicate, son poids ne se trouva que de $\frac{21}{64}$ de grain : je répétai trois fois cette expérience, en ne faisant dissoudre également que 28 grains ou un douzième du culot de cuivre; le poids de la poudre de la platine que je recueillois rouloit toujours sur 20 à $\frac{21}{64}$ de grain : on a vu cependant que chacune de ces portions déterminées du culot de cuivre auroit dû contenir 1 grain entier de platine, ou au moins à peu-près 1 grain, en supposant que ce métal n'eût souffert aucune altération notable dans l'opération du départ : on remarque au contraire qu'il s'est trouvé une perte des deux tiers sur chacun des petits produits en poudre de platine, & que cette perte s'est soutenue constamment dans les quatre différentes dissolutions.

Je jugeai encore mieux du degré de confiance que pouvoient mériter ces premiers résultats par celui qui les suivit; je fis dissoudre dans de l'acide nitreux affoibli & à froid également jusqu'au moment où l'acide n'agissoit plus, 112 grains du même culot de cuivre; je cherchai, comme on voit, dans le produit d'une seule opération celui que les

quatre autres réunies m'avoient donné; il fut effectivement d'un grain $\frac{10}{32}$ de platine, quantité à laquelle se rapportoient les produits réunis des expériences précédentes, & qui n'étoit elle-même que le tiers, à très-peu près, des 4 grains de platine que les 112 grains de cuivre auroient dû contenir. Il paroît certain, d'après les détails dans lesquels je viens d'entrer, que si la quantité de flux noir que j'ai été contraint d'employer étoit dix fois plus considérable qu'il ne falloit pour revivifier le peu de platine que le cinquième du dépôt salin contenoit, & la chaux de cuivre que j'y avois jointe, cette même chaux de cuivre étoit aussi plus que suffisante pour saisir toutes les particules de la platine capables de reprendre l'état métallique & pour se combiner parfaitement avec elles. Sur 12 grains de platine, il n'y en a eu que 4 qui ont pu rentrer dans l'état de métal; le cuivre s'en est emparé, & ces 4 grains de platine se sont trouvés répandus avec une égalité parfaite, comme je viens de le faire observer, dans les 336 grains de cuivre, auxquels s'étoit réduite la chaux de ce même métal que j'avois employée.

Si au lieu de verser de l'alkali fixe sur l'acide nitreux tenant la platine en dissolution, & de faire évaporer ensuite la totalité de la liqueur pour obtenir le nitre régénéré & chargé de la platine, on fait évaporer l'acide nitreux dans l'état où il est lorsque l'argent en a été précipité par le moyen de l'esprit de sel, on aura un léger dépôt qui contiendra la platine, comme le nitre régénéré l'auroit contenu : si à ce dépôt peu considérable, on joint le double & même le quadruple de son poids en chaux de cuivre, afin qu'elle puisse recueillir toutes les parcelles de platine, & on traite ce mélange par le flux noir, on obtiendra un petit culot de cuivre très-ductile qui contiendra la platine, mais qui après avoir été dissous à froid par l'acide nitreux, ne laissera au fond du matras que la moitié ou environ de la quantité de cette même platine qu'on aura employée : ce restant de la quantité du métal mis en expérience,, ne sera pas même entièrement dans l'état métallique, puisqu'en le mettant dans un matras avec de

de l'acide marin, après l'avoir recuit, & en faiſant bouillir la liqueur, on remarquera que cette platine réduite en poudre griſâtre perdra un peu de la couleur cendrée, reprendra celle qui eſt propre à la platine brute, mais éprouvera une nouvelle diminution ſur ſon poids: ce nouveau déchet n'eſt pas conſtamment égal, toute proportion gardée; il dépend du plus ou du moins de particules ferrugineuſes qui ſe trouvent mêlées avec les parties de platine dont l'état métallique eſt encore conſervé: cette ſeconde perte eſt quelquefois d'un tiers, d'un quart ou d'un cinquième du poids qu'avoit le précipité de platine avant qu'on l'exposât à l'action de l'acide marin. On voit par-là que la platine diſſoute d'abord par l'eau régale, où elle a éprouvé beaucoup de déchet, portée enſuite à l'état de ductilité, & dépouillée par conſéquent d'une grande quantité de matière ferrugineuſe, ſe trouve réduite, après une première diſſolution dans l'acide nitreux, à la moitié ou environ du poids qu'elle avoit avant qu'elle fût ſoumiſe à l'action de ce dernier acide, & fera ſans ceſſe des pertes proportionnelles lorſqu'on la traitera de nouveau par l'acide nitreux & ſuivant le procédé que j'ai décrit.

Il eſt bon d'obſerver ici que la méthode dont je viens de parler, celle de faire évaporer la liqueur dans laquelle la platine eſt reſtée en diſſolution, après que l'argent en a été précipité par le moyen de l'eſprit de ſel, & de ne point employer auparavant de l'alkali fixe, il convient, dis-je, de faire attention que ce procédé, outre qu'il eſt plus ſimple que celui que j'avois d'abord ſuivi, eſt le plus favorable pour ne rien perdre de la platine contenue dans la liqueur, & que j'ai remarqué moins de déchet ſur le métal, en employant ce procédé plus ſimple, que je n'en avois reconnu dans les premières expériences dont j'ai expoſé les détails.

On m'objectera peut-être & avec raiſon, que par le procédé dont j'ai fait uſage, j'ai recueilli, il eſt vrai, du dépôt ſalin toute la platine qu'il contenoit, mais qu'il a pu s'en diſſoudre une partie pendant la diſſolution du cuivre avec lequel la platine étoit mêlée, comme elle éprouve juſqu'à un certain

point l'action de l'acide nitreux, lors même qu'elle n'eſt combinée qu'avec de l'argent; & on ajoutera, par une conſéquence juſte de cette ſuppoſition, que j'ai annoncé le poids de la poudre de platine, après la diſſolution du cuivre, comme plus foible qu'il n'eſt réellement.

Cette objection eſt bien fondée; c'eſt même parce que j'ai ſenti qu'elle ſe préſenteroit naturellement à l'eſprit lorſqu'on ſuivroit le fil de mes recherches, que j'ai fait pluſieurs expériences relatives à ce point particulier: je crois qu'elles pourront faire juger avec une ſorte de préciſion, de ce qui reſte réellement en platine après la diſſolution de ce métal dans l'acide nitreux.

On a vu dans l'expérience précédente, que le culot de cuivre retiré du cinquième du dépôt ſalin devoit contenir $\frac{1}{28}$ en platine: je ne m'écartai point de cette proportion pour les expériences dont je vais parler; mais au lieu de compoſer de ces deux métaux un petit lingot duquel je puſſe tirer des portions à meſure que j'en aurois beſoin, je ne mêlai que 2 grains de platine ductile à 56 grains de cuivre; & afin que je fuſſe certain que ces 2 grains de platine étoient bien réellement dans le cuivre que j'aurois à faire diſſoudre dans l'acide nitreux, j'employai, pour les fondre enſemble, le feu de lampe des Émailleurs, tantôt en réuniſſant les deux métaux dans une coupelle d'eſſai ſur laquelle dardoit la flamme, tantôt en les mettant ſur un charbon plat & dans un petit baſſin qu'on y avoit creuſé. Je n'aurois jamais pu compter ſur une diſtribution égale de la platine dans un lingot de cuivre, ſi j'euſſe employé ce moyen d'unir les deux métaux; & d'un autre côté j'aurois ſouvent couru le riſque de laiſſer adhérentes dans un creuſet quelques-unes de leurs parties ſi je me fuſſe borné à n'y fondre que 58 grains pour le total des deux métaux: j'obtins plus ſûrement la préciſion que je deſirois, à la faveur de la flamme dardée vivement ſur les deux métaux: j'eus beſoin qu'elle y fût pouſſée aſſez long-temps & avec violence, tant le cuivre rouge, & ſur-tout la platine, entrent difficilement en fuſion par ce moyen. Chacun

des boutons métalliques que j'avois ainſi mélangés, contenoit donc la petite portion de platine que je lui avois aſſociée, & je ne pouvois attribuer qu'à l'action de l'acide nitreux la moindre perte que j'y remarquerois.

Après avoir aplati ces boutons ſous le marteau, & les avoir réduits en lames minces, je les diviſai chacun en huit ou dix parties, & je les fis diſſoudre à froid dans de l'acide nitreux affoibli par une égale quantité d'eau diſtillée; cet acide ainſi affoibli, n'avoit que 21 degrés de force ou à peu-près: j'avois cru d'abord qu'il auroit peut-être ſuffi de faire diſſoudre à froid ces lames minces & compoſées preſque entièrement de cuivre, pour avoir en précipité bien net, les 2 grains de platine qui s'y trouvoient joints; je voyois la diſſolution s'opérer d'une manière égale & toujours ſoutenue; je remarquois, à l'aide de la loupe, les particules noirâtres de platine qui ſe dégageoient de celles du cuivre, & voltigeoient dans la liqueur à meſure que ce dernier métal ſe fondoit peu-à-peu dans l'acide, en ſe combinant avec lui, & je regardois l'opération comme terminée lorſque la liqueur devenue tranquille avoit laiſſé tomber au fond du matras en poudre noire, en petites lames exceſſivement minces, toute la platine qu'elle contenoit; mais après avoir lavé avec beaucoup de précautions ce précipité & l'avoir fait recuire, j'ai obſervé quelquefois qu'il peſoit un peu plus de 2 grains, & qu'il receloit encore par conſéquent quelques particules de cuivre: dès-lors je me déterminai à faire bouillir l'acide pendant quelques minutes après la diſſolution à froid & l'état tranquille de la liqueur. Loin d'avoir un excédant de poids lorſque j'avois ainſi donné par la chaleur plus d'action à l'acide nitreux, j'obſervois quelque diminution ſur le poids de la platine, & je voyois qu'elle rouloit ſur un quart de grain ou environ, c'eſt-à-dire ſur le huitième de la platine que chacun des boutons contenoit. Je répétai pluſieurs fois cette expérience, ſoit en faiſant diſſoudre le bouton tout entier, ſoit en le diviſant en deux ou même en quatre parties, pour faire autant d'opérations & obtenir des réſultats que je puſſe

rapprocher de celui que le bouton entier m'avoit fourni : Il m'a toujours paru que la perte ſur les 2 grains de platine rouloit, comme je l'ai dit, ſur un huitième ou environ de ce métal, lorſque je n'avois rien perdu des particules ſans nombre, infiniment légères & très-lentes à ſe précipiter en total, qui compoſoient la quantité juſte de platine que j'avois à recueillir. Cette opération en effet, quand même on la feroit en grand, demande beaucoup de ſoin; & peut-être, en la bornant à de petits objets dont une balance délicate ne manqueroit jamais de déterminer le poids, feroit-il poſſible d'y mieux réuſſir qu'en employant une quantité un peu conſidérable de platine, dont les particules ſubdiviſées à l'infini dans une grande quantité de liqueur, feroient très-difficiles à raſſembler.

Ne pouvant pas douter que la platine mêlée avec du cuivre ne fût attaquée juſqu'à un certain point par l'acide nitreux, quoiqu'affoibli & employé à froid, je tâchai de faire reſtituer à cet acide le quart de grain en platine dont il s'étoit chargé : je ſuivis à cet égard la méthode que j'avois déjà employée & dont on a vu les détails : je verſai de l'alkali fixe ſur cet acide juſqu'à ſaturation; je fis évaporer la liqueur, & ayant traité enſuite par le flux noir le dépôt qu'elle me laiſſa, j'en tirai un petit bouton de cuivre qui fut laminé & diſſous dans l'acide nitreux : il reſta au fond du matras un léger dépôt de poudre noirâtre que je lavai attentivement avec de l'eau diſtillée & que je fis précipiter enſuite dans un petit creuſet neuf dont le fond étoit très-net : au lieu d'y trouver, après le recuit qu'y reçut cette poudre noire, des parcelles de platine dans l'état métallique, éparſes, mais aiſées à raſſembler au moindre coup que l'on donne au creuſet, je n'y vis qu'une tache noirâtre ſuperficielle, ſans aucune apparence de métal, & ſi adhérente au fond du creuſet, qu'il me fut impoſſible d'en détacher quelques parties pour mieux les examiner. A la vue de cette pellicule noire & comme incruſtée dans l'endroit du creuſet où le précipité de platine s'étoit réuni, il ne me fut pas difficile de reconnoître la poudre noire dont j'ai déjà parlé, qui s'attachoit fortement aux capſules de verre, &

dont je ne pus parvenir à former un petit amas pulvérulent qu'en la détachant peu-à-peu des parois de la capſule & à meſure qu'elle perdoit ſon humidité: on ſe rappelle que cette poudre noire n'avoit preſque rien conſervé de la nature métallique, & annonçoit une décompoſition en partie de la platine, comme le fait dont il s'agit ici tend beaucoup à la confirmer.

Je ne pus donc pas conſtater par le poids, ſi le quart de grain en platine que l'acide nitreux avoit enlevé, ſe trouvoit réellement dans le précipité que j'obtins; mais il me parut aſſez conſidérable pour répondre à ce quart de grain, s'il eût repris ſes propriétés métalliques, & conſéquemment la peſanteur ſpécifique de la platine dont ce précipité étoit une portion.

Dans le nombre des boutons compoſés de 56 grains de cuivre & de 2 grains de platine, que je fis fondre au feu de lampe, il s'en trouva deux qui m'inſtruiſirent d'un fait auſſi ſingulier en lui-même, qu'il s'accorde peu avec un autre du même ordre dont je ſuis témoin tous les jours.

Après avoir réduit un de ces boutons en une lame très-mince, & l'avoir coupée avec des ciſoires en huit ou dix parties, je la fis diſſoudre dans de l'acide nitreux affoibli; lorſque la liqueur fut tranquille & que l'opération me parut terminée, je conſidérai, à l'aide de la loupe, le fond extérieur du matras, dans la vue ſeule d'examiner la quantité de platine en poudre qui pouvoit s'y être précipitée; je fus fort ſurpris d'y apercevoir de petites plaques blanches dont la forme me parut la même que celle des morceaux du bouton laminé que j'avois mis dans le matras & dont j'attendois l'entière diſſolution, à la petite portion près de platine qu'ils contenoient: ma première idée fut de ſoupçonner que l'acide nitreux n'avoit pas produit tout ſon effet, & ſur le champ je plaçai le matras ſur le feu où l'acide reſta en ébullition pendant quelque temps: cette dernière opération ne ſervit qu'à donner plus de blancheur, plus de netteté aux petites plaques que j'avois d'abord obſervées; je n'héſitai donc plus à décanter l'acide, à laver le précipité & à le ſaire tomber enſuite dans un petit creuſet

où il pût recevoir un recuit; mais avant que d'en venir à ce dernier terme de l'opération, j'examinai attentivement les petites plaques que le creuſet contenoit : je ne doutai point qu'elles ne fuſſent preſque entièrement de platine, & je ne me trompois pas; mais leur petiteſſe, relativement à la dimenſion de celles que j'avois miſes en diſſolution, leur forme régulière & abſolument pareille à celle de ces mêmes plaques miſes dans l'acide nitreux, la ſurface aſſez conſidérable qu'elles occupoient, quoiqu'elles ne duſſent peſer que 2 grains, tout me parut ſurprenant dans ce fait & piqua ma curioſité. Mon étonnement augmenta lorſque je vis que ces plaques avoient conſervé toutes leurs dimenſions après le recuit, ou au moins n'avoient pas pris une retraite ſenſible ; elles peſoient enſemble 2 grains & repréſentoient par conſéquent le poids total de la platine qui étoit entrée dans le bouton duquel ces plaques ſortoient. Inſtruit de ce que j'avois à obſerver dans une ſeconde expérience, par le fait aſſez ſingulier que je venois d'avoir ſous les yeux, je m'appliquai moins à chercher quelle pouvoit en être la cauſe, qu'à le conſtater de manière qu'il ne me reſtât aucun doute ſur la certitude que j'y attacherois. Lorſque j'eus aplati ſous le marteau & réduit en une lame mince un bouton pareil à celui dont je viens de parler, je coupai ſur cette lame deux petites plaques parfaitement égales, & qui avoient chacune 7 lignes $\frac{2}{3}$ de longueur ſur 3 lignes $\frac{3}{4}$ de largeur; une de ces plaques fut miſe dans l'acide nitreux affoibli, & je réſervai l'autre pour lui être comparée après la diſſolution du cuivre qu'elle contenoit: l'effet que j'ai annoncé plus haut eut lieu également dans cette expérience-ci; il ſe trouva au fond du matras une petite plaque blanche qui avoit conſervé ſa première forme, mais dont les dimenſions étoient beaucoup plus petites au ſimple coup-d'œil, que celles de la plaque que j'avois réſervée: je décantai l'acide nitreux, & après avoir lavé la plaque, qui étoit d'une légèreté extrême, je la fis gliſſer doucement dans un petit creuſet; lorſque l'eau en fut totalement écoulée & que la plaque fut reſtée à ſec, j'en pris les dimenſions avec un compas; elle n'avoit plus

que 3 lignes $\frac{1}{3}$ de longueur fur 2 lignes $\frac{1}{4}$ de largeur; elle avoit perdu par conféquent 4 lignes $\frac{1}{3}$ d'un côté & 1 ligne $\frac{1}{2}$ de l'autre. Le recuit que je donnai à cette petite feuille de platine ne produifit aucun changement dans fes dimenfions, ou au moins il ne fut pas affez marqué pour que le compas m'en avertît.

On fera étonné fans doute que la retraite confidérable, & une retraite en tout fens que cette feuille de platine a éprouvée, n'ait eu lieu que dans l'acide nitreux & pendant fa moindre action fur le cuivre qui la contenoit; on verra encore avec furprife que le recuit n'a contribué en rien au rétréciffement d'une feuille de métal fi légère, tandis qu'il eft certain qu'un cornet d'or, après le départ, conferve toutes les dimenfions qu'il avoit avant que d'y être foumis, & qu'au contraire après le recuit il perd un tiers, ou à peu-près, fur ces mêmes dimenfions.

On préfumera peut-être que la grande diminution que j'ai obfervée fur l'étendue qu'avoit d'abord cette feuille de platine, n'étoit pas dûe à un refferrement des parties fur elles-mêmes, mais à un retranchement qui a pu fe faire avec une forte d'égalité aux bords de cette feuille, tandis que le milieu eft refté intact & tel qu'il fubfiftoit dans la petite plaque avant que l'acide nitreux l'attaquât: mais on écartera bien-tôt cette idée quand j'aurai fait obferver que non-feulement les bords de cette feuille de platine étoient parfaitement terminés & avoient confervé leur vive-arête, mais qu'on remarque encore quelquefois, avec le fecours de la loupe, fur les bords de quelques-unes de ces feuilles, une légère bavure, une efpèce de morfil que la cifoire occafionne, parce qu'elle ne coupe pas toujours d'une manière bien nette les plaques d'où fortent ces petites feuilles de platine *. Les bords de celle dont il s'agit ici

* On doit faire attention encore que dans le cas où l'on perfifteroit à croire qu'il n'y a pas de retraite réelle dans la feuille de la platine, mais que fes bords font entamés de toutes parts, & que le milieu feul fubfifte dans fon entier, il faudroit fuppofer que la portion détachée des bords s'annonceroit d'une manière fenfible, quelque foible qu'elle fût, & fe précipiteroit

n'ont donc ſouffert aucune altération ; & comme il eſt conſtant que cette feuille ſi délicate de platine a éprouvé une diminution conſidérable ſur ſon étendue, même au milieu d'un fluide très-actif qui tendoit ſans ceſſe par ſa nature à écarter les unes des autres les parties de cette feuille, on ſe trouve forcé de reconnoître qu'il y a eu dans cette circonſtance une retraite bien réelle, un rapprochement de ces mêmes parties dont la cauſe paroît d'autant plus difficile à découvrir, que ce fait particulier ne s'accorde point avec ceux du même ordre qui ſont connus, & qu'il ne laiſſe rien entrevoir qui conduiſe à l'expliquer.

Il ſera plus aiſé, je crois, de remonter à la cauſe d'un autre fait qu'on a pu remarquer dans l'expérience dont j'expoſe ici les détails. On a dû être ſurpris que 2 grains de platine fondus avec 56 grains de cuivre aient pu ſubſiſter en feuille après la diſſolution du ſecond de ces métaux; on a dû naturellement s'attendre à un précipité de platine en poudre, parce qu'en la ſuppoſant également diſtribuée dans toute l'étendue du mélange, chaque grain de platine répondoit à 28 grains de cuivre; & que dans cette ſuppoſition d'une combinaiſon parfaite, il ne ſeroit pas poſſible que 2 grains de métal formaſſent un corps continu, comme la petite feuille de platine dont il s'agit ici, quelque léger & criblé de toutes parts qu'on pût l'imaginer. Ainſi on ne peut donner une explication plauſible de ce fait qu'en ſuppoſant, avec beaucoup de

au fond du matras : or on ne remarque dans ces circonſtances aucune particule de platine qui ſoit mêlée avec les feuilles; celles-ci ſont ſeules au fond du matras, & s'y offrent dans la plus grande netteté au milieu de la liqueur qui a toute ſa tranſparence.

Il eſt vrai que ces feuilles de platine ſe diviſent quelquefois en deux parties dont les bords ſont bien terminés & ſans apparence de rupture, par la raiſon ſans doute qu'elles proviennent de deux petits morceaux de platine qui n'étoient qu'adhérens l'un à l'autre dans le bouton de cuivre, qui n'étoient point entrés en fuſion avec ce dernier métal, & qui s'étoient étendus l'un à côté de l'autre ſous les rouleaux du laminoir; mais en rapprochant les deux parties de cette feuille de platine, on voit clairement qu'elles en forment la totalité, & repréſentent, à la grande retraite près qu'elles ont éprouvée, la petite plaque de cuivre chargée d'un peu de platine, à laquelle ces deux portions de la feuille appartenoient.

vraiſemblance,

vraisemblance, que le mélange de la platine & du cuivre n'étoit pas complet dans cette circonstance, quoiqu'il eût été fait au feu de lampe, & que la matière en fusion roulât comme une perle, dans le bassin de la coupelle, pour peu qu'on l'agitât. Les deux grains de platine n'auront été mis, selon toute apparence, que dans un état pâteux au milieu du cuivre en fusion; peu de ce dernier métal les aura pénétrés; & ces 2 grains de platine aplatis sous le marteau dans le bouton de cuivre qui les contenoit, laminés ensuite avec lui, auront pris toute l'extension dont ils étoient susceptibles, & auront formé, au milieu de la lame de cuivre, une lame distincte de platine qui, par sa nature, devoit résister à l'acide nitreux. J'ai remarqué en effet, dans une occasion où je faisois fondre du cuivre & de la platine au feu de lampe, & où je regardois ces deux métaux comme bien mêlés, qu'un des boutons que j'avois obtenus, laissoit apercevoir une petite portion de platine, dont l'éclat argentin me frappa sur le champ, & qui étoit restée intacte au-dessous du cuivre en fusion.

Quoique je ne doutasse point que les précipités de platine, ayant toutes les propriétés métalliques après la dissolution de ce métal par l'acide nitreux, ne pussent être décomposés en très-grande partie par l'effet d'une seconde dissolution, comme l'avoit été la platine ductile que j'avois fait dissoudre en premier lieu par le même acide, cependant je voulus avoir une expérience positive sur cette altération nouvelle de la platine, & je présumai qu'elle seroit au moins aussi considérable que celle dont on a eu la preuve dans les expériences peu différentes entr'elles, que j'ai rapportées à ce sujet.

Je mêlai donc 6 grains de précipité de platine réduite en poudre, qui provenoient de mes expériences, & qui avoient au coup-d'œil tous les caractères métalliques, avec 24 grains d'or fin & 69 grains d'argent dépouillé également de tout alliage: je fis passer à la coupelle ces trois métaux dans une quantité de plomb convenable; je laminai le bouton qui en provint, & après en avoir formé deux cornets, j'en fis le départ avec les ménagemens que deman-

doit la quantité d'argent fin que j'avois employée pour que les cornets d'or se conservassent dans leur entier. Je retirai ensuite, à la faveur de l'esprit de sel, tout l'argent que la dissolution contenoit, & n'attendant alors de l'eau régale qui en étoit résultée, que la platine seule dont la quantité juste m'intéressoit, j'y versai de l'alkali fixe, comme on a vu précédemment que je l'avois fait pour des expériences pareilles, & je procédai à l'évaporation totale de la liqueur; je mêlai 5 gros de chaux de cuivre des affinages avec le dépôt salin que la liqueur me laissa; je fis ensuite entrer ce dépôt pour un sixième dans le flux noir que je composai; je revivifiai ce cuivre; j'en obtins un culot très-net du poids de 3 gros $\frac{1}{2}$ 22 grains, & tenant la petite portion de platine qu'il avoit recueillie : il en contenoit fort peu en effet; à peine m'en donna-t-il un grain réduit en une poudre grise, métallique il est vrai, mais sur laquelle on auroit remarqué un déchet sensible, si on l'eût rassemblée en un globule de platine nette & ayant toute sa ductilité.

Les deux cornets d'or dépendans de cette expérience, & dont j'ai parlé plus haut, avoient retenu un demi-grain de platine, ou à peu-près, sur les 6 grains que j'avois employés; on vient de voir que le culot de cuivre m'en restitua un grain; je perdis donc dans cette expérience les trois quarts ou environ de la platine qui y étoit entrée.

On remarquera peut-être que la platine en poudre dont il falloit que je fisse usage, dans la vue de suivre sa décomposition, n'étoit pas assez nette, assez réduite à son état vraiment métallique, pour que je pusse en déduire une perte réelle avec autant de précision que je l'ai fait; mais on voudra bien observer que j'ai établi le poids de cette platine en poudre sur le pied de celui qu'elle avoit, comme résultat des premières expériences; qu'on ne sauroit exiger une diminution à l'égard du poids réel de cette platine en poudre que j'ai employée en second lieu, qu'elle ne retombe sur celui du produit en précipité de platine que j'ai d'abord annoncé, & qu'il est assez indifférent pour la perte réelle que souffre ce métal, ou qu'elle

ſoit égale dans des opérations réitérées, ou qu'elle ſoit plus conſidérable à meſure que la platine ſubit des épreuves, & paſſe de l'état métallique à celui où elle eſt miſe par l'action violente d'un diſſolvant.

Quelque opinion que l'on ait à l'égard de l'effet, ſoit conſtamment égal de l'acide nitreux ſur la platine, ſoit plus marqué à meſure qu'on l'a fait précipiter de cet acide pour la ſoumettre de nouveau à toute ſon action, il paroît conſtant, d'après mes expériences, que la platine ductile a éprouvé d'abord un déchet de près des deux tiers de la quantité que j'en avois employée : il paroît certain également que la platine en poudre retirée de l'acide nitreux & diſſoute de nouveau par ce même acide, a ſouffert une perte au moins auſſi conſidérable que celle dont je parle; & par une ſuite néceſſaire de ces déchets ſucceſſifs ſur une quantité déterminée de platine, on voit qu'il ne reſte à la fin de la ſeconde opération, qu'une petite partie du métal employé.

Si l'on préſume que j'ai porté un peu trop haut cette perte, par la raiſon que je n'ai pas fait reſtituer à l'acide nitreux, malgré les précautions que j'ai priſes, toute la platine qu'il contenoit, ou parce que la chaux de cuivre ne s'eſt pas chargée de la totalité du métal que le dépôt ſalin receloit, on peut borner le déchet à la moitié, ou aux deux cinquièmes de ce métal; mais je prie qu'on ſe rappelle dans ce moment, qu'il y a une perte de moitié ou environ ſur la platine brute, après ſa diſſolution par l'eau régale, & lorſqu'elle a été conduite à cet état de ductilité parfaite, que d'habiles Chimiſtes ont eu le talent de lui procurer; qu'on faſſe attention que par mes expériences cette perte, & une plus forte quelquefois, a lieu ſur ce métal, après même qu'il eſt devenu ductile, & qu'on l'a dépouillé d'une matière qui en altéroit la pureté; qu'on obſerve encore que ce métal attaqué ſans ceſſe par l'acide nitreux, éprouve ſans ceſſe de nouveaux déchets, & toujours auſſi conſidérables qu'il les avoit ſoufferts avant que d'avoir été mis dans l'état de pureté dont il eſt ſuſceptible; qu'on remarque enfin qu'en faiſant ainſi diſſoudre la platine,

même celle qui eſt ductile, par l'acide nitreux, en rétabliſſant enſuite dans l'état métallique ce qu'il en reſte comme précipité, ce métal paroît ſe détruire continuellement, & ne laiſſe bien-tôt, pour peu que ces opérations ſoient réitérées, que de foibles veſtiges de la conſiſtance qu'il avoit.

Lorſqu'on traite les métaux & ſur-tout ceux qui ſont parfaits, on eſt ſi peu accoutumé à des déchets conſidérables, tels qu'on les remarque ſur la platine, qu'il ſeroit difficile de regarder les principes qui la conſtituent, comme auſſi fixes que ceux des autres métaux : en même temps qu'on eſt frappé de ſa grande peſanteur ſpécifique, on eſt étonné des altérations notables qu'elle éprouve par les effets de l'acide nitreux, tandis que d'autres métaux beaucoup moins peſans qu'elle, cèdent facilement, il eſt vrai, à l'action des acides, mais reviennent bien-tôt avec peu de perte & plus purs qu'ils n'étoient à l'état de ſolidité, de liaiſon intime des parties qui les caractériſoit.

On a vu, dans le courant de ce Mémoire, que mes expériences m'ont conduit néceſſairement à faire un grand nombre de réductions, pour revivifier la chaux de cuivre que j'employois, & recueillir par ce moyen les moindres parcelles de platine que l'acide nitreux mêlé d'un peu d'eſprit de ſel avoit laiſſées au fond des capſules, après l'évaporation totale de la liqueur, que le cuivre avoit ſaiſies en reprenant ſon état métallique, & avoit entraînées avec lui au fond des creuſets, où le culot compoſé de cuivre & d'un peu de platine s'étoit formé.

On ſoupçonnera peut-être que ſi j'ai éprouvé, dans ces réductions, des déchets conſidérables ſur la platine, c'eſt uniquement parce que je n'ai pas retiré des différens dépôts, que les liqueurs évaporées m'ont fournis, toute la platine qu'ils contenoient; que les ſcories que j'abandonnois, après l'opération, pouvoient encore receler des parcelles de platine; que les particules exceſſivement atténuées de ce métal pouvoient avoir échappé au cuivre qui le revivifioit, & s'être trouvées enſuite trop légères pour ſe précipiter d'elles-mêmes au fond du creuſet à travers du flux noir, quelque fluide qu'on le ſuppoſât.

Quoique j'aie toujours eu l'attention d'employer vingt ou trente fois plus de chaux de cuivre dans mes réductions, que je n'attendois de platine qui s'y seroit réunie, quoique cette chaux fût réduite elle-même en parties de la plus grande ténuité, capables par conséquent de saisir par-tout celles de la platine qu'elles rencontreroient, & que j'eusse tout lieu de croire qu'il n'étoit rien resté dans les scories qui eût pu rentrer dans l'état métallique; cependant afin de ne laisser subsister aucun doute à cet égard, j'ai tourné mes vues du côté de l'examen de ces mêmes scories, & je les ai traitées comme si elles eussent contenu encore la platine que j'en avois retirée.

A la suite de quelques réductions & après avoir cassé les creusets où elles avoient été faites pour en tirer les culots de cuivre, j'ai recueilli avec soin les fragmens de ces creusets auxquels des portions de scories restoient adhérentes, & je les ai mis dans une terrine de grès, en y versant une quantité d'eau suffisante : au bout de quelques jours ces scories se sont ramollies, se sont détachées entièrement des fragmens de creuset & sont tombées au fond de la terrine; j'ai fait filtrer ensuite à travers un papier gris, la totalité de l'eau chargée du dépôt des scories qui s'y étoit formé, & lorsque le papier, ainsi que le dépôt qui étoit resté à sa surface, a eu perdu la plus grande partie de son humidité, je l'ai fait calciner jusqu'au rouge dans un creuset; j'ai réduit en poudre impalpable dans un mortier ces scories calcinées, j'y ai mêlé une quantité convenable de chaux de cuivre, & j'ai procédé de nouveau à la réduction de ces matières par le flux noir, en y portant la même attention que j'y eusse donnée pour retirer de ces matières une certaine quantité de platine que je n'eusse pas douté d'obtenir.

Après avoir fait dissoudre dans l'acide nitreux, avec les ménagemens qu'on a déjà vus, le culot de cuivre que je tirai de la première de ces réductions, dans lesquelles j'avois pour objet l'examen des scories, je remarquai qu'il se précipita au fond du matras une petite quantité de poudre noiratre très-légère, laquelle même ne s'y précipita en total qu'après

le refroidiſſement & un aſſez long repos de l'acide nitreux, dans lequel j'avois achevé de faire diſſoudre le culot de cuivre que j'avois obtenu de cette première réduction : j'eus l'attention, en lavant cette poudre légère, de n'en perdre aucune parcelle ; je la fis tomber entièrement au fond d'un petit creuſet, en y plongeant l'extrémité du col du matras, tenu dans un ſens renverſé, & par-là donnant lieu à la chute de toute la poudre répandue dans l'eau que ce matras contenoit : ce ne fut que très-lentement & après un temps conſidérable que la totalité de cette poudre noirâtre ſe dépoſa au fond du creuſet; ce ne fut que peu-à-peu & en frappant légèrement les parois du creuſet, que je parvins à l'y raſſembler en une petite maſſe dont aucune partie ne pût reſter écartée après le recuit. Quand l'eau que le creuſet contenoit encore en eut été égoutée entièrement ou s'y fut imbibée, je plaçai le creuſet entre des charbons ardens, & je fis ſubir à cette poudre un recuit ordinaire.

Je crus trouver au fond du creuſet, après cette opération, une matière pulvérulente & facile à ſe détacher des parois intérieures du creuſet, comme j'y obſervois ordinairement la platine en poudre & en état métallique que je recueillois: mais celle-ci étoit adhérente au fond du creuſet; elle y formoit une tache noirâtre & qu'il ne me fut jamais poſſible d'enlever. Alors je ſentis qu'on ne pourroit obtenir ce peu de matière noirâtre dans un état pulvérulent, qu'en la raſſemblant dans une capſule de verre, en l'y faiſant ſécher à un feu doux, en la détachant peu-à-peu par le moyen d'une lame de couteau, & en la faiſant recuire enſuite dans un creuſet, après l'y avoir raſſemblée en un petit monceau : je ſuis parvenu en effet, par ce dernier moyen, à obtenir dans l'état pulvérulent & aſſez bien détaché du creuſet, le peu de matière noirâtre que les ſcories m'ont donné toutes les fois que je les ai traitées par le flux noir; mais je n'y ai rien aperçu de métallique, quoique j'aie examiné attentivement cette poudre à l'aide du microſcope; elle étoit même en ſi petite quantité & d'un poids ſi léger, qu'elle n'auroit fait qu'une portion très-foible

de la petite quantité de platine à laquelle cette poudre avoit appartenu, dans le cas où elle eût repris tous ses caractères métalliques.

Il résulte, comme on voit, de ces opérations réitérées sur les scories, que la portion de platine que j'ai retirée des réductions différentes dont j'ai parlé dans ce Mémoire, étoit toute celle qui avoit conservé ses propriétés métalliques; que les déchets que j'ai annoncés sur la platine dissoute par l'acide nitreux, paroissent aussi réels qu'ils sont extraordinaires dans une matière de la plus grande pesanteur spécifique; que la moitié ou environ de ce métal perd en se décomposant son caractère distinctif, se trouve réduite à des parcelles impalpables, d'une légèreté excessive, & si difficiles à rassembler, qu'à peine en peut-on recueillir une partie en prenant toutes les précautions possibles, pour qu'aucune de ces parcelles n'échappe à l'amas très-petit & toujours prêt à se désunir qu'on est venu à bout d'en former au fond d'un creuset.

Si, d'après ce fait bien constant, on considère qu'une quantité déterminée de platine dissoute à plusieurs reprises par l'acide nitreux, à la faveur de son mélange avec l'or & l'argent, ne cesse point d'éprouver des pertes considérables à mesure qu'on la retire en partie de l'opération du départ, & qu'on soumet la partie retirée du métal à une nouvelle dissolution; si l'on fait attention que les scories de la troisième ou quatrième réduction fournissent la matière noirâtre, très-légère & si difficile à se précipiter dont il vient d'être question, comme les scories de la première réduction l'avoient donnée, & qu'il n'y a de différence à cet égard que relativement aux quantites, alors on sentira que ce n'est point ici l'effet de l'épurement simple d'un métal, mais les suites d'une décomposition & d'une altération si réelle des principes qui constituent cette matière, qu'il n'en subsiste qu'une très-petite partie après quatre ou cinq opérations, & qu'on tireroit la poudre noirâtre des scories d'une dernière épreuve, comme on l'auroit obtenue de toutes les autres réductions qui l'auroient précédée.

Cette matière qui ne cesse point de se décomposer, ne seroit-elle proprement que du fer? alors il ne faudroit supposer que ce métal dans la platine, puisqu'elle éprouve des altérations notables chaque fois qu'elle est dissoute par l'acide nitreux: mais d'un autre côté sa grande pesanteur spécifique semble annoncer un alliage qui a toute une autre densité que le fer. Peut-être la pénétration a-t-elle lieu dans cet alliage singulier, comme je l'ai observée dans ceux qui sont composés d'étain pur & de cuivre rouge; elle concourroit, si elle avoit lieu effectivement, à l'explication de la densité surprenante d'un mélange où le fer paroît certainement dominer, & qui cependant, quant à cette même pesanteur spécifique, doit être mis à côté de l'or.

Mais il n'y a encore à cet égard que de simples conjectures à former. Les expériences dont je viens de rendre compte, la décomposition du métal qu'on y a remarquée, les déchets considérables & toujours renouvelés qui en ont été la suite, pourront donner lieu à des recherches plus profondes que celles que j'ai présentées, & nous procurer enfin des lumières décisives sur un point de physique aussi propre à piquer par lui-même la curiosité, qu'il demande des manipulations délicates, des attentions scrupuleuses, un travail obstiné.

Si je termine donc ce Mémoire par quelques observations sur la platine en elle-même, c'est moins pour en faire connoître la nature dans laquelle il paroît très-difficile de pénétrer, que pour écarter quelques idées qui pourroient se présenter à l'esprit dans l'examen de ce métal, soit relativement à son origine, soit à l'égard des principes qui le constituent ou des matières qui s'y trouvent jointes. Il paroît bien certain que le fer joue le principal rôle dans la platine, tant comme partie constitutive de ce métal, que comme l'accompagnant toujours dans les endroits d'où la platine est tirée. Non-seulement les grains de ce métal sont mêlés avec une grande quantité de sable ferrugineux & dans l'état pulverulent, mais j'ai remarqué souvent que de petits groupes de grains de platine étoient comme soudés ensemble par ce même sable ferrugineux, &

se

ſe maintenoient en cet état, à moins qu'on ne les frappât pour les déſunir.

Il y a toute apparence que les grains de platine ſe trouvent ainſi groupés, & par maſſes beaucoup plus fortes que nous ne les voyons, dans les mines deſquelles on les tire, & que leur liaiſon eſt dûe à ce même ſable ferrugineux : auſſi les grains de platine qu'on tire de ces groupes ne ſont-ils pas aplatis comme preſque tous les autres que nous recevons iſolés, & annoncent-ils qu'ils ont échappé à la trituration que les Eſpagnols emploient pour en ſéparer l'or.

Quelques Obſervateurs ont ſoupçonné que la platine étoit un produit de l'art, une ſuite des opérations que ſont les Eſpagnols dans l'exploitation de leurs mines d'or, & que malgré leurs précautions il reſtoit dans les réſidus de leurs travaux, de petites portions de ce métal précieux, que nous trouvons toujours mêlées dans la platine que nous recevons d'eux.

Mais il eſt plus naturel de préſumer que la platine ſe trouve dans des mines telle, à peu-près, qu'on nous l'envoie; qu'elle eſt le produit d'un feu ſouterrain & d'un aſſemblage de matières différentes, parmi leſquelles le fer domine. En examinant avec attention des grains de platine brute, j'en ai remarqué qui étoient incruſtés dans de petits graviers, & y étoient enchâſſés avec autant de juſteſſe que l'eſt un diamant dans ſon chaton; d'ailleurs tous les grains de platine qui, dans la trituration, n'ont éprouvé aucun choc, conſervent une forme qui annonce la fuſion; ils ſont très-liſſes dans toute leur ſurface; tous leurs bords ſont arrondis, & pluſieurs d'entr'eux ont la figure de petits rognons, où l'on n'aperçoit aucune aſpérité : cet état conſtant de la platine, avant qu'elle ait été ſoumiſe aux opérations de l'art, donne tout lieu de croire qu'il eſt dû à un feu violent & capable de fondre ce métal avec la portion de fer qu'il contenoit, pendant qu'une autre portion de fer qui ne ſera pas entrée dans le mélange, ſe trouvera réduite à l'état pulvérulent dans lequel nous voyons ce dernier métal.

S'il eſt certain que parmi les grains de platine on trouve

presque toujours de petites paillettes d'or, & qu'après avoir fait bouillir de l'acide marin sur de la platine brute, on remarque, avec le secours du microscope, qu'un grand nombre des grains de ce métal ont leur surface dorée; il est constant aussi que ces mêmes grains de platine ne recèlent aucune partie d'or intérieurement. Sachant que quelques Naturalistes pensent que des veines de ce métal précieux traversent la platine, & par-là contribuent à sa pesanteur, j'ai choisi, dans les grains de platine, les plus gros que j'ai pu y apercevoir, & qui n'avoient point été aplatis; je les ai divisés en deux parties, & j'ai exposé ensuite sous le microscope ces deux portions du métal du côté par lequel elles s'étoient séparées: la mie de ces grains de platine avoit la couleur naturelle de ce métal, mais je n'y ai remarqué aucunes traces d'or; elles m'auroient aussi-bien frappé, s'il y en eût eu quelques-unes, que d'autres petits corps étrangers que j'y aperçus, tels que de très-petits graviers, de petites portions de quartz & une matière noirâtre qui ressembloit assez au sable ferrugineux: j'y ai remarqué aussi quelques soufflures qui, comme on sait, sont les indices assez ordinaires d'une fusion incomplète. Lorsqu'on examine avec attention les deux portions d'un grain de platine divisé, & qu'on les regarde par le côté où la rupture s'est faite, on s'aperçoit que le bord de la surface de ces portions de platine appartient à une espèce de croûte métallique très-mince, dont les grains de ce métal sont revêtus: elle est très-lisse & porte tous les caractères d'un métal qui a été fondu complètement : l'intérieur des grains de platine n'a pas la même netteté; les soufflures qu'on y voit & dans lesquelles une substance noirâtre dérobe l'éclat des parties métalliques, ces soufflures ou petites cavités donnent lieu de croire que quelqu'actif qu'ait été le feu qui a mis la platine en fusion, il n'a pas eu encore assez de violence pour bien fondre le métal, pour le rassembler en masse, & le dégager parfaitement de tout ce qui lui étoit étranger. On remarque en effet que dans la réduction des métaux, l'opération est incomplète, la matière n'est qu'en grenaille dispersée dans les

flux qu'on a employés, si la chaleur n'a pas été assez vive, si la totalité du mélange n'a pas été mis dans la plus grande fluidité : dès-lors on ne doit pas être surpris que la platine résiste à la chaleur de nos meilleurs fourneaux, puisque ceux de la Nature, dont les effets sont si prodigieux, ne paroissent pas encore assez actifs pour bien fondre la platine & réduire en masse ce métal. Quant à la pellicule d'or que le microscope fait apercevoir sur la surface des grains de platine qui ont été exposés à l'action de l'acide marin, il y a tout lieu de croire qu'elle est une suite de l'amalgame du mercure & de l'or, lorsque les Espagnols cherchent à retirer, par voie de trituration, les parcelles d'or que la platine contient; une portion du mercure chargée du métal précieux, peut alors rester adhérente à la surface de plusieurs des grains de platine, se dissiper, à la faveur d'un recuit, en laissant sur ces grains l'or dont le mercure s'est dépouillé; & cet or après avoir passé dans l'acide marin, jouira de l'éclat qui lui est naturel.

Cependant les parcelles de ce métal, qu'il est ordinaire de trouver parmi les grains de platine, contiennent encore quelque alliage qui en altère un peu la belle couleur : j'ai reconnu, par l'essai que j'ai fait de ces paillettes d'or, que leur alliage est à peu de chose près d'un sixième, & qu'on peut les regarder en général comme au titre de l'or employé pour les bijoux.

J'ai dit dans un endroit de ce Mémoire*, qu'après avoir Page 417. obtenu un précipité de platine de la dissolution du cuivre, avec lequel ce métal étoit combiné, & lui avoir donné un recuit, on pourroit lui faire éprouver encore plus ou moins de déchet en le mettant dans l'acide marin, & en tenant pendant quelque temps cet acide en ébullition.

Je dois avertir premièrement que l'acide marin pris dans l'état ordinaire, n'attaque que foiblement ces précipités de platine, après qu'ils ont été recuits, mais que son action est plus forte sur eux si on les y expose avant qu'ils aient été recuits.

Je ferai observer en second lieu, que l'acide marin déphlogistiqué par la distillation de cet acide sur la manganèse,

attaque vivement, à l'aide de la chaleur, les précipités de platine avant qu'ils aient été recuits; qu'il les attaque également, quoiqu'avec un peu plus de difficulté, lorſqu'on les a fait rougir dans un creuſet, & qu'il parvient, en aſſez peu de temps, à les diſſoudre les uns & les autres, ou au moins à les mettre dans un état d'atténuation ſi complète, que l'acide, en prenant une couleur jaunâtre & un peu foncée, devient tranſparent après un jour ou deux de repos, ſans laiſſer de dépôt ſenſible au fond du flacon qui le contient.

Mais il n'en eſt pas ainſi de la platine ductile, bien nette & laminée; l'acide marin déphlogiſtiqué ne l'attaque preſque point, quoiqu'on le tienne aſſez long-temps en ébullition; il n'enlève pas même à ce métal le brillant qu'il a acquis en paſſant entre les rouleaux du laminoir: je n'ai obſervé en effet qu'une perte très-peu ſenſible ſur le poids des petites plaques de platine laminée, auxquelles j'ai fait ſubir l'action de l'acide marin déphlogiſtiqué; elle n'étoit que la mille quatre-vingtième partie du poids de ces petites plaques, & j'ai remarqué qu'elle étoit aſſez conſtamment la même.

On voit par ces dernières expériences, dont il convenoit que je fiſſe mention, que la platine ductile, quoique très-inférieure à l'or à pluſieurs égards, a cependant l'avantage ſur ce métal précieux de réſiſter tout autrement que lui à l'acide marin déphlogiſtiqué, puiſque cet acide ainſi préparé attaque l'or pur très-ſenſiblement, le corrode à ſa ſurface, lui enlève par conſéquent tout ſon brillant métallique, & peut lui faire perdre un douzième, & dans certaines circonſtances juſqu'à un ſixième ou à peu-près de ſon poids; tandis qu'une lame de platine conſerve, comme je l'ai dit, ſon éclat métallique, & reſte preſque intacte au milieu de ce même acide déphlogiſtiqué en ébullition *.

* M. Darcet, dont les lumières & l'exactitude ſont connues, ne s'eſt pas borné à conſtater par des expériences & d'après les procédés de M. Schéele, l'action bien réelle qu'a ſur l'or fin l'acide marin déphlogiſtiqué; il a annoncé à ce ſujet des combinaiſons & des remarques qui répandront du jour ſur ce point de Chimie intéreſſant, & prouveront en particulier que cet acide acquiert beaucoup d'énergie à la faveur de certaines de ces combinaiſons.

L'érosion qu'éprouve l'or fin dans cette expérience, devient très-remarquable lorsqu'après avoir plié en deux une lame brillante de ce métal, on la fait passer de nouveau ainsi pliée entre les rouleaux d'un laminoir; lorsqu'on a l'attention de maintenir les deux parties de la lame tellement appliquées l'une sur l'autre qu'elles ne laissent point de jour entr'elles, & qu'on expose ensuite la lame, dans cet état, à toute l'action de l'acide marin déphlogistiqué.

Si après l'effet qu'aura produit l'acide sur cette lame d'or ainsi doublée, on la rétablit dans son premier état, en mettant à découvert les deux surfaces de la lame qui étoient appliquées l'une sur l'autre, & que l'acide n'avoit pas pu attaquer, alors on sera frappé de l'éclat que la même lame d'or aura conservé d'une part, tandis que de l'autre elle sera de la couleur d'un jaune-mat un peu terne, & y aura souffert une altération notable par une suite de l'attaque vive de l'acide à laquelle rien ne se sera opposé.

Nota. On a dû remarquer, dans l'exposé que je viens de faire de toutes mes expériences sur la dissolution de la platine par l'acide nitreux, que ce métal a éprouvé plus de déchets lorsque j'ai mêlé de l'alkali fixe avec cette dissolution, & que j'ai traité ensuite, par le flux noir, le dépôt salin qui en est résulté, que quand j'ai fait évaporer simplement la dissolution sans y mêler d'alkali fixe, & que j'ai traité également par le flux noir le résidu qu'elle m'a donné. Ne pourroit-on pas soupçonner, d'après cette observation, que l'alkali fixe qu'on mêle ainsi intimement avec la platine atténuée au dernier point, & si susceptible par elle-même d'altération, a quelqu'action sur elle, & l'a d'autant plus sûrement que ce sel, dans la circonstance dont il s'agit, se trouve combiné en quelque sorte avec elle dans la réduction opérée par le flux noir, & y exerce toute son action sur ce métal, s'il l'attaque réellement, à la faveur du degré de chaleur assez considérable qu'exige la réduction complète, tant de la platine que de la chaux de cuivre destinée à la recueillir !



MÉMOIRE
SUR L'INCLINAISON DU TROISIÉME SATELLITE DE JUPITER.

Par M. DE LA LANDE.

Lû le 9 Mai 1779. Remis en 1782.

LORSQUE je donnai à l'Académie, en 1762, l'explication du mouvement direct observé dans les nœuds du 4.e Satellite, & dont on cherchoit la cause depuis long-temps, je remarquai que le nœud du 3.e Satellite devoit avoir un mouvement semblable, & qu'il en résultoit nécessairement dans l'inclinaison une variation que j'espérois discuter dans une autre occasion *(a)*: la quantité de cette variation n'étoit pas encore connue par les observations, & lorsque je publiai, en Octobre 1764, la première édition de mon ASTRONOMIE, on ne savoit autre chose sinon que depuis soixante-six ans, cette inclinaison avoit toujours augmenté; mais on ne voyoit point encore jusqu'où pourroit aller cette augmentation. Ce fut une des causes qui me fit proposer à l'Académie d'indiquer pour le sujet du Prix, *la Théorie des Satellites de Jupiter.*

M. Bailly, dans son excellent Ouvrage sur *les Satellites*, ayant cherché les masses des Satellites par les inégalités connues jusqu'alors, pensa que cette inclinaison pourroit bien augmenter jusqu'en 1797 *(b)*, mais en ajoutant qu'il seroit bien fâché qu'on regardât cela comme une prédiction.

M. de la Grange, qui dans le même temps remporta le Prix de l'Académie sur ce sujet, proposoit une hypothèse de cent quatre-vingt-quinze ans, mais en ajoutant aussi qu'il ne prétendoit que donner une idée de la manière dont on pourroit rendre raison de l'augmentation de l'inclinaison *(c)*.

M. Maraldi, qui a perfectionné & approfondi avec autant

(a) Mémoires de l'Académie, 1762, *page 233*; Mém. 1765, *p. 607.*

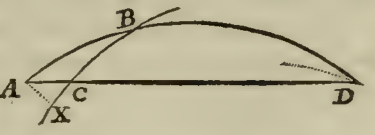
(b) Essai sur la Théorie des Satellites de Jupiter, 1766, *page 135.*

(c) Recherches sur les inégalités des Satellites, *page 161*, dans le Recueil des Pièces qui ont remporté les Prix, *Tome IX*, *1777.*

d'assiduité que de pénétration tous les points de la théorie des Satellites, ne tarda pas à s'apercevoir que depuis 1763, l'inclinaison du 3.e cessoit d'augmenter; & quoique les observations de 1769, dans les limites des plus grandes latitudes, eussent assez mal réussi, il vit que l'inclinaison étoit diminuée d'environ 2 minutes *(d)*.

On attendoit avec impatience les observations de la limite suivante, en 1775, pour voir si cette diminution continueroit d'avoir lieu, & si la période d'augmentation avoit réellement fini en 1763; j'ai examiné pour cet effet toutes les observations que j'ai pu rassembler, & je me suis assuré que cette augmentation avoit cessé peut-être même un peu plus tôt.

Lorsqu'en publiant la seconde édition de mon *Astronomie*, en 1771, je voulus y placer une collection de Tables nouvelles pour toutes les Planètes; je demandai à Mrs Wargentin & Maraldi ce qu'ils avoient de plus nouveau sur les Satellites de Jupiter: le premier m'envoya des Tables nouvelles où il employoit des équations empiriques de douze & de quatorze ans pour représenter les mouvemens du 3.e Satelllite; je les adoptai, ne pouvant faire mieux: mais à l'égard de l'inclinaison du 3.e Satellite, je préférai l'hypothèse de M. Maraldi, & j'employai une Table où il suppose que l'orbite *B C* du 3.e Satellite se meut sur l'orbite *AB* du 1.er, le nœud *B* faisant tout le tour en cent trente-deux ans, l'angle *B* restant toujours de 12′, l'inclinaison du premier étant de



3^d 14′ sur l'orbite *AC* de Jupiter, & le nœud à 10^f 13^d 52′. Ainsi la plus grande inclinaison du troisième a été en *A*, 3^d 26′ en 1763, & la plus plus petite a été en 1697 de 3^d seulement dans le nœud opposé *D;* elle sera de même en 1829. Je suppose qu'on veuille chercher pour 1773 l'inclinaison & le nœud *C;* d'après la période de cent trente-deux ans, on a pour le mouvement annuel du nœud *B*, 2^d 43′ 38″,2, ou 27^d 16′ 22″ depuis 1763 jusqu'en 1773.

(d) Mémoires de l'Académie, 1769.

Si l'on ſuppoſe donc que AB, ſur l'orbite du 1.[er] Satellite, ſoit de $27^d\,16'\,22''$, l'angle A de $3^d\,14'$, & l'angle B de $12'$; on réſoudra le triangle ABC pour trouver l'angle C, incli-naiſon actuelle du 3.[e] Satellite ſur l'orbite de Jupiter.

Pour employer les formules ordinaires de la Trigonométrie ſphérique, on abaiſſeroit la perpendiculaire AX, & l'on diroit, R : coſ. AB : : tang. B : cot. BAX & ſin. BAX : ſin. CAX : : coſ. B : coſ. C; mais les logarithmes du coſ. de B & du ſin. BAX, dans nos Tables ordinaires, ne variant que de quatre parties pour une minute entière, on peut avoir une unité d'erreur ſur leur différence : on préfère quelquefois la formule coſ. C = coſ. B (coſ. A — ſin. A tang. B coſ. AB); mais celle-ci exige que l'on cherche huit fois dans les Tables, & cela dans trois Tables différentes, tandis que la première ne demande que huit fois, & cela dans la même Table. Ainſi on peut préférer la première, quand on ne craint pas une erreur d'une ſeconde ſur l'inclinaiſon : je trouve par la première formule, $3^d\,24'\,44''$; & par la ſeconde, $3^d\,24'\,45''$ pour l'inclinaiſon C du 3.[e] Satellite en 1773 ; ce qui eſt exactement conforme à la Table.

On peut auſſi ſe ſervir de la formule ſuivante, qui ſe déduit par les triangles ſupplémentaires de celle que j'ai démontrée dans mon *Aſtronomie, art. 3696,*

$$\text{coſ.}^2\,\tfrac{1}{2}\,C = \text{ſin.}\,A\ \text{ſin.}\,B\ \text{coſ.}^2\,\tfrac{1}{2}\,AB + \text{ſin.}^2\,\tfrac{1}{2}\,(A - B).$$

Enfin on peut commencer par chercher le côté AC, qui eſt la libration du nœud & dont la tangente $= \dfrac{\text{tang.}\,AB\ \text{coſ.}\,BAX}{\text{coſ.}\,CAX}$; on dira enſuite, $\quad \text{ſin.}\,C = \dfrac{\text{ſin.}\,AB\ \text{ſin.}\,B}{\text{ſin.}\,AC}$.

On trouve par ces deux méthodes, $3^d\,24'\,44'',4$ pour l'inclinaiſon en 1773. Si l'on a cherché l'inclinaiſon C par la première formule, on trouvera la libration AC du nœud, en

en disant, cos. BAX : cos. CAX :: cot. AB : cot. AC, ce qui donnera AC de $1^d\ 32'\ 24''$. Cela s'accorde avec la Table, puisqu'elle marque pour 1773, $10^f\ 12^d\ 20'$, & que le lieu moyen du nœud est à $10^f\ 13^d\ 52'$, lieu du nœud du 1.er Satellite; la différence est en effet $1^d\ 32'$.

Il y a grande apparence que l'action du 2.e Satellite influe beaucoup sur l'inclinaison du 3.e comme je l'ai dit dans mon Mémoire sur ce sujet *(e)*; mais rapportant son effet à l'orbite du 1.er pour l'ajouter avec l'effet que celui-ci produit, on ne s'écarte pas beaucoup des observations, & l'on simplifie beaucoup l'hypothèse & le calcul.

C'est donc cette hypothèse employée dans les Tables, que j'ai comparée avec les durées observées depuis quelques années *(f)*, pour en tirer la confirmation ou la correction de ces mêmes Tables, & j'ai été surpris de leur exactitude.

1773.	8 Août........	$12^d\ 1'\ 17^f$ 14. 41. 6	M. Maraldi, *à Perinaldo.*	I.
	2 Novembre....	11. 49. 3 14. 11. 22	M. Tofino, *à Cadiz.*	II.
	8 Décembre.....	7. 52. 58 10. 9. 59	*à Cadiz.*	III.
1774.	18 Juillet.......	13. 24. 30 14. 59. 40	M. Messier.	IV.
	30 Août........	12. 58. 8 14. 33. 54	*à Cadiz.*	V.
	23 Décembre.....	5. 48. 38 7. 18. 26	M. Messier.	VI.
		6. 14. 26 7. 47. 20	M. Lagrange, *à Milan.*	
1775.	9 Août........	14. 11. 1 16. 9. 17	M. Messier.	VII.

(e) Mémoires de l'Académie, 1765, *page 607.*

(f) Mémoires de l'Académie, 1774, *page 11*; Éphémérides de Vienne, 1778, *page 45*; Éphémérides de Milan, 1776, 1777 & 1778.

1775. 21 Septembre.....	14d 18′ 8″ / 16. 22. 45	M. Messier.	VIII.
1776. 26 Février.......	6. 13. 10d / 8. 49. 10	M. Reggio, *à Milan.*	IX.
24 Novembre....	14. 10. 20 / 17. 28. 47	*À Milan, Éphémér. 1778.*	X.
1777. 26 Mars.........	9. 57. 35 / 13. 24. 40	le P. Fixllmilner, *à Cremsmunster.*	XI.

Voici maintenant la comparaison de ces onze observations, avec la durée de chaque Éclipse tirée des Tables dont je viens de parler : j'y ai ajouté l'erreur des Tables sur le milieu de l'Éclipse.

La onzième observation étant fort près du nœud, ne peut servir qu'à faire voir que le diamètre de l'ombre est fort bien dans les Tables, $1^h\ 47'\ 0''$, mais que l'erreur des Tables sur les conjonctions alloit en croissant en 1777.

OBSERV.	DIST. au Nœud.	DEMI-DURÉE observée.	DEMI-DURÉE par les Tables.	CORRECTION des Tables pour la demi-durée.	CORRECTION pour le milieu.
I.	47d	1h 19′ 55″	1h 19′ 29″	+ 0′ 26″	+ 1′ 33″
II.	55	1. 11. 9	1. 11. 0	+ 0. 9	+ 1. 34
III.	58	1. 8. 30	1. 7. 20	+ 1. 10	+ 0. 55
IV.	79	0. 47. 35	0. 47. 39	− 0. 4	− 1. 9
V.	83	0. 47. 53	0. 45. 29	+ 2. 24	− 0. 5
VI.	87	0. 44. 54	0. 44. 19	+ 0. 35	− 1. 8
VII.	66	0. 59. 8	0. 59. 10	− 0. 2	− 0. 29
VIII	62	1. 2. 18	1. 3. 18	− 1. 0	− 1. 6
IX.	50	1. 18. 0	1. 18. 2	− 0. 2	− 1. 56
X.	27	1. 39. 13	1. 38. 18	+ 0. 55	− 2. 35
XI.	14	1. 43. 32	1. 43. 45	− 0. 13	− 3. 15

Les troisième & huitième observations, qui sont pesque

à même diſtance du nœud, donnent deux erreurs preſque égales & en ſens contraire; ce qui ſuppoſe une augmentation à faire dans le lieu du nœud d'environ 1 degré, ou une diminution de 10 à faire au nombre *A* de la Table, avant que de chercher la demi-durée. Cela s'accorde avec ce que M. Wargentin avoit mis dans ſes Tables, lorſqu'il me les envoya en 1770, en m'avertiſſant que ſa Table étoit purement empirique ou faite d'après les obſervations, ſans avoir adopté aucune hypothèſe; cependant les obſervations I & II, comparées avec l'obſervation IX, ne donnant preſque aucune correction pour le nœud, il paroît qu'on peut encore s'en tenir à la Table, même pour le nœud *(g)*.

Les obſervations IV & VI, qui ſont les plus voiſines du nœud, donnent des erreurs fort petites & en ſens contraire; en ſorte qu'il n'y a rien à changer à cet égard dans l'inclinaiſon que donne la Table, ſi ce n'eſt peut-être 20 ſecondes à ôter de l'inclinaiſon, ce qui mettroit à 1762, au lieu de 1763, le terme de la plus grande inclinaiſon.

La cinquième obſervation a une erreur de 2′ 24″; mais M.[rs] Tofino & Varela nous avertiſſent, dans le Recueil imprimé en 1776, *page 113*, que le temps n'étoit pas clair, *la atmosfera denſa, y el planeta mal terminado :* dès-lors on a dû voir le Satellite plus long-temps éclipſé que dans les obſervations où il fait beau temps, & d'après leſquelles on a conſtruit la Table.

Cette différence eſt ſur-tout ſenſible pour le 3.[e] Satellite, quand il entre dans l'ombre fort obliquement; on en peut juger par l'obſervation du 23 Décembre 1774, que j'ai rapportée ci-deſſus d'après M. Meſſier, & d'après le P. Lagrange, alors Directeur de l'Obſervatoire de Milan: le milieu du paſſage eſt le même, à 3 ſecondes près, par les deux obſervations; ce qui prouve qu'elles ont été fort bien faites l'une & l'autre; mais il y a 3′ 6″ de moins pour la durée par

---

(g) Dans le Recueil des Tables de l'Académie de Berlin, on a mis cette Table; mais à 1765 on lit $10^{f}\ 13^{d}\ 35'$, au lieu de $10^{f}\ 14^{d}\ 11'$: c'eſt une faute d'impreſſion.

M. Meſſier, parce qu'il eſt plus jeune, & que ſa lunette achromatique eſt ſupérieure à un téleſcope de 2 pieds dont le P. Lagrange ſe ſervoit.

La ſeptième obſervation ne s'accorde pas tout-à-fait avec la huitième, faite quarante-trois jours après, au bout de trois révolutions; mais il faiſoit grand jour pour l'émerſion : ainſi M. Meſſier a dû voir le Satellite un peu plus tard, & trouver une durée trop longue, relativement à la huitième obſervation.

J'ai ſuppoſé dans ce Mémoire, les inclinaiſons calculées dans l'hypothèſe de l'ombre circulaire, quoique j'en aie fait voir le défaut *(h)*; mais M. Maraldi n'ayant point encore adopté cette correction, j'ai voulu parler le même langage que lui.

Je n'ai pas cherché à mettre dans les calculs des demi-durées, une préciſion plus grande que celle de la Table que j'examine, où les parties proportionnelles peuvent occaſionner quelques ſecondes d'erreur; mais il ſera aſſez temps de faire ces calculs à la rigueur, d'après l'hypothèſe que j'ai indiquée, ſi dans la prochaine limite on trouve le même accord entre les obſervations & l'hypothèſe. D'ailleurs on ne pourra conſtater ces différences de quelques ſecondes que quand les obſervations ſeront perfectionnées par l'uſage des diaphragmes, expliqué dans l'excellent Mémoire de M. Bailly *(i)*: ce n'eſt que par cette méthode que l'on pourra tenir compte des diamètres des Satellites, & des inégalités dans leur lumière, dans les lunettes & dans les yeux des Obſervateurs. Juſqu'ici nous ſuppoſons que les obſervations qui ont ſervi à conſtruire les Tables, & celles qui ſervent à les vérifier, étant faites avec des lunettes de 18 pieds ou des lunettes achromatiques de 3 pieds $\frac{1}{2}$, ne diffèrent pas ſenſiblement entr'elles. Si celles-ci ſont un peu meilleures, comme on le croit, il en réſultera des différences; mais quant à préſent il ne paroît pas y avoir de changement à faire dans la Table qui ſuppoſe la plus grande

(h) Mémoires de l'Académie, 1763, *page 413*.

(i) Mémoires de l'Académie, 1771.

inclinaison du 3.e Satellite $3^d\ 26'$ en 1763, la période de cent trente-deux ans, & le mouvement de l'orbite du 3.e Satellite sur le premier, avec une inclinaison de $3^d\ 14'$ pour celui-ci sur l'orbite de Jupiter, & de 12 minutes sur l'orbite du second.

Je finirai ce Mémoire en rapportant quelques observations du 3.e Satellite, faites par M. Méchain, comparées avec les Tables pour faire voir le progrès des erreurs. Le signe — indique ce qu'il faut ôter du calcul pour l'accorder avec l'observation.

1778.	10 Avril..	$7^d\ 38'\ 12''$	soir.	É.	— $4'\ 52''$.	
	17 Avril..	11. 40. 10	soir.	É.	— 4. 28.	
	30 Mai...	8. 9. 32	soir.	I.	— 4. 31;	un peu *dout*, à cause du grand jour
	30 Mai...	11. 36. 42	soir.	É.	— 2. 20;	il paroît foiblem.t
	26 Nov...	2. 55. 50	mat.	É.	— 0. 33.	
1779.	8 Janv...	2. 18. 48	mat.	É.	— 0. 26.	
	19 Février.	10. 57. 9	soir.	I.	— 1. 51.	
	27 Mars...	9. 50. 26	soir.	É.	— 2. 5,	
	21 Juin...	9. 31. 25	soir.	É.	— 3. 32.	
1780.	17 Avril ..	7. 42. 47	soir.	É.	— 0. 7;	il y avoit des fumées.
1781.	26 Février.	2. 2. 57	mat.	É.	— 0. 58.	
	6 Mars...	4. 27. 37	mat.	I.	— 1. 4.	
	11 Avril..	0. 25. 41	mat.	I.	— 1. 16.	
	16 Mai. ..	10. 2. 35	soir.	É.	— 0. 15;	il paroissoit déjà.
	28 Juin. .	9. 51. 1	soir.	É.	— 2. 5.	

On peut juger par-là que les équations empiriques, employées par M. Wargentin dans ses Tables, avec des périodes de douze ans & demi & de quatorze ans, ne satisfont pas parfaitement aux observations; il pense en effet qu'il vaudroit autant n'employer qu'une seule équation, que l'on changeroit de valeur en différens temps. *Voyez* le *Tome IV* de mon *Astronomie, page 690 ; Éphémérides de Berlin, 1781,* Mais cette forme, encore plus empirique ou plus aveugle, seroit peu propre à satisfaire les Astronomes : il faudroit donc employer la théorie ou les observations pour démêler mieux

l'influence des trois autres *Satellites* ſur le troiſième dont nous venons de parler. C'eſt pour cela que j'avois engagé l'Académie de Harlem à propoſer ce ſujet de Prix; mais il n'en a point encore réſulté de théorie ſatisfaiſante.

Ces équations, dont les périodes ſembloient être de douze & de quatorze ans, pourroient venir l'une de l'excentricité, l'autre du mouvement de l'apſide du 3.e Satellite: en effet, quand on établit une première équation provenante de l'excentricité, & dont la période eſt à peu-près égale à celle de Jupiter même, on ſuppoſe cette période toujours uniforme, & les retours de la plus grande équation toujours les mêmes; mais ſi l'apſide change, le retour de la plus grande équation ne tombe plus au même point du ciel; & quand on l'y ſuppoſe fixe, on trouve une différence: cette différence ne croît pas uniformément, parce que l'équation n'eſt pas proportionnelle à la diſtance comptée d'un certain point; on peut alors la repréſenter par une nouvelle équation dont la période ſoit égale à la révolution de l'apſide, ou peut-être à un multiple ou un ſous-multiple de cette révolution. C'eſt ce que je me propoſe de diſcuter quand j'aurai raſſemblé un aſſez grand nombre de bonnes obſervations; en ſuppoſant que Mrs Wargentin, Maraldi, de Lagrange & Bailly, à qui nous devons beaucoup de lumières ſur cette théorie, ne s'en feront pas occupés avant moi, & avec plus de ſuccès que je ne pourrois en eſpérer dans mes propres recherches.



MÉMOIRE
SUR LA THÉORIE DE VÉNUS,
OU SUR LES ÉLÉMENS DE L'ORBITE DE CETTE PLANÉTE,
Déterminés au moyen de nouvelles Obſervations.

Par M. DE LA LANDE.

Lû en Novemb. 1779. Remis en 1782.

DEPUIS que j'ai publié de nouvelles Tables de Vénus, en 1770, dans la ſeconde édition de mon *Aſtronomie*, j'ai fait beaucoup d'obſervations propres à les corriger, & on les trouvera dans le IV.ᵉ Volume de mon *Aſtronomie*, imprimé en 1781. Mais les conjonctions inférieures de Vénus, étant les circonſtances les plus favorables à ces ſortes de recherches, j'ai commencé par examiner le réſultat de celles qui ſe ſont préſentées depuis quelques années, ſur-tout après avoir vu avec étonnement une erreur de 6 minutes dans les conjonctions des 24 Octobre 1775 & 6 Janvier 1779, obſervées à Paris & à Toulouſe avec ſoin. M. Slop, habile Aſtronome de Piſe, dans ſon troiſième Recueil d'obſervations, publié en 1778, rapporte trois conjonctions inférieures, obſervées avec préciſion, déduites chacune de pluſieurs jours d'obſervations, calculées & réduites au Soleil; & celle que j'avois obſervée en 1776 en étoit une: j'ai voulu ſavoir d'abord ce qui en réſultoit pour la correction de mes Tables, j'y ai employé la méthode extrêmement ſimple, que j'ai publiée dans les Mémoires de l'Académie, pour 1776, à l'occaſion de Mars; & j'ai reconnu que cette erreur extraordinaire provenoit de 2′ ſeulement ſur la longitude vue du Soleil, dont une minute étoit l'erreur de l'équation, & une minute l'erreur de la longitude moyenne; elles conſpiroient toutes les deux en 1776, & ſe multiplioient par la proximité de Vénus à la Terre.

Temps moyen de la Conjonction à Paris.	*Longit. hélioc. obs. réduite à l'orb.*	*Erreur de mes Tables.*	*Anomalies par mes Tables.*	*Longitudes moyennes,*
1774. 22 Mars 21h 17′ 28″	6s 2d 47′ 19″	+ 1. 1	7s 22d 53′ 52″	6s 2d 7′ 25″
1775. 24 Oct. 2. 34. 1	0. 0. 58. 6	+ 2. 6	2. 22. 26. 29	1. 1. 44. 1.
1777. 1 Juin 2. 32. 53	8. 11. 16. 52	— 0. 34	10. 1. 14. 40	8. 10. 36. 11½.

Première Hypothèse. L'équation de Vénus étant supposée de 48′ 30″. Avec le lieu de l'aphélie, tel qu'il est dans mes Tables, c'est-à-dire avec les anomalies moyennes qui sont rapportées ci-dessus, je cherche dans ces mêmes Tables, où la plus grande équation est de 48′ 30″, l'équation pour chacune des deux premières observations, & je trouve la différence entre le mouvement moyen & le mouvement vrai ou la somme des équations 1d 26′ 54″, trop forte de 1′ 5″, c'est-à-dire le mouvement vrai trop foible de 1′ 5″. J'augmente le lieu de l'aphélie ou je diminue les anomalies jusqu'à ce que la somme des équations soit diminuée de 1′ 5″, & je trouve qu'il faut pour cela augmenter la longitude de l'aphélie de 1d 40′; alors j'ai une première hypothèse qui satisfait à l'intervalle des deux premières observations, soit en temps, soit en degrés, c'est-à-dire à la différence des longitudes moyennes & à celle des longitudes vraies.

Seconde Hypothèse. L'équation de Vénus étant supposée de 48′ 0″, comme dans les Tables de Halley. Avec l'aphélie de mes Tables, je trouve la somme des équations trop forte de 11″; j'augmente le lieu de l'aphélie de quelques minutes, & je vois qu'en l'augmentant de 17′, on a la somme des équations telle qu'elle est par l'observation, 1d 25′ 49″: ainsi dans cette seconde hypothèse, il y a 1d 23′ de moins que dans la première pour le lieu de l'aphélie, & 30″ de moins pour la plus grande équation du centre.

Dans chacune de ces deux hypothèses, je calcule la seconde & la troisième observation, où la somme des équations doit être 86′ 36″: je la trouve dans la première hypothèse 89′ 48″, & dans la seconde 88′ 27″, moindre de 1′ 21″ que dans la première hypothèse, mais trop grande encore de 1′ 51″.

En

En conſéquence je fais ces deux propoſitions,

$$1'\ 21'' : 0'\ 30'' :: 1'\ 51'' : 0'\ 41'',$$
$$1.\ 21 : 1^d\ 23' :: 1.\ 51 : 1^d\ 54'.$$

Ainſi il faut diminuer encore de 41″ l'équation de M. Halley ou de la ſeconde hypothèſe, & diminuer l'aphélie de $1^d\ 54'$, ou ôter $1^d\ 37'$ de celui de mes Tables, pour accorder le ſecond intervalle auſſi-bien que le premier.

Je calcule donc les trois obſervations dans cette nouvelle hypothèſe, en employant les deux Tables d'équations; & faiſant une partie proportionnelle pour les 41″, dont la plus grande équation de Halley doit être diminuée, & je trouve trois longitudes vraies qui ſont plus petites d'environ 1′ 8″ que les longitudes obſervées; ce qui m'apprend qu'il faut ajouter 1′ 8″ à mes époques ou à la longitude moyenne de Vénus tirée de mes Tables.

On verra dans la Table ſuivante la comparaiſon de ces nouveaux réſultats avec mes Tables & celles de Halley & de Caſſini.

	Suivant Halley.	*Suivant Caſſini.*	*Par mes Tables.*	*Nouveau Réſultat.*
Époque pour 1780....	$10^s\ 22^d\ 53'\ 0''$	$10^s\ 22^d\ 52'\ 44''$	$10^s\ 22^d\ 52'\ 47''$	$10^s\ 22^d\ 53'\ 55''$.
Aphélie pour 1780....	10. 7. 46. 46	10. 8. 21. 0	10. 9. 28. 0	10. 7. 51. 0.
Équation de l'orbite...	48. 0	49. 6	48. 30	47. 19.

Je m'en étois tenu, dans mon *Aſtronomie (article 1270)*, à faire l'équation de 48′ 30″, n'ayant pas alors d'obſervations récentes qui fuſſent bien propres à cette recherche; celles que je viens de rapporter indiquoient qu'il falloit la diminuer au moins d'une minute. Suppoſant l'équation de 47′ 20″, on a excentricité 0,0068845, ou 4980 en ſuppoſant la diſtance du Soleil de 1000000.

Voilà pourquoi dans la conjonction du 24 Octobre 1775, obſervée à Paris, à Toulouſe, à Piſe, je trouve l'erreur de mes Tables d'environ 6′ en moins : cela me parut extraordinaire, parce que ſur pluſieurs années d'obſervations, je n'avois jamais vu 2 minutes d'erreur; mais ces 6 minutes étoient une ſuite de l'erreur ſur la longitude héliocentrique

+ 2′ 6″ que l'on a vu ci-deſſus, dont une minute pour l'époque & une pour l'équation. Depuis ce temps-là, M. Dagelet a obſervé la conjonction du mois de Janvier 1779, & il a auſſi trouvé l'erreur des Tables — 6′ vers cinq ſignes d'anomalie; ce qui dépend de la même cauſe, du moins en partie.

Cette augmentation d'une minute ſur l'époque des longitudes, eſt confirmée par la conjonction ſupérieure de Vénus, obſervée à la fin de Juillet 1776 vers le périhélie, où il y avoit une demi-minute de plus que par mes Tables; ce qui fait une minute à ajouter au lieu vu du Soleil.

Quant à la diminution d'une minute que je viens de trouver ſur l'équation de Vénus, elle m'eſt auſſi indiquée par les plus grandes digreſſions de Vénus que j'ai obſervées au mois de Décembre 1775 & au mois de Mars 1777, dans leſquelles j'ai trouvé qu'il falloit éloigner Vénus du Soleil d'environ trois quarts de minute aux environs du périhélie; ce qui doit diminuer l'excentricité, en ſuppoſant que la diſtance moyenne ſoit exacte. Il faudroit une digreſſion obſervée vers l'aphélie, comme celle qui eſt arrivée au mois de Juin 1774, pour établir la conſéquence que je tire de la digreſſion périhélie; mais il n'y a qu'une ſeule obſervation de M. Slop, & elle eſt à 25 degrés de l'aphélie : on n'en aura qu'au mois de Juin 1782. Au reſte, les digreſſions périhélies s'accordent avec les réſultats précédens. A l'égard de l'aphélie, le réſultat ci-deſſus ne ſauroit avoir le même degré de certitude, parce que des trois conjonctions que je viens de calculer, il n'y en a aucune qui ſoit aſſez près des apſides; mais on verra bien-tôt que la diminution de l'aphélie eſt confirmée par d'autres obſervations.

Mais après avoir déterminé la plus grande équation de Vénus de 47′ 19″ par des conjonctions inférieures, qui ſont les obſervations les plus déciſives pour la théorie de cette Planète, j'ai voulu voir ſi les obſervations plus anciennes me donneroient à peu-près le même réſultat : j'en ai trouvé pluſieurs dans les Elémens d'Aſtronomie de M. Caſſini

(page 561); j'en ai choiſi trois, dont une vers le périhélie & deux vers les moyennes diſtances; j'ai calculé le lieu du Soleil par les Tables de la Caille, & j'ai réduit les obſervations en temps moyen.

Temps moyen de la Conjonction.	*Longitude héliocentrique.*	*Anomalie moyenne.*	*Long. de l'Aphélie.*	*Longitude calculée.*
1715. 26 Janv. 8^h 32′	4^s 6^d 22′ 47″	5^s 29^d 39′ 40″	10^s 6^d 45′ 41″	4^s 6′ 22′ 10″
1718. 8 Avr.. 10. 15	6. 18. 40. 42	8. 10. 58. 30	10. 6. 53. 40	6. 18. 40. 57
1719. 10 Nov.. 9. 1	1. 17. 55. 31	3. 11. 41. 11	10. 6. 57. 39	1. 17. 53. 39

Suivant la méthode que j'ai expliquée ci-deſſus, je trouve qu'avec l'équation de mes Tables 48′ 30″, il faut diminuer l'aphélie de 1^d 28′ pour que la différence des longitudes vraies, calculées pour la première & la ſeconde obſervation, ſoit égale au mouvement obſervé.

Avec l'équation de M. Halley 48′ 0″, il faut diminuer de 40′ la longitude de l'aphélie pour repréſenter le premier intervalle.

Je calcule dans ces deux hypothèſes le mouvement de Vénus entre la ſeconde & la troiſième obſervation, je trouve dans l'une que le mouvement eſt plus petit de 5″ que par mes Tables, & dans l'autre plus grand de 54″; d'où je conclus par une double proportion, que pour l'augmenter de 2′ 7″ & le rendre égal au mouvement obſervé, il faut augmenter l'aphélie de 15′, & ſuppoſer l'équation de 47′ 27″. J'avois trouvé 47′ 19″ par les obſervations de 1774, 1775 & 1777; cet accord eſt plus grand que je ne l'avois eſpéré.

Calculant les trois longitudes par ces élémens, je les trouve trop petites de 51″; c'eſt ce qu'il faut ajouter aux époques de mes Tables; & comme j'avois trouvé 1′ 18″ vers 1775, il s'enſuit que le mouvement de Vénus a été plus grand de 17″ en cinquante-ſept ans, ou de 30″ par ſiècle que ſuivant mes Tables.

Les conjonctions inférieures de 1687 & 1692, m'ont donné pour équation 46′ 58″. M. Kraft, qui cherchoit les élémens de Vénus par les conjonctions de 1715, 1716 &

1718, trouvoit l'aphélie à $10^s\ 6^d\ 44'$, comme par mes Tables, & l'équation de $49'\ 6''$ *(Mémoires de Péterſbourg, tome XVI, page 666)*; mais j'ai ſuffiſamment prouvé qu'elle doit être plus petite.

L'équation de Vénus étant aſſez bien déterminée par ces trois calculs de huit conjonctions inférieures à des époques très-différentes, voyons s'il eſt poſſible de déterminer auſſi-bien le lieu de l'aphélie, du moins pour le temps où nous ſommes.

Je me ſuis d'abord ſervi des plus grandes digreſſions obſervées par M. Dagelet & moi, en 1775, 1777 & 1778. Voici une obſervation de chacune, avec l'erreur des Tables déduite des obſervations de pluſieurs jours, aux environs de la plus grande digreſſion. On trouvera les autres dans le IVe volume de mon *Aſtronomie.*

	Temps moyen.	*Longitude obſervée.*	*Err. des Tables.*
1775. 20 Juillet..	$3^h\ 0'\ 42''$	$5^s\ 11^d\ 38'\ 59''$	+ 10″.
1777. 6 Août..	20. 47. 22	2. 29. 23. 44	+ 30.
1778. 7 Nov...	3. 0. 48	9. 1. 51. 0	− 70.

J'ai trouvé que pour faire diſparoître ces erreurs, il falloit ôter de l'aphélie $1^d\ 20'$ pour la première, $1^d\ 2'$ pour la ſeconde, & $2^d\ 17'$ pour la troiſième. J'avois trouvé $1^d\ 37'$ pour les trois conjonctions calculées ci-deſſus : il paroît donc par-là qu'il ſaudroit ôter $1^d\ 20'$ de l'aphélie de Vénus, établi dans mes Tables; mais les conjonctions inférieures valent mieux pour déterminer un élément auſſi délicat : un degré d'erreur ſur l'aphélie ne produit que $20''$ plus ou moins ſur la plus grande élongation, au lieu qu'il fait $2'\frac{1}{2}$ ſur la longitude géocentrique obſervée dans la conjonction inférieure près du périhélie.

Dans l'eſpace de huit ans que Vénus met à revenir dans la même ſituation, il arrive toujours cinq conjonctions inférieures, comme on le voit dans la Table ſuivante; la première vers l'aphélie, les trois ſuivantes vers les moyennes diſtances, & la dernière vers le périhélie.

	CONJONCTIONS.	ANOMALIE.	LATITUDE.
1	10 Août. . 1772	0ˢ 8ᵈ	8ᵈ *Auſtr.*
2	22 Mars... 1774	7. 22	8 *Bor.*
3	24 Octob.. 1775	2. 23	5 *Auſtr.*
4	1 Juin... 1777	10. 1	0
5	6 Janvier. 1779	5. 7	6 *Bor.*
	9 Août. . 1780		

De ces cinq conjonctions, il y en a quatre où la latitude eſt aſſez grande pour qu'on puiſſe voir Vénus le jour même de ſa conjonction avec de bons inſtrumens : dans les autres, on la peut voir deux jours avant & après.

Auſſi M. Dagelet, qui ſait diſtinguer les obſervations importantes, & qui a l'avantage d'un excellent mural pour les bien faire, a très-bien obſervé les deux conjonctions de 1779 & 1780, qui n'auront plus lieu d'ici à huit ans; je les ai trouvées auſſi dans le Recueil que M. Darquier a préſenté à l'Académie en 1781. L'erreur de mes Tables étoit + 6′ dans la première, & — 1′ dans celle de 1780, parce que cette fois l'erreur de l'époque détruiſoit en partie celle qui venoit de l'aphélie. Voici deux des obſervations de M. Dagelet, choiſies parmi un grand nombre, aux environs de chaque conjonction, mais qui ne ſont pas la conjonction même.

	Temps moyen à Paris.	*Longitude de Vénus.*	*Latit. géocentrique.*
1779. 10 Janv..	$23^h\ 35'\ 33''$	$9^s\ 14^d\ 5'\ 57''$	$5^d\ 44'\ 8''$B.
1780. 7 Août...	0. 13. 45	4. 19. 56. 42	7. 19. 36 A.

J'ai calculé les longitudes géocentriques par mes Tables corrigées par les autres élémens que j'avois déterminés, j'ai trouvé qu'il falloit ôter $1^d\ 0'$ de l'aphélie pour la première obſervation, & 57′ ſeulement pour la ſeconde. La différence ne ſuppoſe que 2″ de mouvement vu du Soleil, & chaque minute de l'aphélie change de 2″ la longitude géocentrique;

ainsi le lieu de l'aphélie en 1780, sera $10^s 8^d 30'$. M. Halley a 43' de moins, & M. Cassini 9' de moins ou $10^s 8^d 21'$.

A l'égard du mouvement de l'aphélie, je le réduirai à $2^d 15'$ par siècle ou $1' 27''$ par an, en considérant que les Tables de Cassini & de Halley, faites sur des observations de la fin du dernier siècle, s'accordoient pour 1700, à 6' près, sur le lieu de l'aphélie, & que les observations que j'ai calculées moi-même ci-dessus ne s'écartent pas de ce résultat.

J'ajouterai que les conjonctions des 28 Janvier 1707 & 31 Août 1708, en rectifiant le lieu du Soleil, donnent pour 1708, $10^s 6^d 33'$; cela ne diffère que de 13' du lieu que donnent les élémens que je viens de citer, & les 13' ne font que 8" sur le mouvement vu du Soleil, quantité insensible dans ces observations.

	Longitude héliocentrique.	Mouvement.
1707. 28 Janv... $18^h 34'$	$4^s 8^d 46' 17''$	$6^s 29^d 14' 45''$.
1708. 31 Août., 0. 30	11. 8. 1. 2	

Ces deux observations s'accordent avec mes Tables, en corrigeant seulement l'équation & en ajoutant 5' à l'aphélie, ce qui augmente de 7" le mouvement calculé; ainsi on ne peut pas s'écarter beaucoup en ajoutant 13' au lieu de l'aphélie & le supposant en 1708, $10^s 6^d 33'$.

Mais les trois autres conjonctions calculées *(page 451)*, donnoient une augmentation de 51" à faire aux époques, & une augmentation de 30" sur le mouvement séculaire, tandis que celles-ci donnent $1' 37''$ ou une diminution de 43", & celles de 1689 & 1692 une diminution de 50". Pour satisfaire le mieux qu'il est possible à toutes les sept, en préférant celle de 1689, & sur-tout celle de 1692 qui fut observée avec soin *(Mém. de 1692)*, je me contente d'ôter 42" du mouvement séculaire de mes Tables, & je me retrouve entre Cassini & Halley. Voici ce mouvement suivant différens Auteurs & suivant moi; les différences sont peu sensibles, vu le peu d'ancienneté des bonnes observations.

MOUVEMENT SÉCULAIRE.	
$6^s\ 19^d\ 11'\ 52''$	Halley.
6. 19. 11. 2	Cassini.
6. 19. 12. 22	Hornsby.
6. 19. 12. 12	mes Tables de 1770.
6. 19. 11. 30	nouveau résultat.

Il n'y a que les conjonctions inférieures qui puissent nous donner avec exactitude les vrais mouvemens de Vénus; il n'y en a qu'une dans le dernier siècle qui soit près du périhélie, & elle ne s'accorde point avec les autres; ainsi je ne puis faire mieux, quant à présent, pour la détermination du mouvement des apsides de Vénus.

Avec ces élémens, on ne trouve que quelques secondes d'erreur dans la plupart des observations faites depuis quelques années, ce qui doit venir sur-tout des perturbations *(Mém. 1760, p. 329)* que j'ai négligées, ainsi que l'aberration qui n'est que de 3" dans les conjonctions inférieures. On ne pourra parvenir à un plus grand degré de précision que quand on aura un plus grand nombre de conjonctions inférieures avec plusieurs observations dans chacune. On trouvera ci-après la Table des équations de Vénus & de ses distances au Soleil, d'après l'excentricité déterminée dans ce Mémoire.

Au reste, les élémens que je viens d'établir, suffisent pour que l'erreur des Tables de Vénus n'aille jamais à une minute, & qu'on puisse s'en servir pour trouver, en cas de besoin, les longitudes en mer, en comparant la Lune avec Vénus. C'est une des raisons qui m'ont fait donner à la théorie de cette Planète une attention spéciale.

Le résultat des recherches contenues dans ce Mémoire est renfermé dans les deux Tables suivantes; on y trouvera les époques des moyens mouvemens, soit de Vénus, soit de son aphélie, pour les dix-huit années qui vont suivre; ensuite la nouvelle Table des équations & des distances au Soleil.

Les autres Tables de Vénus, ſavoir les époques du nœud, la Table des Latitudes & celle des moyens mouvemens pour les jours du mois, n'exigeant aucun changement, j'ai cru que je pouvois renvoyer à celles qui ſont dans la ſeconde édition de mon *Aſtronomie*, publiée en 1771 en trois Volumes *in-4.°* & dont le quatrième a paru en 1781.

C'eſt ici la première fois qu'on a donné une théorie de Vénus, établie ſur des obſervations détaillées; & dans la ſuite les Aſtronomes qui voudront perfectionner les Tables de cette Planète, trouveront dans ce Mémoire des points de comparaiſon que Képler, Caſſini & Halley ne nous avoient point laiſſés quand ils ont publié leurs Tables aſtronomiques.

Époques de VÉNUS pour le reſte du ſiècle.

ANNÉES	VÉNUS.	APHÉLIE.
1783	9ˢ 7ᵈ 16′ 21″	10ˢ 8ᵈ 34′ 21″
1784	4. 23. 39. 59	10ˢ 8. 35. 48
1785	0. 8. 27. 28	10. 8. 37. 15
1786	7. 23. 14. 57	10. 8. 38. 42
1787	3. 8. 2. 25	10. 8. 40. 9
1788	10. 24. 26. 2	10. 8. 41. 36
1789	6. 9. 13. 31	10. 8. 43. 3
1790	1. 24. 1. 0	10. 8. 44. 30
1791	9. 8. 48. 29	10. 8. 45. 57
1792	4. 25. 12. 6	10. 8. 47. 24
1793	0. 9. 59. 35	10. 8. 48. 51
1794	7. 24. 47. 4	10. 8. 50. 18
1795	3. 9. 34. 33	10. 8. 51. 45
1796	10. 25. 58. 9	10. 8. 53. 12
1797	6. 10. 45. 38	10. 8. 54. 39
1798	1. 25. 33. 7	10. 8. 56. 6
1799	9. 10. 20. 36	10. 8. 57. 33
1800	4. 25. 8. 5	10. 8. 59. 0

ÉQUATION.

ÉQUATION de l'orbite de VÉNUS.

Otez	ANOMALIE MOYENNE DE VÉNUS.												Otez
	0s —		Is —		IIs —		IIIs —		IVs —		Vs —		
Dégrés.	M. S.	Diff.	M. S.	Diff.	M. S.	Diff.	M. S.	Diff.	M. S.	Diff.	M. S.	Diff.	
0	0. 0	49″	23. 29	43″	40. 49	24″	47. 19	1″	41. 10	25″	23. 51	44′	30
1	0. 49	49	24. 12	42	41. 13	24	47. 20	1	40. 45	26	23. 7	44	29
2	1. 38	49	24. 54	41	41. 37	23	47. 19	2	40. 19	26	22. 23	44	28
3	2. 27	49	25. 35	41	42. 0	23	47. 17	3	39. 53	27	21. 39	44	27
4	3. 16	49	26. 16	41	42. 23	21	47. 14	3	39. 26	28	20. 55	45	26
5	4. 5	49	26. 57	40	42. 44	11	47. 11	4	38. 58	29	20. 10	46	25
6	4. 54	49	27. 37	40	43. 5	20	47. 7	5	38. 29	29	19. 24	46	24
7	5. 43	49	28. 17	39	43. 25	20	47. 2	6	38. 0	30	18. 38	46	23
8	6. 32	48	28. 56	39	43. 45	18	46. 56	7	37. 30	31	17. 52	46	22
9	7. 20	49	29. 35	38	44. 3	18	46. 49	8	36. 59	32	17. 6	47	21
10	8. 9	49	30. 13	38	44. 21	17	46. 41	9	36. 27	32	16. 19	47	20
11	8. 58	48	30. 51	37	44. 38	16	46. 32	10	35. 55	32	15. 32	47	19
12	9. 46	47	31. 28	37	44. 54	15	46. 22	10	35. 23	34	14. 45	48	18
13	10. 33	48	32. 5	36	45. 9	14	46. 12	11	34. 49	34	13. 57	48	17
14	11. 21	48	32. 41	35	45. 23	14	46. 1	12	34. 15	35	13. 9	48	16
15	12. 9	47	33. 16	35	45. 37	13	45. 49	12	33. 40	35	12. 21	48	15
16	12. 56	48	33. 51	34	45. 50	12	45. 37	14	33. 5	36	11. 33	49	14
17	13. 44	47	34. 25	33	46. 2	11	45. 23	15	32. 29	37	10 44	49	13
18	14. 31	46	34. 58	34	46. 13	10	45. 8	15	31. 52	37	9. 55	49	12
19	15. 17	46	35. 32	32	46. 23	9	44. 53	17	31. 15	38	9. 6	49	11
20	16. 3	46	36. 4	31	46. 32	9	44. 36	17	30. 37	38	8. 17	49	10
21	16 49	46	36. 35	31	46. 41	8	44. 19	17	29. 59	39	7. 28	49	9
22	17. 35	46	37. 6	30	46. 49	7	44. 2	19	29. 20	39	6. 39	50	8
23	18. 21	45	37. 36	30	46. 56	6	43. 43	20	28. 41	40	5. 49	50	7
24	19. 6	45	38. 6	29	47. 2	5	43. 23	20	28. 1	40	4. 59	49	6
25	19. 51	44	38. 35	28	47. 7	4	43. 3	21	27. 21	41	4. 10	50	5
26	20. 35	44	39. 3	28	47. 11	3	42. 42	22	26. 40	41	3. 20	50	4
27	21. 19	44	39. 31	26	47. 14	3	42. 20	22	25. 59	42	2. 30	50	3
28	22. 3	43	39. 57	26	47. 17	2	41. 58	24	25. 17	43	1. 40	50	2
29	22. 46	43	40. 23	26	47. 19	0	41. 34	24	24. 34	43	0. 50	50	1
30	23. 29		40. 49		47. 19		41. 10		23. 51		0. 0		0
Ajoutez	XIs +		Xs +		IXs +		VIIIs +		VIIs +		VIs +		Degr.

LOGARITHMES des distances de VÉNUS au SOLEIL.

Degrés d'anom.	ANOMALIE MOYENNE DE VÉNUS.												
	O^s		I^s		II^s		III^s		IV^s		V^s		
	Logarith.	Diff.	Logarith.	Diff.	Logarith.	Diff.	Logarith.	Diff.	Logarith.	Diff.	Logarith.	Diff.	
0	4,862318	1	4,861924	26	4,860845	44	4,859359	53	4,857856	45	4,856746	26	30
1	4,862317	2	4,861898	26	4,860801	46	4,859306	52	4,857811	45	4,856720	25	29
2	4,862315	2	4,861872	28	4,860755	46	4,859254	52	4,857766	45	4,856695	25	28
3	4,862313	3	4,861844	28	4,860709	46	4,859202	52	4,857721	44	4,856670	23	27
4	4,862310	4	4,861816	30	4,860663	47	4,859150	52	4,857677	43	4,856647	23	26
5	4,862306	5	4,861786	29	4,860616	47	4,859098	52	4,857634	43	4,856624	22	25
6	4,862301	6	4,861757	31	4,860569	47	4,859046	52	4,857591	43	4,856602	22	24
7	4,862295	6	4,861726	31	4,860522	48	4,858994	52	4,857548	42	4,856580	20	23
8	4,862289	8	4,861695	32	4,860474	48	4,858942	52	4,857506	41	4,856560	19	22
9	4,862281	8	4,861663	33	4,860426	49	4,858890	51	4,857465	41	4,856541	19	21
10	4,862273	9	4,861630	33	4,860377	49	4,858839	52	4,857424	40	4,856522	18	20
11	4,862264	11	4,861597	34	4,860328	49	4,858787	51	4,857384	40	4,856504	17	19
12	4,862253	11	4,861563	35	4,860279	49	4,858736	52	4,857344	39	4,856487	16	18
13	4,862242	12	4,861528	35	4,860230	50	4,858684	50	4,857305	38	4,856471	15	17
14	4,862230	13	4,861493	36	4,860180	50	4,858634	51	4,857267	38	4,856456	14	16
15	4,862217	13	4,861457	37	4,860130	50	4,858583	51	4,857229	37	4,856442	13	15
16	4,862204	15	4,861420	37	4,860080	51	4,858532	50	4,857192	36	4,856429	13	14
17	4,862189	15	4,861383	38	4,860029	50	4,858482	50	4,857156	36	4,856416	11	13
18	4,862174	17	4,861445	39	4,859979	51	4,858432	50	4,857120	35	4,856405	11	12
19	4,862157	17	4,861306	39	4,859928	51	4,858382	49	4 857085	35	4,856394	10	11
20	4,862140	18	4,861267	39	4,859877	52	4,858333	50	4,857050	33	4,856384	8	10
21	4,862122	18	4,861228	41	4,859825	51	4,858283	49	4,857017	33	4,856376	8	9
22	4,862104	20	4,861187	41	4,859774	52	4,858234	48	4,856684	33	4,856368	7	8
23	4,862084	20	4,861146	41	4,859722	51	4,858186	48	4,856951	31	4,856361	6	7
24	4,862064	21	4,861105	42	4,859671	52	4,858138	48	4,856920	31	4,856355	5	6
25	4,862043	22	4,861063	43	4,859619	52	4,858090	48	4,856889	30	4,856350	5	5
26	4,862021	23	4,861020	42	4,859567	52	4,858042	47	4,856859	29	4,856345	3	4
27	4,861998	24	4,860978	44	4,859515	52	4.857995	47	4,856830	29	4,856342	2	3
28	4,861974	25	4,860934	44	4,859463	52	4,857948	46	4,856801	28	4,856340	2	2
29	4,861949	25	4,860890	45	4,859411	52	4,857902	46	4,856773	27	4,856338	1	1
30	4,861924		4,860845		4,859359		4.857856		4,856746		4,856337		0
	XI^s		X^s		IX^s		VIII^s		VII^s		VI^s		D.

MÉMOIRE SUR LA POPULATION DE PARIS, ET SUR CELLE DES PROVINCES DE LA FRANCE,

Avec des Recherches qui établiſſent l'accroiſſement de la Population de la Capitale & du reſte du Royaume.

DEPUIS LE COMMENCEMENT DU SIÈCLE.

Par M. MORAND.

DANS le Volume de nos Mémoires pour l'*année 1771*, j'ai donné une récapitulation (année par année) des baptêmes, mariages, mortuaires & enfans-trouvés de la ville & des faubourgs de Paris, depuis le commencement du ſiècle juſques & compris 1770. Ce ſommaire, précédé de quelques remarques appropriées au ſujet, & qui tendent à l'éclaircir, ayant été agréable à l'Académie, je me ſuis engagé à ſuivre ce travail, à donner de temps en temps le réſumé général des années ſubſéquentes, en l'accompagnant de réflexions dans le cas où, au bout d'un certain temps, il réſulteroit de ce recenſement quelque connoiſſance importante *(a)*.

Lû à la rentrée publique du 14 Avril 1779.

Parmi les obſervations que le premier tableau m'a donné occaſion de préſenter ſur cet objet, une des principales, en ce qu'elle intéreſſe le ſentiment naturel de l'homme pour ſa propre conſervation, eſt la durée de la vie, plus grande dans nos pays qu'on ne l'avoit eſtimé communément, malgré ce qu'on pouvoit en préſumer de la température exceſſivement variable de notre climat. Dès 1760, M. de Parcieux *(b)*

(a) Conformément à ce que j'ai propoſé dans mon premier Mémoire de 1771, *page 845*, je donnerai pour le Volume de 1781, la récapitulation depuis 1771 juſques & compris 1780.

(b) Addition à l'Eſſai ſur les Probabilités de la durée de la vie humaine, *in-4.° Paris, 1760*.

avoit bien avancé *qu'il n'eſt pas ſi rare qu'on le croit ordinairement, de trouver ici, comme ailleurs, des gens très-vieux (c), & toujours plus de femmes que d'hommes (d).* Ce que nous avons remarqué dans notre tableau général ſur le grand nombre de vieillards, ſemble ajouter quelque choſe & quelque évidence à l'obſervation de M. de Parcieux, flatteuſe ſans doute pour tous les hommes en particulier, dont elle autoriſe un plus grand nombre, quoique toujours infiniment petit, à eſpérer ces années de grâces & de faveur, qui conſtituent ce qu'on appelle *le dernier âge de la vie (e).*

En continuant mes recherches, principalement en les rapprochant de celles qui ont été faites par d'autres que moi, je n'ai pas été peu frappé d'une induction qui intéreſſe grandement le corps de la Société; & ſi cette induction ſe confirme, ou ſi elle réſulte inconteſtablement de ſupputations exactes (comme il ſemble qu'il y a lieu de le penſer), elle n'eſt pas moins importante que la première: l'Académie jugera ſi elle mérite d'occuper une place dans la rédaction du travail qu'elle m'a confié, & dont je lui donne aujourd'hui la continuation.

Depuis Diodore de Sicile, tous les Hiſtoriens de

(c) On ſait que la Société royale de Londres a auſſi reconnu, après des recherches dont on ne peut guère ſuſpecter l'exactitude, qu'il ne mouroit, par année commune, qu'une perſonne ſur quarante-deux.

(d) Dans l'eſpace de vingt-deux années, depuis 1745 juſques & compris 1766, le nombre des mortuaires des femmes n'eſt que de 191753 au lieu de 213487, qui eſt celui des hommes. M. de Buffon en conclut, qu'à Paris, les femmes vivent plus que les hommes, dans la raiſon de 213487 à 191753, c'eſt-à-dire un neuvième de plus, à très-peu-près, ou que ſur dix années de vie courante, les femmes ont un an de plus que les hommes.

(e) A ce que j'ai rapporté dans mon premier Mémoire ſur la longue vie, *page 844*, j'ajouterai ici un nouvel exemple frappant dans une même famille, à Metz en Lorraine; il a été publié dans les Gazettes d'Agriculture & du Commerce, *année 1779, n.° 7, fol. 564*

De ſept frères & ſœurs, dont cinq garçons & deux filles,

Le 1.er de ces enfans,	garçon, avoit	74 ans,
2.e	fille,	75,
3.e	garçon,	78,
4.e	fille,	79,
5.e	garçon,	81,
6.e	garçon,	83,
7.e	garçon,	91,
Faiſant entr'eux ſept		561 ans.

Dans l'intervalle de ces deux années 1777 & 1779, la fille âgée de 75 ans, & le garçon de 83 ans, ſont morts; les autres jouiſſoient alors d'une bonne ſanté.

l'Antiquité, Strabon & un grand nombre de Savans, ont prétendu que l'espèce humaine a souffert de très-grandes réductions; un des génies du siècle de Louis XV (car il est permis à un Observateur de crayonner sur ses tablettes jusqu'aux rêves des grands hommes), Montesquieu, portoit les choses plus loin; ne tenant point compte des recrutemens de population, ni de leur possibilité, il pensoit que la terre se dépeuploit tous les jours, au point qu'en supposant cette diminution d'habitans sur la surface du globe soutenue pendant dix siècles, la terre finiroit par n'être plus qu'un désert: ces opinions sont connues de toutes les personnes instruites, & rappelées dans plusieurs Ouvrages *(f)*.

Dans ces derniers temps, quelques Écrivains semblent ajouter foi à ces présages singuliers, & les ont étayés de quelque vraisemblance: ils soutiennent, par exemple, pour la France, que depuis le *Projet de la Dixme Royale*, attribué à M. de Vauban, & dont il a paru une édition *in-12* & une *in-4.°* imprimée en 1707, la population du royaume est diminuée de plus de trois millions d'habitans. Dans une Brochure, publiée en 1760 *(g)*, on a avancé comme démontré, que les pays les plus riches de l'Europe se dépeuplent visiblement. L'Auteur de l'article curieux sur la *Population*, qu'on trouve dans l'*Encyclopédie*, publié en 1765 *(h)*, après avoir remarqué que, depuis le siècle dernier, la Monarchie est augmentée de plusieurs grandes provinces, prétend que ses sujets sont moins nombreux d'un cinquième, qu'ils ne l'étoient avant la réunion de ces provinces à la Couronne. Un état raisonné de la population de Londres & de celle de Paris, inséré dans un de nos Journaux périodiques en 1772 *(i)*, a conduit l'Auteur de cette recherche *(k)* à opiner, comme ceux qui viennent d'être cités, que la popu-

(f) Lettres Persanes. L'Ami des hommes.

(g) Traités sur divers sujets intéressans de Politique & de Morale, du Commerce & du Luxe, *p. 216.*

(h) M. Damilaville.

(i) Gazette d'Agriculture, du Commerce & de Finance, 11 Avril, *page 229;* 14 Avril, *page 236;* 18 Avril, *page 245.*

(k) M. Auffray, des Académies de Metz & de Marseille.

lation de toute l'Europe diminue, & qu'elle ne ſoutient nullement la comparaiſon avec celle qui exiſtoit il y a ſeulement un ſiècle: à la ſuite d'un tableau compoſé pour Londres & pour Paris, d'une ſuite d'années égales pour l'une & pour l'autre de ces deux Capitales, tant en naiſſances qu'en morts, vient un réſultat qui n'eſt à l'avantage ni de la population de Londres, ni de la population de Paris *(l)*. Cette dernière ſeule nous intéreſſe eſſentiellement; c'eſt à elle ſeule que je m'arrête, d'autant plus que pour ce qui eſt de Paris, les ſupputations de l'Académicien de Metz, & les conſéquences qu'il en a tirées, ſont reſtées conſignées dans ce Journal, ſans avoir été contredites juſqu'à préſent: elles acquièrent dès-lors une certaine force, & ſont ſuppoſées avouées. Antérieurement M. l'abbé Expilly s'étoit déjà élevé contre cette aſſertion. M. de Parcieux, dont les ſupputations n'étoient cependant relatives principalement qu'à deux claſſes d'hommes, Roturiers & Religieux, avoit ſoupçonné l'accroiſſement de la population de la Capitale de la France. Les perſonnes qui ſe ſont occupées de ce genre de ſpéculation, & celles chargées de certaines parties d'adminiſtration, ſont autoriſées à penſer qu'il n'y a rien de moins vrai que ce dépériſſement de population dans Paris. Seroit-il indifférent de déſabuſer ou de ne point déſabuſer l'univerſalité des Citoyens ſur un fait de cette nature? Il eſt ſans contredit un ſujet d'encouragement ſi la population ſe ſoutient, encore plus ſi elle augmente: quel ſujet de découragement, au contraire, ſi cette population s'affoiblit ſenſiblement ſans ſe relever, particulièrement après quelque calamité ou quelqu'époque, propre à faire ſoupçonner des émigrations ou un défaut de reproduction, capable de faire renaître l'idée d'une dépopulation ſoutenue! Et ce dernier

(l) D'après un état depuis 1759 incluſivement, juſqu'en 1772 excluſivement, comparé avec un état de naiſſances & de morts, en 1682, il compte mille habitans de perdus par an depuis 1682, & prétend que depuis treize ans, la population de Paris perdoit chaque année dix-huit cents ſoixante-deux perſonnes; enfin, il trouvoit alors douze cents naiſſances de moins, & deux mille deux cents quatre-vingt-cinq morts de plus; & la population, eſtimée ſelon lui à ſept cents mille habitans, diminuée d'un huitième.

ſentiment ne laiſſe pas que d'avoir des partiſans. Commençons donc par jeter les yeux autour de nous; examinons d'abord ſi cette manière de voir les variations & les altérations de notre population de Paris, ſe vérifie dans quelque point: portant enſuite nos regards dans les provinces, examinons s'il eſt bien certain que notre génération, en s'épuiſant dans ſa reproduction, annonce ces approches, entrevues de ſi loin, de la première vieilleſſe du monde entier, & particulièrement celle du royaume de France.

En s'attachant uniquement à conſidérer ſous des aſpects généraux, les ſignes auxquels on pourroit reconnoître cette deſtruction, rien ne paroît les appuyer: quant à la Capitale, par exemple, ſes limites reculées à deux repriſes différentes depuis un ſiècle, afin d'y ajouter d'abord au quartier Saint-Sulpice & au quartier de Richelieu, deux villes nouvelles; deux autres, de nos jours, à celui de la Ville-l'Évêque & à la Chauſſée d'Antin, ſont réputées par quelques perſonnes un ſigne d'accroiſſement de population *(m)*. A l'égard des provinces, on pourroit en tirer la même induction de l'épuiſement des forêts & de la rareté des bois de chauffage, à la vérité réſultats du luxe des particuliers & de l'inattention du Gouvernement à replanter les bois, mais néanmoins ſuites également évidentes d'une grande population *(n)*.

Ces préſomptions générales ſont plus que plauſibles, plus

(m) Ce n'eſt pas que nous prétendions que l'on puiſſe conclure complètement de cette nouvelle étendue de ſuperficie, couverte d'habitations: ſans doute la recherche de logemens commodes & ſpacieux, entre ſeule pour beaucoup dans ces accroiſſemens d'étendue de local; mais peut-on diſconvenir que ces logemens n'emportent un plus grand état de maiſon, en augmentation de domeſtiques, dont la plupart en ſe mariant, ont néceſſairement augmenté la population! Il eſt en même temps difficile de croire, que depuis un ſiècle le nombre des Artiſans, des petits Marchands & autres, ne ſoit pas doublé; l'accroiſſement des Corps & Communautés, de ſiècle en ſiècle, eſt une choſe hors de doute.

(n) M. de Buffon dans ſon Supplément au *tome IV* de l'hiſtoire du Cabinet du Roi, fait judicieuſement la remarque ſuivante, qui ſe rapporte abſolument à notre idée; *plus*, dit ce Savant: *plus les hommes ſe multiplieront, plus les forêts diminueront.*

fortes du moins que les conjectures de la dépopulation du royaume; elles sont incontestablement beaucoup moins fautives que les combinaisons sur lesquelles plusieurs Écrivains se sont appuyés ; elles ne doivent cependant être ici d'aucune considération ; aussi les négligerons-nous entièrement : un point de cette conséquence demande à être porté jusqu'à l'évidence, autant que la chose en est susceptible. La discussion par laquelle je vais essayer de mettre tout le monde indistinctement en état de juger, n'entraînera pas de longs détails; c'est entièrement une affaire de calcul. Pour lever tout soupçon de préoccupation de ma part, je m'abstiendrai d'y faire rien entrer de mon travail particulier; il me suffira de remplir les fonctions d'Historien, c'est-à-dire que je m'en tiendrai à rassembler les premières autorités que j'ai prises au hasard, à mesure qu'elles se sont présentées jusqu'à l'année dernière, & sans en avoir choisi aucune par préférence.

Des différentes manières de juger l'accroissement ou le décroissement de population d'une ville *(o)*, celle qui procède par l'augmentation & la diminution du nombre des naissances dans une période de temps fixe, nous semble la plus aisée aujourd'hui, la plus sûre, la meilleure *(p)*; & précisément le tableau des naissances & des mortuaires de Paris, depuis le commencement du siècle, présente dès actuellement pour cette Capitale,

(o) M. de Parcieux, dans son Addition, a fait connoître une façon très-simple, dont s'y prenoit un Curé de Normandie, pour former une liste de mortalités : le Dictionnaire historique, géographique & politique des Gaules & de la France, par M. l'abbé Expilly, (tome V, imprimé en 1768, au mot *Population*) ; le projet d'une Dixme royale, *in-4.° 1707, page 187*, ont donné différens modèles de dénombremens que l'on peut consulter. Aux états de naissances & de morts, pour les provinces, il seroit bon d'ajouter un dénombrement, ou du moins le nombre des Paroisses, dont sont composés les cantons qui donnent matière à ces états.

(p) Peut-être aussi l'examen suivi & comparé, en différens temps, de la consommation d'une grande ville, telle que Paris, quoique bien sujette à variations, auroit quelque utilité ; nous insérerons ici un état de ce genre, pour, dans la suite, servir de terme de comparaison avec d'autres.

État

Capitale, des réfultats de nature à intéreffer les Citoyens de tous les ordres. On verra tout-à-l'heure qu'ils font tout-à-fait oppofés, foit aux annonces, foit aux fupputations finiftres dont nous avons parlé au commencement de ce Mémoire. En donnant une notice chronologique de quelques-uns de ces réfultats, nous avons pour but de fubftituer à ce fyftème de dépopulation, un tableau plus vrai & plus agréable pour les générations qui fuccèderont à la nôtre : ce tableau, auquel j'ai cru pouvoir m'arrêter après avoir compté les voix, montre que la population du royaume, qui, par des circonftances telles que celles que l'on fait arriver de temps en temps dans les grands États, pourroit avoir été languiffante, peut-être

---

État de confommation de toute efpèce de Vivres, dans Paris, en 1664.

1800000	fetiers de blé.
900	fetiers de fel.
77000	bœufs.
120000	veaux.
420000	moutons.
14400	cochons.
33977	morues.
32590	barils de harengs.
3250	barils de faumon falé.
1340	barils de maquereaux falés.
41315	voies de { charbon de bois. charbon de terre.
4 à 500000	voies de bois.
3212000	fetiers d'avoine.
10000200	bottes de foin & de paille.
5004519	livres de fuif.
160000	rames de papier pour l'impreffion.
180000	rames de { papier pour écriture, cartes à jouer. cartes de Géographie. eftampes.

J'ai cru pouvoir adopter cet état, publié par M. l'abbé Expilly, fans néanmoins garantir en aucune manière fon exactitude : d'anciens écrits fugitifs renfermoient une note fur le même objet ; quelque peu d'authenticité que puiffe avoir une pareille note, prife dans ces fources, je placerai ici celle que je trouve dans un Almanach : il y eft dit, qu'il fe confomme à Paris, année commune,

900	muids de fel.
12800	muids de blé.
77000	bœufs.
120000	veaux.
240000	moutons.
32400	cochons.
37978	morues.
32560	barils de harengs.
3250	barils de faumon falé.
1340	barils de maquereaux falés.
41315	muids de { charbon de bois. charbon de terre.
500000	voies de bois.
33212	muids d'avoine.
10000000	bottes de foin.
200000	bottes de paille.

même altérée jusqu'au commencement de ce siècle, à peu-près (q); ce tableau montre, dis-je, que la population du royaume s'accroît aujourd'hui sensiblement, ou tout au moins qu'elle ne diminue certainement pas dans le moment actuel, comme le prétendent quelques personnes. Par exemple, le dénombrement de Paris, commencé sous Colbert (r), porte la population de cette Capitale à sept cents vingt mille personnes (s): ce même nombre ne se retrouve peut-être pas aujourd'hui; mais la diminution des morts & l'augmentation des naissances, établies par notre tableau depuis environ une quarantaine d'années (t), font disparoître l'idée de continuité de dépopulation.

(q) Comme elle l'est quelquefois passagèrement, selon la rigueur des hivers, selon les mauvaises années ou des constitutions épidémiques, selon l'affluence de la province & des pays étrangers, selon enfin des évènemens particuliers : c'est ainsi que par le tableau de 1710, on trouve une différence au moins d'un cinquième de naissances, sur les naissances des années précédentes; non-seulement, la population avoit perdu un cinquième sur la reproduction, mais encore presque le double par la mortalité, & un quart de moins de mariages, dont le nombre, ainsi que celui des naissances, présente toujours, dans Paris, moins de variations d'une année à l'autre, que le nombre des morts. Depuis le commencement de nos dernières expéditions maritimes, qui expatrient nombre de sujets, dont la plus grande partie ne reviendra point, on doit s'attendre à voir une différence marquée dans notre population.

(r) En 1682, & rendu public peu d'années après la mort de ce Ministre, en 1694.

(s) Avant ce dénombrement vrai, & généralement adopté aujourd'hui, le nombre des habitans de Paris semble avoir été évalué à un million, on ignore sur quel fondement; il est porté à ce taux par le Père Bonssingault, Supérieur & Chanoine régulier, dans un Ouvrage intitulé le *Guide universel des Pays-bas, in-12, troisième édition, 1672, page 358.* L'abbé de Saint-Pierre, & depuis lui plusieurs Écrivains, le font monter à huit cents mille, & ils ajoutent qu'il meurt, année commune, dix-huit à dix-neuf mille personnes, sur vingt environ qui naissent. Le Maire, auteur de l'Ouvrage intitulé *Paris, ancien & nouveau, tome I, page 6, état présent de la ville de Paris, en 1685*, a aussi adopté ce nombre de morts dans Paris.

(t) En établissant la base de ces recherches sur les états des mortuaires, il est indispensable de ne pas soupçonner que ces Tables, dans leurs commencemens, n'étoient ni si exactes, ni aussi complètes que depuis environ quarante ans, qu'elles ont été augmentées de quelques articles & de quelques développemens; il est plus sûr conséquemment de ne partir que de l'année 1721, & même encore, à l'exemple de M. de Buffon, pour approcher de plus près de la mortalité moyenne,

L'évaluation de M. l'abbé Expilly, portée à six cents mille habitans de Paris, vers l'année 1760 *(u)*, se trouve peu différente des supputations de M. de Buffon, qui fixe ce nombre à six cents cinquante-huit mille ; & attendu que la mortalité moyenne est actuellement reconnue de vingt mille par an *(x)*, cet Académicien porte le nombre des personnes vivantes dans la Capitale, à sept cents mille *(y)* : il trouve en même temps que la force de cette Capitale, pour le maintien de sa population, a depuis cent ans augmenté d'un quart *(z)*.

Un Magistrat, distingué par ses lumières, & non moins recommandable par les fonctions dont il a été chargé successivement pour le Roi, en Auvergne & dans le Lyonnois,

---

il est plus sûr de ne partir que de 1745, où ces listes ont été détaillées dans des divisions intéressantes.

(u) Dictionnaire historique, géographique & politique des Gaules & de la France, tome V, imprimé en 1768, *page 400*, au mot *Paris*.

(x) Sept cents vingt mille si la mortalité moyenne est de vingt mille par an, en comptant trente-cinq vivans pour un mort : quelques Écrivains, en jugeant du nombre des vivans par celui des morts, avancent que ce rapport est de 32 ou 33 à 1 ; selon M. de Buffon, il est de 35 à 1, de manière que, suivant cet Académicien, Paris contient trente-cinq fois dix-huit mille huit cents ou six cents cinquante-huit mille personnes, tandis que, d'après le premier rapport de trente-deux vivans pour un mort, Paris ne contiendroit que six cents un mille six cents personnes.

(y) Histoire Naturelle, Supplément, tome IV, Probabilités de la durée de la vie, *in-4.° page 283*. Je dois ajouter ici une remarque sur le nombre total des naissances portées dans les états annuels, publiés jusqu'à ce jour. L'article des Enfans-trouvés renferme un double emploi, que j'ai trouvé moyen de réformer : parmi les enfans reçus dans cet Hôpital, & portés sous ce titre, la plupart ont été baptisés, soit à Paris, soit dans les Campagnes d'où ils ont été envoyés ; ce nombre particulier, dont la distinction commencera sur les états à l'année 1780, doit être diminué sur la totalité des naissances de la ville de Paris, pour les années antérieures, où le nombre des Enfans-trouvés s'est accrû sensiblement : on peut évaluer ce nombre à quinze cents, année commune, qu'il faut conséquemment soustraire des résultats relatifs à la population générale de la Capitale, pour les années précédentes.

(z) En comparant les vingt premières années, depuis 1721 jusqu'en 1766, avec les dix dernières, il en résulte, selon le même Savant, qu'entre la dernière époque, comparée avec la première, il y a une différence d'un trente-sixième en augmentation.

où j'ai vu ſa mémoire en honneur, quoique n'étant plus dans ces provinces, s'étoit occupé de la même recherche bien antérieurement à mon premier Mémoire : le tableau de mortalité, faiſant partie de mon travail, a fixé l'attention de l'homme en place, toujours dirigée vers l'utilité. Il a publié, ſous le nom de M. Maudre, dans le Mercure de Mai 1777, des réflexions dont le réſultat entièrement d'accord avec ce que nous dirons dans un inſtant relativement aux provinces du royaume, dédommage clairement des triſtes impreſſions données par l'Académicien de Metz & de Marſeille. Le ſavant Magiſtrat qui n'a pas voulu ſe nommer, après avoir diſtrait de ſon calcul ſix Paroiſſes de Paris, compriſes dans les états de 1770 & 1771, qui ne l'étoient point dans les états précédens, trouve que dans les autres Paroiſſes dont la ville de Paris étoit alors compoſée, la population s'eſt accrue d'environ un dix-ſeptième dans le courant d'un ſiècle, & que le nombre des morts eſt diminué d'environ un vingt-deuxième. L'auteur de nouvelles recherches & conſidérations ſur la population de la France, eſtime le nombre des perſonnes vivantes à Paris, évalué par les naiſſances, à ſix cents ſoixante-dix mille, à peu-près *(a)*.

Quel que puiſſe être cet accroiſſement de population dans Paris, le premier mouvement qu'inſpire naturellement ce genre de proſpérité de la Capitale du royaume, eſt d'abord ſuſpendu par une opinion aſſez généralement reçue; & on peut dire que cette opinion eſt raiſonnable, ſi l'on trouve la preuve que cet accroiſſement de population de la Capitale en particulier, exiſte en quelque choſe aux dépens de nos provinces, où la multiplicité des bras & le nombre des Cultivateurs ſont d'une conſéquence bien autre que celui des habitans de Paris. En effet pour peu que nos campagnes ſe reſſentiſſent, dans la plus petite proportion, de l'émigration annuellement répétée qui vient repeupler cette foule d'Employés divers, de Domeſtiques, d'Ouvriers de l'un & de l'autre ſexe, de

(a) Chapitre VI, page 69.

petits Marchands forains *(b)*, que nous mettons en action dans la Capitale, il eſt hors de doute que cette ſeule colonie de citadins, loin d'être pour nous, comme elle l'eſt pour l'Étranger qui n'y eſt pas intéreſſé, un ſujet d'admiration, ne ſeroit bien véritablement pour la ſuite des temps qu'un ſujet d'alarmes. Quelques Cours ſouveraines ont éprouvé ce ſentiment; peut-être y ont-elles été fondées momentanément : dans leur Juridiction, elles ſe ſont occupées des moyens d'obvier aux ſuites inévitables d'un pareil malheur. Le Parlement de Dijon dans des remontrances du 9 Janvier 1767; le Parlement de Bordeaux, dans le diſpoſitif d'un arrêt du 27 Février 1765, ſe ſont plaints de la dépopulation qui ſe faiſoit ſentir dans leur reſſort : ce dernier Parlement a ordonné en conſéquence de trois en trois ans, un recenſement dans toutes les villes de ſon reſſort, de tous les habitans de leurs juridictions, ſoit hommes, ſoit femmes, maiſons religieuſes, penſionnaires, domeſtiques de ces maiſons, hôpitaux & établiſſemens de charité, manufactures, maiſons de forces, domeſtiques qui y ſont employés; en un mot l'opinion répandue de dépopulation, a donné lieu à des ouvrages utiles ſur les cauſes de ce mal trop généralement regardé comme avéré, & (dans le cas où il ſeroit conſtaté) ſur les moyens d'en arrêter le progrès. Les obſervations faites de tous côtés, & ſoigneuſement à ce qu'il paroît, raſſurent ſur le point de fait, en ſuppoſant même que la population de la Capitale ſoit de deux ou trois mille ſujets de moins que le taux auquel on l'a porté : ces obſervations *(c)* prouvent

---

(b) Le nombre ſeul de ſujets en ſervice à Paris, très-difficile à reconnoître en tout temps, ne peut que s'être multiplié conſidérablement, il ſe montoit il y a environ vingt ans (d'après les rôles de la Capitation) à trente-ſept ou trente-huit mille, & ſe trouvoit en 1754 (d'après M. l'abbé Expilly, *tome V*) de quarante-trois mille ſix cents quatre-vingt-dix-neuf : M. Maiſſance porte ce même nombre en 1754, à trente-ſept ou trente-huit mille, *chapitre VII, queſtion VII, page 114.*

(c) En 1770, feu M. l'abbé Terray, Contrôleur général des Finances, pour avoir une connoiſſance à peu-près exacte & certaine du nombre des habitans du royaume, demanda, de la part du feu Roi, à M.[rs] les Intendans, les états des naiſſances, mariages & morts de

que la population des provinces eſt augmentée dans une progreſſion marquée; ce qui d'abord tranquilliſe ſur le grand nombre de ſujets qui quittent les campagnes pour venir à Paris. Si l'on ſe rappelle maintenant cette dévaſtation ſpontanée des habitans de la terre, ſupputée par quelques Écrivains à ſon dernier période dans dix ſiècles, & qui doit faire régner de proche en proche ſur toute la ſurface du globe le plus profond ſilence, il eſt clair que la France n'en préſente point l'annonce: l'aurore du ſiècle d'Auguſte n'en ſera point, dans l'hiſtoire à venir, la première époque; au contraire, tandis que pour la ville de Londres & pour une partie de l'Angleterre, la population a éprouvé, d'après les calculs de quelques Obſervateurs, un déchet ſenſible *(d)* depuis un temps aſſez ſoutenu, pendant ce même temps, la différence des naiſſances aux morts, qui va toujours en croiſſant à Paris & dans les provinces, laiſſe apercevoir que la population & de la Capitale, & de tout le royaume, eſt conſidérablement augmentée.

Quoique mon travail embraſſe uniquement le tableau de la population de Paris, il y a un rapport trop direct, une dépendance trop réelle entre cette population de la Capitale & la population du reſte du royaume, pour que je puiſſe me diſpenſer en paſſant de les rapprocher l'une de l'autre; cette recherche de comparaiſon intéreſſe d'ailleurs évidemment l'humanité entière, & la félicité publique; on ne doit pas être ſurpris que depuis quelques années, pluſieurs Citoyens eſtimables s'occupent de cette ſpéculation: je ne ferai encore

toutes les généralités; ils ont été publiés ſoigneuſement dans la Gazette du Commerce, où ils forment un enſemble des plus intéreſſans pour des recherches, qui, de même que ces différens états, ne peuvent que ſe perfectionner avec le temps: il n'eſt point indifférent de faire remarquer, que le nombre des morts des enfans peut être ſoupçonné ſupérieur à celui porté dans ces états; il eſt permis de préſumer les Curés de campagnes inexacts à en tenir regiſtre, l'exrait mortuaire des enfans n'étant d'aucunes conſéquence dans les actes de la ſociété civile, & étant rarement demandé.

(d) D'après le docteur Price, entr'autres, dans ſon Eſſai ſur l'état de Londres & ſa population, & dans ſon Traité des payemens réverſibles, contredit, à la vérité, par pluſieurs Écrivains. *Voyez l'état préſent de la population d'Angleterre & du pays de Galles.*

usage que de leurs recherches & de leurs travaux; il ne sera aucunement nécessaire que j'y ajoute du mien.

Un Ouvrage, dans lequel l'induction de population augmentée dans les provinces se trouve développée *(e)*, mérite d'autant plus d'entrer en considération, que l'Auteur, à portée de connoître trois riches provinces de France, ne s'est attaché dans son travail qu'aux faits essentiels qui assurent le nombre des habitans dans chacune de ces provinces, & qu'il a soigneusement compensé tout ce qui pouvoit jeter de l'incertitude sur l'inexactitude de ses calculs, pour chaque généralité sur laquelle il a fait ses opérations; généralités d'Auvergne, de Lyon & de Rouen. Du nombre des naissances, mariages & morts en dix ans de temps dans toutes les villes, bourgs & paroisses de ces généralités, M. Maissance a composé une année commune; il s'est procuré en même temps des dénombremens complets d'habitans, *tête par tête,* d'un grand nombre de villes, de bourgs & de paroisses de ces mêmes généralités *(f)*; en soixante-deux ans, il a trouvé la population augmentée de plus d'un onzième dans le total de cent vingt-huit paroisses *(g)*; de ses supputations, il conclut que jamais

---

(e) Recherches sur la population des généralités d'Auvergne, de Lyon & de Rouen, & de quelques provinces & villes du royaume, avec des réflexions sur la valeur du blé, tant en France qu'en Angleterre, depuis 1674, par M. Maissance, Receveur des Tailles de l'élection de Saint-Étienne; *Paris, in-4.° 1766.* Cet Ouvrage se trouve cité avec les éloges qu'il mérite dans le Supplément au tome IV de l'Encyclopédie, imprimé en 1776, au mot *Population.*

(f) Cette manière de compter tête par tête, semble plus sûre pour ce qui s'appelle dénombrement, à l'effet de connoître simplement la population, que par feux ou par familles, dont l'énumération est toujours sujette à beaucoup de difficultés, d'infidélités, de longueurs, de dépenses, & même d'inconvéniens; d'ailleurs, le nombre des naissances dans une ville, pris sur l'année commune, donne une base certaine pour connoître le nombre de ses habitans, & peut tenir lieu de dénombrement.

(g) Il remarque, d'après M. Malouin, que les mois de Juillet, Mai, Juin & Août, sont les dates les plus fréquentes de grossesses, & que ceux qui le sont moins communément, sont d'abord Novembre, ensuite Mars, Avril & Octobre.

Dans son estimation de la durée moyenne de la vie de vingt-cinq à vingt-six ans, il approche du sentiment de M. l'abbé Expilly; M. de Kersbom, en Hollande, M. Halley, Anglois, d'après les Tables de Breslau en Silésie, ont

la population n'a été si grande dans le royaume, & que les Écrivains politiques *(h)* qui ont assuré, depuis quelques années, une dépopulation, n'en ont apporté aucune preuve.

Cette conséquence de M. Maissance, appuyée sur des recherches dans trois généralités seulement, pourra, il faut l'avouer, ne pas être regardée décisive pour tout le reste du royaume, mais elle se trouve confirmée par les relevés de morts & de naissances dans beaucoup d'autres provinces: je me contenterai d'en placer ici quelques-uns.

Le dénombrement, fait en 1759, des habitans d'Avignon, & rapporté par M. l'abbé Expilly *(i)*, montre une augmentation considérable, en le comparant avec celui qui avoit été fait en 1739.

D'après un semblable examen dans le Berri, cette seule province, où il n'y a ni industrie ni commerce, & qui est dans l'intérieur du royaume, s'est trouvée, de 1729 à 1762, augmentée en population d'un dixième ou environ.

Des recherches, faites il y a environ dix ans, sur la population du Dauphiné, ont prouvé que dans cette province, qui comprend une étendue d'à peu-près six cents soixante lieues quarrées, il y avoit à la fin du siècle dernier cinq cents soixante-douze mille trois cents dix-huit habitans; & que dans l'année 1764, on en comptoit six cents trente-quatre mille six cents quarante-un (sans y comprendre la principauté d'Orange) ce qui présente une augmentation bien marquée: en 1769, on a trouvé six cents quarante-cinq mille cinq cents soixante & six pour total d'habitans.

La Gazette d'Agriculture du 30 Mars 1773 *(k)*, porte,

porté la vie moyenne des hommes à quatre-vingt-quatre ans. Il est indispensable d'observer, avec plusieurs Écrivains, que les principes pour évaluer la durée de la vie moyenne, ne doivent pas être les mêmes pour tous les pays; que cette estimation peut varier, à raison d'un pays que l'on habite, à raison de la fortune aisée ou mal aisée, &c. qu'enfin, il ne faut pas prendre une moyenne proportionnelle à volonté, & au hasard.

(h) M. de Mirabeau, dans l'ouvrage intitulé l'*Ami des hommes*.

(i) Au mot *Feu*, *tome III*, *page 124*; cette ville, enclavée dans la France, peut faire nombre parmi les exemples.

(k) Article de Poitiers, du 20 Mars, *page 204*.

qu'il

qu'il est prouvé, par les registres de plusieurs paroisses de campagne du Poitou, que la population y étoit augmentée assez considérablement depuis environ douze ans: il y est remarqué que cet accroissement supposoit un accroissement de subsistances, & que néanmoins il y avoit eu de mauvaises récoltes; d'où l'on infère ou que la culture s'est bien étendue, ou que l'aisance s'est répandue dans ces cantons.

Un état des baptêmes, mariages & sépultures de plusieurs paroisses de Bourgogne, recueilli par M. de Buffon *(l)*, fait voir dans chacun de ces endroits, plus de naissances que de morts; dans un endroit, près d'un tiers ou près d'un quart de plus; dans un autre, un cinquième, un neuvième à peu-près.

Enfin les relevés de différentes provinces du royaume, qui ont commencé à être publiés successivement depuis l'année 1774 dans la Gazette d'Agriculture, & dont nous ferons quelque usage à la suite de la récapitulation des naissances & mortuaires de Paris, depuis 1771 jusqu'en 1780, *(m)*, achèvent de constater également dans tout le royaume une supériorité marquée du nombre des naissances sur celui des morts; ils fournissent conséquemment la preuve d'une population augmentée, non-seulement dans la capitale, mais encore dans la totalité de ces provinces en général *(n)*; accroissement déjà aperçu en 1768, par M. l'abbé Expilly, auquel on a cru pouvoir reprocher, d'avoir porté, mal-à-propos, cet accroissement à trois ou quatre millions depuis deux siècles.

Dès 1561, sous Charles IX, on comptoit vingt millions d'habitans en France, ils ont été évalués à ce taux jusqu'à la révocation de l'Édit de Nantes; le dénombrement fait à la fin du siècle dernier, & l'Ouvrage intitulé *Projet de la Dixme royale*, ne le portoient plus qu'à dix-neuf millions quatre-vingt-quatorze mille cent quarante-six habitans; cependant, d'autres Écrivains en ont encore réduit le nombre à seize millions;

(l) Supplément. tom. IV, *p. 286.*

(m) V. Note *a* p. 459 de ce Mém.

(n) Il n'est pas indifférent d'observer, que cela est également reconnu par les Savans d'Angleterre, qui ont tourné leurs spéculations sur la France. *Essai sur la Population de l'Angleterre, &c. par le Doct. Wales.*

c'étoit une idée reçue dès 1726, ce qui, ſans doute, a fait naître l'idée de dépopulation ; M. l'abbé Expilly le ſuppoſe de vingt-deux millions quatorze mille trois cents cinquante-ſept, & de vingt-un millions au moins *(n)*. Les différens tableaux de notre population, auſſi curieux qu'intéreſſans, dont j'ai parlé, & ſur leſquels j'ai fixé mon attention, me paroiſſent donner une grande vraiſemblance à cette ſupputation de M. l'abbé Expilly, à l'eſtimation de M. de Buffon, qui trouve en France vingt-un millions ſix cents ſoixante-douze mille ſoixante-dix-ſept perſonnes, & peut-être encore aux réſultats des rapports des Intendans des Généralités, d'après leſquels la population du royaume monte à vingt-quatre millions de perſonnes; ce nombre, en même-temps, s'accorde avec les réſultats trouvés par M. Moheau, dont l'avis eſt que l'on doit compter dans toute la France vingt-trois millions cinq cents mille ou vingt-quatre millions d'habitans en France *(o)*: le docteur Price, eſtime auſſi que la population de la France ne peut pas être au-deſſous de vingt-cinq millions, & il obſerve que les naiſſances excèdent, tous les ans, les morts d'un ſeptième : tous ces réſultats, preſque ſemblables, donnent une certitude raiſonnée qu'il exiſte annuellement dans les provinces du royaume, un accroiſſement quelconque de population (qui peut être à peu-près d'un neuvième en ſoixante-quatorze ans) ſelon l'eſtime de M. Moheau *(p)*.

Ainſi, à juger pour l'inſtant, ſoit par différentes eſtimations, ſoit par pluſieurs provinces priſes ſéparément, il eſt tout au moins plus que prouvé, & c'eſt eſſentiellement mon objet,

(n) Dictionnaire hiſtorique, géographique & politique des Gaules & de la France, au mot *Feu*, *page 123*, tome III, imprimé en 1764.

(o) Depuis la lecture de ce Mémoire, du 14 Avril 1779, les Papiers publics ont fait mention du Tableau préſenté au Roi, par M. l'abbé Expilly, le 4 du mois d'Août, dans lequel l'état des habitans de la France, eſt, à ſon eſtime, de plus de vingt-quatre millions dans les trente-deux Généralités, & le nombre des habitans de Paris, à ſix cents mille. *Annales politiques*, *tome VI*, *n.° XLIV*; *Mercure de France*, *Septembre*, *1779*, *page 235*.

(p) Chapitre XIII, *page 273*.

que la dépopulation du royaume n'est point une chose de fait, qu'elle n'a été estimée par les personnes qui l'ont annoncée, que d'après quelque province en particulier, où la chose a pu ou dû être ainsi. En un mot, il paroît d'un autre côté, que depuis environ quarante ou cinquante ans, le nombre des personnes vivantes, à Paris, est augmenté.

Voudroit-on dans ce moment ne regarder l'induction d'une population augmentée dans le royaume, à un point qui ne s'étoit pas encore vu, ou qui n'avoit pas été remarqué, que comme une assertion hardie ou forcée, comme un aperçu dénué de toute l'évidence qu'il seroit naturel d'y desirer, pour donner lieu à des recherches certaines, pour servir utilement de base à des spéculations politiques? Voudra-t-on douter de l'exactitude des opérations employées à reconnoître cet accroissement de population? Soit, on conviendra même, comme l'observe judicieusement M. de Buffon, qu'en travaillant, & en raisonnant sur cette matière, on est sujet à se tromper, & même à tirer de fausses inductions des rapports que présentent les tableaux de mortalité *(q)*: mais on ne peut se refuser à une conséquence bien simple, savoir, que de tout l'ensemble, dont nous ne donnons ici que l'esquisse générale, (même en prenant le terme moyen de la plus

(q) Il est difficile d'établir une règle de proportion entre le nombre des vivans & celui des morts; la règle de trente-cinq vivans contre un mort, est trop foible pour les habitans de la campagne, & ne peut être généralement adoptée pour connoître la population réelle & existante de Paris: un Écrivain, qui ne s'est point nommé, a donné, dans la Gazette d'Agriculture, *année 1777, n.° 80*, comme un moyen sûr, une règle de proportion entre le nombre des naissances & celui des habitans existans; il rapporte plusieurs exemples, par lesquels il se propose de prouver que cette proportion est de 1 à 26, sur la totalité du royaume & d'une grande province, contre le sentiment de plusieurs Auteurs qui estiment cette proportion à 28.

Le Rédacteur de cette Feuille périodique, observe à ce sujet, que la recherche faite par M. de Buffon, pourroit servir de preuve; que cette proportion de 1 à 28 est effectivement celle qui approche le plus de la vérité; en effet, poursuit le Rédacteur, dans les paroisses dénombrées par M. de Buffon, & citées précédemment s'est trouvé neuf mille trois cents quarante-trois habitans de tout sexe & de tout âge: l'année commune des naissances dans les mêmes paroisses monte à 336; ce

forte & de la plus foible ſupputation *(r)*) il réſulte une ſomme conſidérable de probabilités *(ſ)*, qui rend plus que problématique l'opinion de dépopulation dans le royaume; en un mot, il eſt permis d'adopter par préférence des obſervations nombreuſes, & multipliées de tous côtés, qui, par des réſultats preſque d'accord, établiſſent uniformément un accroiſſement de population, dont le dire de pluſieurs Écrivains éloignoit toutes les idées.

---

nombre, multiplié par 28, donne 9408, ce qui approche beaucoup des neuf mille trois cents quarante-trois habitans exiſtans réellement dans leſdites paroiſſes. Il ſemble néanmoins qu'il y auroit lieu de croire que la règle de vingt-huit habitans contre une naiſſance, eſt en général trop forte, du moins à en juger par les recherches faites par l'Académie de Dijon, en 1770, ſur la population de Bourgogne; cette Compagnie s'étant procuré le relevé des naiſſances, des morts & des mariages, & le dénombrement exact des habitans de cinquante paroiſſes, priſes indifféremment dans neuf bailliages de la province, elle a trouvé que l'année commune des naiſſances de ces cinquante paroiſſes, multipliée par 25 $\frac{1}{4}$, donnoit, à 7 près, le nombre des habitans compris dans les dénombremens.

(r) Une population nombreuſe qui paroît d'abord devoir être regardée comme la première de toutes les richeſſes d'un État, feroit-elle effrayante, feroit-elle une charge, car les deux contraires ſont mis en queſtion! l'augmentation des habitans d'un royaume, eſt-elle l'annonce de la proſpérité d'un État, comme la diminution ſemble être une preuve de la pauvreté d'une Nation! ces diſcuſſions ſont étrangères au Phyſicien, je les abandonne aux perſonnes capables de les rapporter fructueuſement à des ſyſtèmes d'adminiſtration. Afin d'aider à juger, par la ſuite des temps, des différences dignes de remarque, dans la population des provinces, j'ai jugé utile de conſigner dans mon nouveau travail, un dénombrement des habitans des provinces du royaume, en 1726; on le trouvera à la ſuite de la récapitulation des baptêmes, mariages & mortuaires de Paris, depuis 1771 juſques en 1780 incluſivement : ce dénombrement, rapproché de l'état que je ferai ſuivre (dans le même volume pour l'année 1781) de la population des provinces du royaume, pendant les années 1776 & 1777, & dont on a fait une année commune, donnera, dans tous les temps, un point de comparaiſon intéreſſante.

(ſ) Cette population, telle qu'elle eſt établie par les Intendans, a engagé un Écrivain dans une ſupputation curieuſe, dont le réſultat peut mériter d'être mis ici, en oppoſition avec le ſentiment de M. de Monteſquieu. En ſuppoſant pour l'inſtant, que la population ainſi augmentée, pût s'accroître dans une même proportion, ſans être troublée par une guerre longue, pénible, en pays éloigné de nos foyers, par quelqu'épidémie univerſelle, &c. L'Auteur trouve que cette population ſe trouveroit doublée en moins de deux ſiècles & demi.

Une découverte auſſi intéreſſante pour la ſociété, je veux dire cette génération multipliée, reconnue par pluſieurs perſonnes à la fois, ſe rapporte dans ſon principe & dans ſa continuité, à quelques cauſes générales, dignes d'exciter la curioſité. Il ne peut être qu'utile d'en reconnoître l'enchaînement pour les entretenir & les étendre s'il ſe peut ; cette recherche eſt d'autant plus intéreſſante, qu'en remontant aux ſources, deſquelles peut dériver ſenſiblement l'accroiſſement de population dans un royaume, on trouve pour la France des motifs plus que ſuffiſans, pour conclure, avec fondement, que l'aſſertion de population augmentée, & celle de diminution de mortalité depuis près de cinquante ans, nonſeulement à Paris, mais même dans les provinces, ne ſont point de pures chimères. On ne doit pas ſe diſſimuler ici pluſieurs chefs d'une ſeule & même objection, qui infirment la vérité de cette population augmentée, de cette diminution de mortalité, de cette longævité, ſoit dans les provinces, ſoit dans la capitale : Comment, diront quelques perſonnes, comment, ſur-tout pour Paris, accorder ces trois faits comme inconteſtables, avec la dépravation exceſſive des mœurs, avec le luxe, la débauche, qui règnent dans les capitales ? Pour les provinces eſt-il plus facile de concilier les faits avec la misère qui y eſt répandue généralement: Car ſans oſer convenir de ces maux, parce qu'ils ſont trop fâcheux, il n'eſt cependant pas poſſible de nier ici les apparences pour les premiers reproches, & de paſſer ſur le bruit public pour le dernier. Comment enfin, ſe perſuader de cette population vivace dans Paris, à laquelle on objecte encore quelquefois la conſtitution délicate, valétudinaire de la génération actuelle, nullement comparable, ſelon le dire de quelques perſonnes, en force & en vigueur, aux habitans de cette même capitale, dans le ſiècle dernier, ou tout au moins, fort inférieure aux habitans de la campagne.

Ces différens fléaux réunis, ſuffiſent pour faire ſouffrir un dépériſſement notable dans l'eſpèce, & pour répandre au moins un doute très-fondé ſur la réalité de l'eſpèce de fait

physique relatif à la population, dont nous croyons pouvoir nous féliciter avec des Écrivains estimables; les observations que ces vices fournissent contre les conclusions de ce Mémoire, ne sont point sans valeur, elles méritent, par cette raison, d'être traitées & approfondies sérieusement.

La discussion, dont quelques-unes sont susceptibles, n'est pas de ma compétence; le sujet ne pouvoit manquer de se trouver du goût de quelques personnes en état de s'en acquitter mieux que je ne pourrois le faire; il vient d'être traité, d'une manière intéressante, par M. Moheau *(t)*; d'ailleurs, ce qui touche le physique sur ce point, doit seul m'occuper; je ne suis à portée d'assigner que les causes de santé, qui ont pu concourir à tout ce qui en forme les apanages, & que mon état me met à même d'apprécier. L'Auteur de la lettre qui m'a été adressée dans le Mercure de France, en 1777, M. Moheau, dans l'Ouvrage qu'il vient de publier, & d'autres Auteurs, en ont déjà aperçu plusieurs; je crois pouvoir y en ajouter quelques-unes, qui ne se sont point encore présentées à l'idée des personnes qui ont fourni leurs vues sur ce sujet; cet article peut former à part la matière d'un Mémoire, j'attendrai, pour le communiquer dans nos Séances particulières, que la publication de celui-ci ait mis l'objet à même d'être encore plus éclairci, infirmé ou constaté de nouveau par quelques observations ultérieures, dont je n'ai pas de connoissance quant à présent.

(t) Qui satisfait en grande partie aux questions importantes, politiques, morales & physiques, dépendantes de cette recherche particulière, & qui peuvent servir de base à une opinion vraisemblable sur les causes générales de la population.

OBSERVATION SUR UN ACIDE GLACIAL,

Obtenu par la diſtillation d'un mélange d'Acide nitreux fumant & de Charbon embraſé & réduit en poudre.

Par M. CORNETTE.

MRS LAVOISIER & BUCQUET, ont préſenté à l'Académie, il y a quelques jours, un flacon d'huile de vitriol glacial, retiré à un très-grand feu, de la décompoſition du nitre par le colcotar. Comme les expériences que je préſente aujourd'hui, quoique faites d'une manière différente, paroiſſent ſe rapprocher beaucoup de celle de ces Académiciens, je crois devoir mettre cette note en tête de cette Obſervation, déclarant ne vouloir point leur enlever l'honneur de leur découverte, mais prenant occaſion de-là, de faire part à l'Académie d'un travail fait depuis long-temps ſur cet objet, que je ne comptois pas lui communiquer ſitôt.

OBSERVATION.

J'AI parlé dans le Mémoire que j'ai lû l'année dernière à l'Académie, ſur le Sel ammoniacal nitreux, de la diſtillation de l'acide nitreux ſur le charbon; j'ai démontré que cette ſubſtance ne ſouffroit pas d'altération marquée de la part de cet acide, puiſqu'après cette opération elle avoit conſervé ſa couleur noire, & ſon inflammabilité : comme je ne m'étois ſervi pour faire cette expérience que du charbon ordinaire, je réſolus quelque temps après de la répéter de nouveau, mais avec du charbon bien ſec, c'eſt-à-dire, avec du charbon embraſé réduit en poudre ſur le champ, & de l'acide nitreux fumant, préparé ſelon la méthode de Glauber, perſuadé que je retirerois de cette ſeconde expérience, faite de cette manière,

quelques résultats différens de la première : le succès surpassa mes espérances, car je ne m'attendois pas à obtenir d'un pareil mélange, un produit semblable à celui que je vais décrire.

Je mis dans une cornue de verre un gros de charbon ainsi préparé, sur lequel je versai une once d'acide nitreux fumant; ce mélange s'échauffa beaucoup, & fit monter le thermomètre de 25 degrés au-dessus de la glace, la température étant ce jour-là à 10; je plaçai cette cornue sur un bain de sable, au col de laquelle j'ajustai une alonge ou cylindre de verre, dont l'extrémité entroit dans un récipient qui pouvoit contenir environ dix pintes d'eau; je laissai ce mélange en digestion du soir au matin, pour que le charbon fût mieux pénétré par l'acide; pendant ce court espace de temps, ce dernier s'étoit un peu coloré, & avoit dissout une petite portion de charbon; je procédai ensuite à la distillation par une chaleur fort douce, il se dégagea presque aussitôt beaucoup de vapeurs rutilantes, qui obscurcirent les vaisseaux; je conduisis le feu avec beaucoup de ménagement, afin de mieux examiner ce qui se passeroit pendant cette distillation; lorsque l'acide fut passé entièrement, ce que je reconnus facilement par l'éclaircissement de l'alonge, j'aperçus qu'il s'élevoit du fond de la cornue, une poudre blanche très-fine & très-subtile, qui, en s'attachant à ses parois, formoit la cristallisation la plus belle & la plus agréable qu'on puisse voir; une partie étoit disposée en longues aiguilles, & l'autre représentoit des rinceaux, charmans par leur arrangement : je me hâtai de déluter les vaisseaux, parce que je commençois à m'apercevoir, à la vérité un peu trop tard, que cette matière se liquéfioit facilement par la chaleur plus forte que j'avois donnée, & qu'elle se confondoit avec la liqueur contenue dans le récipient; je recueillis de cette substance, à l'aide d'un tube de verre, le plus qu'il me fut possible, que je renfermai dans un flacon très-sec, car autrement elle se seroit convertie en liqueur; je passai de l'eau distillée sur l'autre portion qui étoit restée dans l'alonge, & que je n'avois pu détacher,

détacher, il se fit aussi-tôt un bouillonnement assez considérable avec dégagement de vapeurs d'acide nitreux, & cette dissolution, faite dans de justes proportions, rendit sur le champ l'eau d'une belle couleur bleue, comme celle qui résulte d'un mélange d'acide nitreux & d'eau, ainsi que l'ont démontré plusieurs habiles Chimistes; je fis évaporer dans une capsule de verre, la portion qui avoit été dissoute, elle laissa dégager, dans les premiers momens, une forte odeur d'acide nitreux, mais il me parut que cet acide y adhéroit fort peu, puisqu'à peine la liqueur fut-elle bien échauffée, qu'il ne s'en dégagea plus aucune. Je continuai l'évaporation jusqu'à la consomption presque totale de l'humidité, il me resta au plus cinq ou six gouttes de liqueur très-acide, sans odeur, que je reconnus pour de l'acide vitriolique, par la combinaison que j'en fis avec les cristaux de soude: cet acide glacial, contenu dans le flacon, se liquéfie très-facilement à une douce chaleur, & offre un spectacle assez agréable; le flacon, qui est clair & transparent, se remplit aussi-tôt de vapeurs rouges, & les vapeurs disparoissent presqu'entièrement lorsque cette substance a repris sa solidité. Il y a plus de deux ans que M. de Lassone a été témoin de cette expérience, & il y a au moins dix-huit mois que M. le Comte de Milly, de cette Académie, se trouvant à Versailles, je la lui répétai avec le même succès: cet acide glacial, exposé sur les charbons ardens, se dissipe en vapeurs blanches, s'échauffe & bouillonne avec l'eau, & si on le combine dans cet état de siccité avec l'alkali fixe, on en retire bien à la vérité du tartre vitriolé, mais il se trouve toujours mêlé avec un peu de nitre; je crus donc, d'après cet examen, pouvoir regarder cet acide comme un acide vitriolique glacial, uni à une portion d'acide nitreux, mais rendu ainsi glacial par le gaz ou l'air fixe qui s'étoit dégagé du charbon. Ce qui étaye ma conjecture, c'est qu'en employant séparément de l'acide nitreux très-pur, ou de l'huile de vitriol, on n'en obtient point; preuve non équivoque que le concours de l'acide nitreux est essentiel à la production de cet acide; il est donc visible que cette huile de vitriol glacial que l'on

obtient dans cette opération, ne doit être attribuée qu'à de l'acide vitriolique qui altéroit préliminairement l'acide nitreux fumant que j'avois employé, & dont il eſt toujours altéré de quelque manière qu'il ſoit préparé, à moins qu'il ne fût rectifié: cependant, pour m'aſſurer davantage de ce fait, je réſolus de faire l'expérience ſuivante; je chauffai ſur le charbon reſté dans la cornue, & qui étoit encore un peu chaud, l'acide que j'avois obtenu, il étoit aſſez fumant, & paroiſſoit très-propre pour l'expérience que j'avois projetée; un inſtant après le mélange, une portion du charbon, par le contact de cet acide, s'embraſa dans la cornue; j'avoue que je fus un peu effrayé de cet embraſement ſi ſubit, & que dans l'incertitude où j'étois de voir arriver une exploſion, je balançai ſi je devois jeter la cornue, mais la curioſité l'emporta, & ma crainte s'évanouit promptement, car peu de temps après l'ignition ceſſa. Je ferai obſerver que tout cela ſe paſſa ſans mouvement, & que la chaleur fut très-peu conſidérable; je procédai à la diſtillation avec un appareil ſemblable à celui de la première expérience, mais il ne s'attacha point aux parois de l'alonge de cet acide glacial, parce que l'acide nitreux que j'avois employé ne contenoit plus d'acide vitriolique, & en avoit été dépouillé entièrement dans cette première diſtillation; le charbon reſté dans la cornue me parut différer un peu du précédent, il étoit diviſé par petites maſſes, & la portion qui avoit été en contact avec les parois de ce vaiſ-ſeau, en avoit pris le luiſant & le poli: il eſt donc conſtant que la production de cet acide ne dépend que de l'acide vitriolique contenu dans l'acide nitreux, & que lorſqu'il en eſt dépouillé il n'en fournit plus. Mais réfléchiſſant ſur ce qui venoit de ſe paſſer dans cette experience, je crus devoir examiner ſi l'acide nitreux coopéroit eſſentiellement à la production de cet acide, ou ſi avec de l'acide vitriolique ſeul je pourrois obtenir les mêmes réſultats; je répétai pour cet effet une expérience déjà connue, indiquée dans la préface du Manuel de Chimie de M. Baumé, c'eſt-à-dire, je diſtillai de l'acide vitriolique concentré ſur du charbon

en poudre; les réſultats furent les mêmes que ceux indiqués par cet habile Chimiſte, mais je ne retirai point de cette expérience l'acide glacial, qui avoit été l'objet de mes recherches. Je fis cette expérience de pluſieurs manières, tantôt j'employai moins de charbon, tantôt des matières phlogiſtiques d'une autre nature, mais je ne retirai rien qui pût répondre à mon but; quoique cette expérience ne m'ait point réuſſi, elle me conduiſit à en faire une autre, dans la vue de m'aſſurer ſi le charbon lui-même contribuoit eſſentiellement à la formation de cet acide glacial, ou ſi avec l'acide nitreux ſeul & l'acide vitriolique, je pourrois également en obtenir.

Je mis dans une cornue de verre quatre gros d'acide nitreux fumant, & autant d'huile de vitriol concentré, les vapeurs rutilantes furent auſſi-tôt abſorbées par l'acide vitriolique, & l'acide nitreux, qui étoit très-coloré, devint, par le mélange, clair & limpide; la diſtillation ne m'offrit rien de particulier, & quoique j'euſſe pouſſé le feu ſur la fin avec aſſez de violence, il ne ſe fit aucune ſublimation aux parois de l'alonge; il me reſta dans la cornue environ les trois quarts de l'acide vitriolique que j'avois employé, n'ayant ſouffert aucune altération; l'acide qui étoit dans le récipient ayant été rediſtillé de nouveau ſur du charbon en poudre, me fournit en très-bonne quantité de l'acide glacial, abſolument ſemblable à celui que j'avois obtenu dans les expériences précédentes; on peut ſe procurer de cet acide en aſſez grande quantité, ſi l'on veut procéder à la diſtillation dans les proportions de deux gros de charbon, d'un gros d'acide vitriolique concentré, & de trois gros d'acide nitreux fumant; il me reſtoit encore pour compléter ce travail, une expérience à faire, c'étoit de m'aſſurer ſi d'autres matières inflammables que le charbon pourroient convenir également à la production de cet acide glacial; le ſoufre fut la ſubſtance que j'employai, parce qu'étant compoſé lui-même d'acide vitriolique dans l'état de ſiccité, je crus qu'il pourroit favoriſer cette expérience, & me conduire à quelques nouvelles découvertes.

Je mis dans une cornue de verre deux gros de fleurs de soufre avec deux onces d'acide nitreux fumant, je plaçai cette cornue sur un bain de sable que je chauffai par degrés, il s'éleva d'abord beaucoup de vapeurs rutilantes qui obscurcirent bientôt le récipient, je ménageai le feu, & je continuai la distillation fort lentement; lorsque la moitié ou environ de l'acide fut passée, je délutai le balon, je versai la liqueur qu'il contenoit dans un flacon de cristal; cet acide, de jaune qu'il étoit, avoit pris une couleur verte, & avoit entraîné avec lui quelques particules sulfureuses qui nâgeoient à la surface; je continuai la distillation jusqu'à siccité, l'acide qui passa ensuite n'avoit pas acquis la même couleur verte que le premier, il étoit légèrement citrin, & paroissoit n'avoir souffert aucune altération; le soufre resté dans la cornue avoit perdu un peu de sa couleur, il étoit encore très-acide, & laissoit dégager une forte odeur d'acide sulfureux volatil: comme cette expérience avoit été faite avec de l'acide nitreux mêlé d'acide vitriolique, je résolus de la répéter de nouveau avec de l'acide nitreux très-pur, afin de m'assurer si l'acide sulfureux que le soufre avoit laissé dégager provenoit ou de l'acide vitriolique contenu dans l'acide nitreux, ou de la décomposition du soufre lui-même; mes doutes furent bientôt éclaircis, car j'obtins du résidu de cette nouvelle opération, la même odeur d'acide sulfureux volatil, comme je l'avois eu à l'expérience précédente, ce qui me prouva que l'acide nitreux agissoit sur lui, & le décomposoit en partie. Je suis parvenu, en répétant à plusieurs reprises cette opération, à décomposer presque totalement le soufre, l'acide nitreux se chargeoit à chaque cohobation d'acide sulfureux volatil, & j'ai toujours obtenu constamment de sa combinaison avec l'alkali végétal, du sel sulfureux de Stalh.

Il résulte de ces expériences, 1.° que l'acide glacial que l'on obtient de cette opération, n'est autre chose que de l'acide vitriolique qui altéroit préliminairement l'acide nitreux; 2.° que l'acide nitreux lui-même contribue essentiellement à la formation de cet acide glacial, puisque les deux substances,

employées séparément, ne peuvent point en fournir; 3.° enfin, que c'est du gaz qui se dégage du charbon, & même de celui contenu dans l'acide nitreux, d'où me paroît dépendre la forme concrète que prend cet acide.

OBSERVATION SUR LE VITRIOL DE MERCURE.

Par M. CORNETTE.

Présenté en 1779. Lû le 14 Juin 1781.

LES Chimistes entendent par Vitriol de Mercure, la combinaison de l'acide vitriolique avec cette substance métallique; mais pour que cette combinaison puisse se faire, elle exige l'action de l'acide vitriolique concentré & bouillant sur le mercure; pour le préparer, on met dans une cornue de verre vingt-quatre onces d'acide vitriolique concentré, sur une livre de mercure coulant; j'ai observé que cette quantité d'acide étoit trop forte, puisque je suis parvenu à faire cette opération avec vingt onces seulement; on fait chauffer par degrés ce mélange, il s'élève d'abord quelques vapeurs blanches, qui ont une forte odeur d'acide sulfureux volatil, il se passe ensuite dans la cornue un bouillonnement ou effervescence assez vive, qui continue à se faire jusqu'à l'entière dissolution du mercure : il se dégage, pendant tout le temps de cette opération, beaucoup d'acide sulfureux volatil, sous forme de gaz, dont une grande partie se dissout dans l'eau, & de laquelle j'ai retiré des cristaux de sel sulfureux de Stalh, en la saturant d'alkali fixe; enfin, il reste au fond de la cornue une masse blanche saline, que l'on appelle *Vitriol de mercure.*

Quelques Chimistes ont avancé que ce sel, exposé dans une cornue, à une chaleur très-forte, se décomposoit, que la plus grande partie du mercure se réduisoit en mercure coulant, & qu'une très-petite partie seulement se sublimoit. Quelque déférence que j'aie pour les Auteurs de cette assertion,

je crois ne devoir pas être entièrement de leur avis, l'expérience m'a démontré que les choſes ſe paſſoient différemment, car j'ai obſervé que ce ſel, expoſé à un feu violent, ſe ſublimoit preſque en entier, & qu'une très-petite partie ſeulement étoit décompoſée.

J'ai mis dans une cornue de verre une demi-once de vitriol de mercure, je l'ai expoſé à un feu violent & capable de faire rougir la cornue, la plus grande partie de ce ſel s'eſt ſublimée au pourtour de ce vaiſſeau, ſans avoir ſouffert aucune altération, il ne s'étoit ſeulement élevé qu'une petite quantité de poudre griſe, qui n'avoit plus beſoin que du frottement pour paroître en mercure coulant, mais il n'en étoit point paſſé dans le récipient que j'avois adapté au col de ce vaiſſeau: j'ai répété quatre fois cette expérience, mais toujours avec les mêmes réſultats, c'eſt-à-dire, que toujours la quantité de vitriol de mercure ſublimé, a excédé en poids celui du mercure revivifié; d'une demi-once de ce ſel métallique, j'ai obtenu conſtamment trois gros de matière ſaline ſublimée, & une poudre griſe, qui, comme je l'ai déjà dit, n'avoit plus beſoin que du frottement pour paroître en mercure coulant; cette expérience, répétée à l'appareil pneumato-chimique, a donné un peu de gaz déphlogiſtiqué & beaucoup d'air acide ſulfureux. Je me ſuis aſſuré, par d'autres expériences que j'ai faites ſur les précipités de mercure, que ſi l'on ſe ſert pour faire le vitriol de mercure, des précipités que l'on obtient de ſa diſſolution, par l'acide nitreux, avec l'alkali fixe ou volatil, il ne paſſe point de mercure coulant, comme à l'expérience précédente, car tout le ſel qui eſt réſulté de cette combinaiſon, s'eſt ſublimé en entier; je crois cependant qu'il eſt des cas où cette expérience pourroit offrir quelques variétés, mais il me ſemble auſſi que cette différence pourroit bien dépendre de la nature des vaiſſeaux, des quantités qu'on auroit employées, & même encore des moyens que l'on auroit pratiqués pour la conduite de cette opération.

MÉMOIRE

Sur la décomposition, par l'acide marin, de plusieurs Sels vitrioliques & nitreux, à base métallique.

Par M. CORNETTE.

LES Chimistes conviennent assez généralement que l'acide marin a par-dessus les autres acides, la propriété de décomposer certains Sels à base métallique; à cet égard, on a borné son action aux métaux blancs, tels que l'argent, le plomb, le mercure & le régule d'antimoine; mais je crois qu'on n'a point cherché à examiner si l'acide marin étendroit plus loin son pouvoir, & s'il seroit susceptible de produire les mêmes altérations sur les autres sels métalliques: les expériences que j'ai faites sur cette matière, m'ont mis à portée de découvrir, que presque tous les autres sels métalliques étoient soumis à la même loi, & que si ce phénomène n'a point été aperçu par *Kunckel*, ou par les autres Chimistes qui ont suivi sa doctrine, c'est que ces sortes de décompositions présentent plus de difficultés, & exigent, pour y parvenir, des moyens différens de ceux qui ont d'abord été employés.

Lû à l'Académie à l'Assemblée publique le 14 Avril 1779. Relû le 14 Juin 1780.

Les Chimistes varient encore beaucoup sur les propriétés de l'acide marin, les uns, considérant la difficulté que cet acide éprouve à se combiner avec le phlogistique, ont pensé qu'il n'avoit point ou presque point d'action sur lui; d'autres, ne calculant la force des acides, que d'après leur pesanteur spécifique, ont avancé, que si l'acide vitriolique avoit une action plus marquée sur les corps que les autres acides, cela ne pouvoit dépendre que de ce qu'il étoit susceptible d'une concentration plus grande: j'ai déjà démontré dans plusieurs Mémoires, que l'acide marin avoit une vraie action sur le phlogistique, & qu'employé dans le plus grand état de concen-

tration, & tel qu'il eſt dans la liqueur fumante de Libavius, il ne le cédoit en rien à l'acide vitriolique, même le plus concentré: j'ai auſſi prouvé, que quoique l'acide marin ſoit le plus léger des acides minéraux, il n'eſt cependant pas le plus foible par ſon énergie, puiſqu'il décompoſe tous les ſels neutres à baſe d'alkali fixe & volatil; je vais de plus faire connoître que ce même acide, appliqué dans un état de concentration, a pareillement la propriété de décompoſer, preſque ſans exception, tous les ſels à baſe métallique.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Sur l'Or.

LES Chimiſtes connoiſſent tous le peu d'action que les acides minéraux, employés ſéparément, ont ſur ce métal, lorſqu'il a ſon éclat métallique, mais on ſait que lorſqu'il eſt dans l'état de chaux, c'eſt-à-dire, que lorſqu'il a été diſſout & précipité par une ſubſtance alkaline quelconque, il devient dès-lors ſoluble indiſtinctement dans tous les acides; cette diſſolution cependant n'eſt qu'apparente, car il ſe précipite lorſqu'il eſt expoſé à un léger degré de chaleur: j'ai fait précipiter de l'or diſſout dans l'eau régale par de l'alkali volatil, ce précipité, bien édulcoré, s'eſt très-bien diſſout dans l'acide vitriolique affoibli, & dans l'acide nitreux très-pur; ces deux diſſolutions étoient d'un jaune clair, je les ai ſoumiſes à l'évaporation, dans l'eſpérance d'obtenir du vitriol & du nitre aurifère, mais je n'ai pas tardé à m'apercevoir, ainſi que l'a fort bien remarqué M. Lévis, que l'or n'adhéroit que très-foiblement à ces deux acides, puiſqu'il s'eſt précipité entièrement à la première impreſſion de la chaleur, ce qui nous feroit ſoupçonner, avec M. Tillet, que l'or même en chaux n'eſt point diſſout dans les acides, mais qu'il y eſt plutôt dans un état de ſuſpenſion: cette idée paroît conforme à la remarque qu'a faite M. Schœffer dans ſon Mémoire ſur le Départ, imprimé dans le Recueil de l'Académie de Stockolm, *Tr. fr. p. 299*, que l'eau-forte, dans le départ, peut

peut diſſoudre une portion d'or, mais qu'il faut pour cela qu'elle ſoit très-concentrée, & contenue dans des vaiſſeaux bien bouchés, car, dit-il, auſſi-tôt que l'on vient à ſecouer une eau-forte, qui a ainſi diſſout de l'or, & lorſqu'elle prend le contact de l'air, l'or ſe précipite.

Le peu d'adhérence que l'or a avec les acides, ne m'ayant pas permis d'obtenir les ſels que je m'étois propoſé de faire, on ſent bien qu'il ne m'a pas été poſſible de tenter, avec l'acide marin, les expériences que j'avois projetées.

DEUXIÈME EXPÉRIENCE.

Sur la Platine.

LE précipité de platine, par l'alkali fixe, préſente à peu-près le même phénomène que l'or, relativement à l'acide vitriolique, la diſſolution s'en fait très-bien dans cet acide, mais le métal n'y reſte point, & ſe précipite entièrement pendant l'évaporation; il n'en eſt pas de même de l'acide nitreux, la platine y adhère davantage, car la chaleur n'a point altéré cette diſſolution, de laquelle j'ai retiré un ſel en petits criſtaux rougeâtres, à peu-près comme des grains de ſable.

J'ai fait diverſes expériences pour tâcher de faire tenir la platine à l'acide vitriolique, afin de me procurer du vitriol de platine; le procédé qui m'a le mieux réuſſi, a été d'employer le précipité de platine obtenu par l'alkali minéral, ce qui m'a mis à portée de faire une expérience, dont M. Margraff nie la poſſibilité: ce célèbre Chimiſte, dans ſa Diſſertation ſur la Platine, deuxième volume de ſes Opuſcules, *Tr. fr. page 253*, dit que l'alkali minéral ne précipite point la platine diſſoute dans l'eau régale; ce phénomène a lieu pourtant juſqu'à un certain point, puiſqu'on eſt maître d'obtenir, à volonté, un précipité abondant, ou une liqueur claire & limpide. Voici en quoi conſiſte cette manipulation: ſi l'on verſe ſur une diſſolution de platine affoiblie, de l'alkali minéral en liqueur, il ne ſe fera point de précipité, parce

qu'à meſure qu'il ſe forme il eſt rediſſout par le gaz ou air fixe qui ſe dégage de l'effervеſcence qui réſulte de ce mélange, au lieu que ſi l'on emploie une diſſolution de platine ſaturée & bien rapprochée, il ſe forme ſur le champ un précipité très-abondant, & qui, faute d'eau, ne peut ſe rediſſoudre dans la liqueur ; on parvient facilement à le dépouiller par le lavage des ſubſtances ſalines qu'il contient, pourvu, toutefois, qu'on ait eu l'attention de l'expoſer quelque temps à l'air, afin de faciliter le dégagement du gaz : quoi qu'il en ſoit, le précipité de platine, obtenu de cette manière, eſt plus ſoluble dans les acides, & paroît y adhérer davantage que le précipité ordinaire; je ſuis parvenu à faire avec ce précipité un vitriol de platine, très-déliqueſcent à la vérité, mais ſuffiſant cependant pour faire mon expérience.

Sur une partie de vitriol & de nitre de platine, j'ai verſé trois parties d'acide marin fumant, cet acide étoit très-pur, il peſoit neuf gros vingt-quatre grains, dans une bouteille qui contenoit juſte une once d'eau diſtillée; la diſſolution de ces ſels s'eſt très-bien faite dans cet acide bouillant, & lui a communiqué une couleur jaune, comme celle d'une diſſolution d'or. La liqueur où étoit le vitriol de platine, refroidie, a donné un ſel un peu déliqueſcent, & qui avoit l'acide marin pour baſe, tandis que le nitre de platine a refuſé de donner des criſtaux, parce qu'il s'étoit formé de l'eau régale qui eſt le vrai diſſolvant de ce métal.

Troisième Expérience.

Sur le Vitriol & le Nitre cuivreux.

Je ne m'arrêterai point ici à décrire les moyens dont je me ſuis ſervi pour obtenir ces ſels, car il n'eſt aucun Chimiſte qui ne ſache que pour diſſoudre le cuivre par l'acide vitriolique, il faut employer ce dernier concentré & bouillant; je ferai ſeulement obſerver à l'égard du nitre cuivreux, que c'eſt une erreur de penſer que ce ſel ne criſtalliſe point : j'en conſerve depuis plus de ſix ans en criſtaux bien diſtincts, la plupart

ſont alongés & de forme carrée, & d'autres en lames plates: ce ſel attire puiſſamment l'humidité de l'air, & ne peut ſe maintenir en bon état que dans une bouteille bien bouchée; le procédé pour le faire criſtalliſer eſt ſimple, il conſiſte à prendre une diſſolution de cuivre par l'acide nitreux, de la mettre dans une cornue de verre, & de diſtiller juſqu'à la diminution des trois-quarts ou environ de l'humidité, de laiſſer enſuite refroidir ce vaiſſeau ſans le déluter; pour l'ordinaire, on obtient de cette manière, de très-beaux criſtaux bleus, ſemblables à ceux dont je viens de parler; ſi au contraire on fait évaporer la diſſolution de cuivre à l'air, on aura beaucoup de peine à la faire criſtalliſer, par la raiſon qu'ayant beſoin d'être très-rapprochée pour fournir des criſtaux, elle en attire l'humidité, & dès-lors la liqueur étant trop étendue, la criſtalliſation ne peut plus avoir lieu, à moins qu'on opère dans un temps où l'air ſoit ſec & froid.

Le vitriol & le nitre cuivreux ſe diſſolvent très-promptement & à froid dans l'acide marin; ſi ſur deux gros de chacun de ces ſels on ajoute ſix gros d'acide, cette quantité ſera ſuffiſante pour que la diſſolution ſoit complète; il ſe paſſe dans l'inſtant aſſez de froid pour faire deſcendre le thermomètre de pluſieurs degrés; pour le vitriol de cuivre il n'a été que de cinq, tandis que le nitre cuivreux l'a fait deſcendre de huit degrés, la température étant ce jour-là à 10 au-deſſus de la glace. Si l'on fait bouillir ces diſſolutions, l'acide marin prend ſur le champ une couleur verte, & l'on obtient du refroidiſſement des liqueurs des criſtaux d'un vert clair, & figurés en aiguilles abſolument ſemblables à ceux qui réſultent de la combinaiſon du cuivre par l'acide marin; ce ſel ſe conſerve très-bien dans les vaiſſeaux fermés, j'en ai même tenu pendant aſſez long-temps expoſé à l'air ſans qu'il ſe ſoit humecté ſenſiblement, & que les criſtaux euſſent perdu leur conſiſtance: ces deux expériences prouvent donc que l'acide marin a plus de diſpoſition à ſe combiner avec le cuivre que n'en ont les autres acides, quoique quelques Chimiſtes aient avancé le contraire, & il a encore à cet égard la ſupériorité

ſur l'acide nitreux, qui, de quelque manière que je l'aie traité avec le vitriol de cuivre, n'a jamais pu le décompoſer.

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

Sur le Vitriol de Mars & le Nitre martial.

LA même expérience répétée ſur le vitriol de mars, a eu le même ſuccès, l'acide marin s'eſt emparé du fer, & en a chaſſé l'acide vitriolique; cette diſſolution évaporée m'a donné de beaux criſtaux cubiques, ſemblables à ceux que je me ſuis procuré de la combinaiſon immédiate du fer avec l'acide marin. Le plus grand nombre des Chimiſtes avancent que ce ſel n'eſt point ſuſceptible de criſtalliſation, mais c'eſt encore une erreur que l'expérience peut détruire, & je puis aſſurer qu'il criſtalliſe très-bien & avec aſſez de facilité. Ce ſel eſt d'une couleur verte, mais il ſe ternit bientôt à la ſurface, & ſe convertit en liqueur s'il eſt quelque temps expoſé à l'air. La diſſolution du fer par l'acide marin, n'a pas l'inconvénient de la diſſolution du fer par les autres acides, elle a cela de particulier qu'elle ſe conſerve en bon état & ſans donner aucun dépôt.

Le nitre martial a préſenté plus d'obſtacle pour ſa décompoſition, je ſuis cependant porté à croire qu'elle auroit également lieu comme le vitriol de mars, s'il étoit poſſible de l'avoir ſous forme concrète & criſtalline. Je fonde mon opinion ſur ce qu'en diſtillant la diſſolution de fer, rapprochée avec l'acide marin, il s'eſt dégagé beaucoup d'air nitreux, & il eſt toujours paſſé dans le récipient de l'eau régale, & ſur ce qu'ayant fait une fois deſſécher la matière, ſans cependant la décompoſer, j'ai obtenu de ſon mélange, avec l'acide marin, un magma rempli de petits criſtaux cubiques que j'ai reconnu pour du ſel marin martial.

L'acide nitreux paroît également avoir plus de priſe ſur le fer que l'acide vitriolique, car le vitriol de mars eſt décompoſé par cet acide; il agit ſur lui avec effervescence, & la

liqueur prend ſur le champ une couleur rouge. Cette diſſolution évaporée ne donne plus de criſtaux, mais une matière déliqueſcente analogue à la diſſolution du fer par l'acide nitreux, car j'ai fait beaucoup de tentatives pour obtenir du nitre martial criſtalliſé, mais je n'ai jamais pu y parvenir.

CINQUIÈME EXPÉRIENCE.

Sur le Vitriol & le Nitre de Zinc.

TROIS gros d'acide marin diſſolvent à froid un gros de vitriol de zinc, la diſſolution eſt d'un jaune clair, ſoumiſe à l'évaporation elle ne donne plus de criſtaux, mais elle ſe convertit en un magma comme celui qui réſulte de la combinaiſon de l'acide marin avec ce demi-métal, car ce ſel ne criſtalliſe point. Il eſt viſible, d'après cette expérience, que ſi le vitriol de zinc n'avoit ſouffert aucune altération par l'acide marin, ce ſel auroit conſervé la propriété de criſtalliſer; mais cette difficulté que j'ai éprouvée, & l'examen du réſidu de l'évaporation, m'autoriſe à penſer que le vitriol de zinc a été décompoſé par cet acide. Je ſuis d'autant plus fondé à le croire, que le nitre de zinc traité de même avec l'acide marin, a donné des réſultats en tout ſemblables à ceux de l'expérience précédente. Le nitre de zinc eſt déliqueſcent, il criſtalliſe en longues aiguilles, & on peut le conſerver pendant quelque temps ſi on le renferme dans une bouteille bien bouchée.

Je ferai obſerver que l'acide marin l'emporte encore, à cet égard, ſur l'acide nitreux, car ce dernier n'a point décompoſé le vitriol de zinc, & ne lui a point ôté la propriété de criſtalliſer.

Toutes ces expériences ſe trouvent oppoſées au ſentiment de M. Pott qui a avancé dans ſa Diſſertation ſur le Zinc, que la diſſolution de ce demi-métal n'a aucune prédilection pour les acides vitrioliques & marins.

Sixième Expérience.

Sur le Vitriol & le Nitre cobaltique.

L'acide vitriolique affoibli, n'agit pas ſur le régule de Cobalt, il faut qu'il ſoit concentré & bouillant; & même il eſt néceſſaire que cette diſſolution ſoit faite dans une cornue. On retire de la combinaiſon de cet acide, avec le cobalt, deux eſpèces de criſtaux, (ainſi que l'a remarqué M. Baumé) dont les uns ſont blancs, petits & cubiques, & d'autres plus gros & de couleur fauve.

Si l'on verſe ſur le vitriol cobaltique de l'acide marin, cet acide ſe colore auſſi-tôt en vert, & l'intenſité de cette couleur augmente par la chaleur. Ce ſel ſe diſſout très-bien dans cet acide, on retire de l'évaporation de la liqueur de petits criſtaux verdâtres diſpoſés en aiguilles, & qui attirent puiſſamment l'humidité de l'air. Ces criſtaux ſont les mêmes que ceux qui ſont formés par la combinaiſon immédiate de l'acide marin & du régule de cobalt.

L'acide nitreux diſſout le régule de cobalt avec efferveſcence & ſans le ſecours de la chaleur, j'ai même été obligé d'affoiblir mon acide avec l'eau diſtillée pour qu'elle fût moins forte. La diſſolution étoit de couleur cramoiſi-ſale, elle m'a donné par l'évaporation des criſtaux roux & formant des priſmes carrés longs, mais aucuns n'étoient diſpoſés en aiguilles. Ce ſel ſe diſſout très-bien dans l'acide marin, & lui communique ſur le champ une couleur verte. Je ferai remarquer que dans toutes les diſſolutions de cobalt, faites par l'un ou l'autre acide, l'acide marin prend toujours cette couleur; on peut la faire diſparoître & reparoître à volonté: ſi l'on fait chauffer le mélange, la couleur diſparoît, & ſi l'on ajoute un peu d'acide marin elle reparoît ſur le champ. Comme le régule de cobalt eſt ſoluble également dans l'eau régale que dans l'acide nitreux, on ſent bien qu'on a plus de peine à obtenir des criſtaux de ſel marin cobaltique.

Cependant ayant fait bouillir le nitre cobaltique avec l'acide marin, & ayant fait rapprocher la liqueur, j'ai vu avec plaisir qu'une portion du nitre cobaltique avoit été décomposée, car j'ai reconnu les mêmes cristaux que ceux qui me servoient d'objet de comparaison, c'est-à-dire que ceux que j'avois obtenus de la dissolution du régule de cobalt par l'acide marin.

J'ai fait aussi une nombreuse suite d'expériences sur l'étain & le bismuth. La difficulté que l'on éprouve à dissoudre l'étain par les acides vitrioliques & nitreux, & l'impossibilité de former des sels d'étain avec ces deux acides, ne m'ont pas permis d'essayer l'acide marin. Je pense cependant qu'ils auroient été décomposés comme les autres par cet acide, si l'on considère que l'acide marin est le seul vrai dissolvant de l'étain, & celui qui fournit, avec ce métal, un sel cristallisable.

Le bismuth ne se dissout point dans l'acide vitriolique, quelque concentré qu'il soit, il le calcine si on l'expose à une chaleur violente, & la masse qui reste dans la cornue n'est point ou presque point soluble dans l'eau. On parvient cependant à en faire une combinaison plus intime lorsqu'on l'emploie très-divisé, & tel qu'il a été précipité de sa dissolution dans l'acide nitreux par l'alkali fixe, je pris une certaine quantité de bismuth ainsi précipité & non lavé, que je versai sur de l'esprit de vitriol bouillant, il se fit une effervescence, mais qui ne fut occasionnée que par une portion d'alkali qui étoit restée avec la poudre. La chaux de bismuth fut par ce moyen totalement dissoute, & la liqueur en refroidissant laissa déposer des cristaux que je nommerai *vitriol de bismuth.*

J'ai fait bouillir de l'acide marin sur du vitriol, & du nitre de bismuth, mais quelque tentative que j'aie pu faire, je n'ai pu parvenir à le décomposer; le nitre de bismuth s'est bien dissout à froid dans l'acide marin, il a formé une dissolution claire qui a eu de la peine ensuite à cristalliser. Mais

ayant rapproché un peu la liqueur, une grande partie de l'acide marin s'eſt diſſipé, & j'ai retiré des criſtaux de nitre de biſmuth, comme ceux que j'avois eu auparavant. Cette expérience paroît confirmer l'opinion de M. Monet, lorſqu'il avance, dans ſon Traité ſur la Diſſolution des métaux, que le biſmuth eſt indifférent aux acides, qu'il ne marque pas plus de prédilection pour l'un que pour l'autre, & que s'il y avoit un acide qu'il dût préférer, ce ſeroit l'acide du nitre, comme étant celui qui le diſſout le mieux.

Il réſulte de ces expériences, que l'acide marin conſerve ſur les ſels à baſe métallique, la même propriété que ſur ceux à baſe d'alkali fixe & volatil, & qu'à tous égards, il doit avoir la prééminence ſur les autres acides, puiſqu'il agit avec plus d'énergie qu'eux ſur tous les ſels.



OBSERVATION

OBSERVATION
SUR LES DIFFÉRENS SELS
Que l'on retire par la lixiviation des cendres du Tamaris, pris & coupé en différens lieux.

Par M. CORNETTE.

C'ÉTOIT autrefois un axiome en Chimie, que toutes les Plantes incinérées fournissoient de l'alkali fixe par leurs lixiviations dans l'eau. Ce sentiment a été long-temps adopté par les modernes, lorsqu'enfin M. Montet, de la Société Royale des Sciences de Montpellier, découvrit que cette loi n'étoit pas générale, & que plusieurs Plantes faisoient exception à cette règle. Ce fut le tamaris qui lui fit faire cette remarque; il prouva par des expériences bien faites, que cette plante brûlée, au-lieu de donner, par l'incinération, de l'akali fixe, comme on avoit toujours cru jusqu'alors, ne fournissoit au contraire que du sel de Glauber, ainsi qu'on peut s'en assurer par la lecture du Mémoire de ce Chimiste, inséré parmi ceux de l'Académie, pour l'année 1757.

Présenté en 1779. Lû le 14 Avril 1780.

Favorisé par la circonstance, je crus devoir profiter de mon séjour à Montpellier, pour répéter les expériences de M. Montet; ce n'étoit point que je doutasse de leur réalité, puisque d'autres Chimistes que moi les avoient faites; mais soit qu'ils n'aient pu préparer eux-mêmes leurs cendres, soit qu'ils n'aient pu varier leurs expériences sur différens tamaris, il paroît qu'ils se sont bornés à suivre en tout point l'observation de M. Montet, en avançant, comme lui, que les cendres de cette plante lessivée, ne sont point alkalines, & qu'elles ne donnent que du sel de Glauber, sans s'étendre davantage sur la nature des différens sels que l'on en retire.

Mon principal but, en entreprenant ce travail, n'a donc pas tant été de m'assurer si cette plante incinérée fourniroit

par la lixiviation de l'alkali, que d'examiner ſi le ſel de Glauber étoit le ſeul & unique ſel contenu dans ces cendres, & de déterminer ſi cette plante priſe à des diſtances éloignées de la mer, donneroit toujours le même ſel, ou ſi elle n'offriroit pas des variétés dépendantes du ſol où elle auroit été cultivée.

Sur la fin du mois d'Août 1778, je fis couper en différens endroits une aſſez bonne quantité de tamaris, une partie avoit été priſe dans les environs d'Aiguemortes & de Maguelonne, pays ſitué ſur les bords de la mer; l'autre partie avoit été cueillie à quelque diſtance d'un village appelé *Grabelz*, éloigné à trois lieues au moins de la mer. Je fis brûler avec ſoin, & ſéparément ces plantes que j'avois fait deſſécher auparavant, & lorſqu'elles furent totalement converties en cendres, je fis ſur chacune les expériences ſuivantes:

Je ſoumis à l'ébullition, dans une ſuffiſante quantité d'eau diſtillée bouillante, ces cendres ainſi préparées, je les leſſivai à pluſieurs repriſes, afin d'extraire tout le ſel qu'elles contenoient. Les liqueurs filtrées paſsèrent claires & limpides, elles avoient toutes une ſaveur ſalée amère, mais elles n'avoient rien de cauſtique, car elles ne laiſſoient ſur la langue aucune impreſſion d'alkalicité : ſoumiſes à l'évaporation, je retirai de celles d'Aiguemortes & de Maguelonne, pluſieurs eſpèces de ſels; 1.° beaucoup de ſélénite; 2.° une bonne quantité de ſel de Glauber; 3.° du ſel marin; 4.° enfin, du ſel marin à baſe terreuſe. Cependant ayant eu occaſion depuis peu de répéter cette expérience ſur des cendres de tamaris qui avoit été coupé aux environs de Maguelonne, j'ai retiré de celles-ci, outre les ſels dont je viens de parler, une petite quantité de tartre vitriolé, ce que je n'avois point aperçu dans ma première expérience. Cette différence pourroit peut-être bien provenir auſſi de l'âge ou de la ſaiſon dans laquelle on aura cueilli cette plante, car Boulduc a aſſez bien fait connoître que la bourache qui ne donne que du tartre vitriolé, priſe dans un âge tendre, fournit du nitre dans un âge plus avancé.

La leſſive des cendres de *Grabelz*, évaporée, me donna également beaucoup de ſélénite; mais autant les autres cendres m'avoient donné de ſel de Glauber, autant celles-ci me fournirent de tartre vitriolé, de ſorte que je retirai preſque tout de ce dernier ſel, à l'exception cependant d'une bien petite quantité de ſel de Glauber, qui criſtalliſa ſur la fin, & qui ſe trouvoit mêlé de ſel marin, & de ſel marin à baſe terreuſe. On peut déduire, ce me ſemble, de cette expérience, que le ſel de Glauber n'eſt point un ſel particulier au tamaris, & même je crois pouvoir être en droit d'avancer que ſi cette plante étoit ramaſſée à des diſtances très-éloignées de la mer, elle ne donneroit plus aucun indice de ce ſel; c'eſt ce que je vais faire connoître par l'expérience ſuivante.

Auſſi-tôt mon arrivée à Paris, je cherchai à me procurer du tamaris; M. Chalard, Apothicaire de M. le Duc d'Orléans, & amateur zélé de la Chimie, voulut bien ſeconder mes vues, & me fit remettre la quantité de tamaris qu'il me falloit pour faire mon expérience. Cette plante avoit été cueillie ſous ſes yeux au jardin des Apothicaires; je la brûlai avec ſoin, & après avoir fait calciner la cendre pendant quelque temps, je la leſſivai dans l'eau diſtillée bouillante. La liqueur filtrée ſoumiſe à l'évaporation, me donna comme aux autres expériences beaucoup de ſélénite, mais je ne retirai plus de celle qui me reſtoit que du tartre vitriolé, & ſans aucun indice de ſel de Glauber; ce qui prouve, comme je l'ai déjà remarqué, que les ſels des plantes peuvent varier beaucoup, ſelon le terrein où elles auront été cultivées *.

Les expériences que je viens d'expoſer ſur les cendres de tamaris, m'autoriſent à penſer, que M. Montet, & après

* Quoique cette expérience ſoit, pour le fond, différente de celle de M.rs du Hamel & Cadet, ſur l'alkali végétal que fournit le kali ou varech, lorſqu'il eſt cultivé dans des endroits éloignés de la mer, néanmoins j'ai cru devoir en faire mention, afin de rendre à ces habiles Chimiſtes ce qui leur appartient, me réſervant d'entrer ſur cet objet dans un plus long détail, dans un Mémoire que je lirai dans ſon temps à l'Académie, ſur cette queſtion, *Si les ſels neutres des plantes entrent dans la végétation ſans ſe décompoſer!*

lui le Chevalier du Coudray, ont été induits en erreur, lorſqu'ils ont avancé que ces cendres qui de tout temps ont été employées avec ſuccès en Languedoc & en Provence pour le lavage des eaux mères du ſalpêtre, ne contribuoient en rien à la régénération de ce ſel; ils penſoient qu'elles ne produiſoient d'autre avantage que celui de dégraiſſer les eaux mères, & à faciliter l'extraction du nitre qu'ils prétendoient exiſter tout formé dans ces eaux. Pluſieurs Chimiſtes avoient déjà adopté cette opinion, mais il me ſemble qu'ils n'ont été trompés que parce qu'ils n'ont pas bien connu les différens ſels que l'on en retire, & les effets qu'ils ſont capables de produire. En effet, de ce que l'on n'obtient point par la lixiviation des cendres du tamaris aucun indice d'alkalicité, doit-on en conclure qu'elles ne contribuent point à la régénération du ſalpêtre? c'eſt ce que l'expérience ne confirme point.

Je pris deux onces de cendres de *Grabelz*, ſur leſquelles je verſai une demi-once d'eau-mère du nitre, je délayai ce mélange avec ſuffiſante quantité d'eau tiède, & après quelque temps de digeſtion, je filtrai la liqueur, ſoumiſe à l'évaporation dans une capſule de verre, juſqu'à la diminution des trois quarts ou environ; elle me donna par le refroidiſſement de beaux criſtaux de nitre priſmatique. On m'objectera peut-être que l'eau-mère que j'avois employée, provenant des travaux des ſalpêtriers, contenoit encore du nitre, & que cette expérience n'eſt point ſuffiſante pour établir mon aſſertion. Pour détruire cette objection, j'ai fait l'expérience ſuivante.

Je fis artificiellement du nitre à baſe terreuſe, c'eſt-à-dire, je ſaturai une quantité donnée d'acide nitreux, avec de la craie en poudre; je mêlai de cette liqueur, ainſi préparée & filtrée, avec la même quantité de cendres de tamaris de *Grabelz*, & j'obtins, comme à l'expérience précédente, une bonne quantité de nitre priſmatique.

J'ai répété la même expérience avec les cendres de tamaris coupé aux environs d'Aiguemortes & de Maguelonne,

le ſuccès n'a pas été le même, car je n'ai pu retirer de ces mélanges aucun indice de nitre priſmatique.

Il réſulte des expériences que je viens de rapporter, qu'il n'eſt point indifférent de ſe ſervir, pour le lavage des eaux-mères du ſalpêtre, des cendres de tamaris, de l'une ou de l'autre eſpèce; il eſt aiſé de ſentir, pour les raiſons que nous avons déjà données précédemment, que celles qui contiennent du tartre vitriolé, ſont infiniment plus avantageuſes, & qu'elles produiſent, à l'égard des eaux-mères, le même effet que ſi elles étoient alkalines. En 1775, j'avois déjà avancé dans un Mémoire qui a concouru au Prix que l'Académie a propoſé ſur le ſalpêtre, & que j'ai publié depuis, que c'étoit relativement aux doubles décompoſitions qui ſe paſſent pendant la lixiviation & l'ébullition des eaux ſalpêtrées, que l'on ne trouvoit jamais dans les eaux-mères ce ſel, ni tartre vitriolé, ni ſel de Glauber; la circonſtance exigeoit que je ne m'étendiſſe pas davantage ſur cet objet, mais ce que j'en ai dit étoit bien ſuffiſant, ce me ſemble, pour prouver que je connoiſſois déjà l'action des doubles affinités, & la décompoſition que le nitre à baſe terreuſe & le ſel marin à baſe terreuſe, exerce ſur le tartre vitriolé & le ſel de Glauber. J'avois annoncé en 1774, un Mémoire plus étendu ſur cette matière que j'ai relû, il y a quelque temps, à l'Académie, & dans lequel j'ai démontré que non-ſeulement le ſel marin à baſe terreuſe décompoſe le tartre vitriolé, mais qu'il a auſſi la faculté de décompoſer le nitre lui-même, circonſtance qui explique pourquoi on retire toujours du ſel marin juſqu'au dernier moment de l'évaporation de la liqueur qui tient le ſalpêtre en diſſolution.



DESCRIPTION D'UN ASTÉRÉOMÈTRE

OU INSTRUMENT

Destiné à trouver graphiquement l'heure du lever & du coucher d'un Astre, dont on connoît la déclinaison & l'instant du passage par le Méridien.

Par M. JEAURAT.

Lû à l'Académie le 17 Fév. 1776.

LA nécessité de faire promptement les Calculs astronomiques de l'état du ciel, nommés *Connoissance des Temps* ou *Connoissance des mouvemens célestes*, m'a fait naître l'idée d'abréger la durée des calculs, & sur-tout de ceux qui n'exigent pas une grande précision; or, la détermination de l'heure du lever & du coucher des Astres est presque toujours dans ce cas, & alors l'Astéréomètre que je propose, suffit pour cet effet; & quand il est orienté par rapport à l'heure du passage au Méridien, & par rapport à la déclinaison de l'Astre, il présente à la fois & à vue les instans du lever & du coucher demandés, sans avoir besoin d'additionner & de soustraire l'arc semi-diurne de l'heure du passage de l'Astre par le Méridien; l'occasion que j'ai eu de m'entretenir de ce nouvel instrument, avec M. le Marquis de Courtanvaux, à Montmirail, m'a procuré l'agréable surprise de recevoir de cet Honoraire de l'Académie Royale des Sciences, l'instrument construit de sa propre main, & l'inspection de la figure suffit presque pour indiquer la construction de mon Astéréomètre, ainsi je vais me borner à l'explication succincte que voici.

L'Astéréomètre consiste en trois pièces, qui toutes trois peuvent être de carton, ou de bois, ou de cuivre, selon le plus ou le moins de solidité qu'on veut lui donner, mais

étant conſtruit partie en bois & partie en cuivre, il a toute l'exactitude qu'on peut deſirer.

La première pièce *AadD*, eſt rectangulaire & parallélogramique; elle contient deux rainures parallèles *EF*, *HG*, deſtinées à recevoir une couliſſe *IKLM*, que je nomme ſeconde pièce; de plus, cette première pièce a un enfoncement circulaire *MNOP*, deſtiné à ſervir d'emplacement à la troiſième & dernière pièce.

Selon feu M. le Marquis de Courtanvaux, les deux premières pièces doivent être d'un vieux bois entièrement à l'abri du déverſement; quant à la troiſième & dernière pièce dont il va être parlé, il paroît indiſpenſable qu'elle ſoit en cuivre ſi on veut qu'elle ſoit bonne & durable.

La troiſième & dernière pièce *MNOP* eſt un plateau circulaire & mobile ſur ſon centre *C*, qui ſe place dans l'enfoncement *MNOP* qui a été, comme on l'a dit, pratiqué dans la première pièce *AadD*, ce plateau circulaire & mobile ſur ſon centre a ſa ſuperficie ſupérieure, d'arraſement au niveau *EFGh*, ſur lequel gliſſe à volonté la couliſſe ou ſeconde pièce *IKLM*; de plus la circonférence du cercle tracé ſur la ſuperficie de la troiſième pièce mobile *MNOP* eſt diviſée en vingt-quatre parties égales, qui repréſentent les vingt-quatre heures de la journée, & chacune des heures eſt ſous-diviſée en minutes ou de deux en deux ou de cinq en cinq minutes, ſelon qu'on le juge à propos; ces diviſions ſont naturellement les arcs ſemi-diurnes des Aſtres.

Au point *N*, milieu de *FG* ſur la première pièce *AadD*, eſt un index fixe qui ſert à orienter convenablement le cercle mobile *MNOP*, c'eſt-à-dire, qu'on doit faire cadrer l'heure du cercle mobile qui répond au paſſage donné de l'Aſtre par le méridien avec l'index fixe *N*.

D'une autre part, on marque ſur les plates-bandes ſupérieures *Aa*, *Hd* de la première pièce, la gradation des déclinaiſons qui ſervent à placer la couliſſe, eu égard à la déclinaiſon donnée de l'Aſtre.

Ayant donc orienté le cercle mobile, ou la troiſième pièce

PMNO, de manière que l'heure du paſſage de l'Aſtre réponde à l'index fixe *N*, & ayant fait gliſſer la ſeconde pièce *IKLM* dans les couliſſes *EF*, *hG*, de manière à ce que les extrémités *K* & *L* du bizeau *KL*, répondent à droite & à gauche aux diviſions de la déclinaiſon donnée. Alors le bizeau *KL* traverſe les diviſions des heures marquées ſur la troiſième pièce préciſément en *M* à l'heure du lever, & en *O* à l'heure du coucher demandé. D'où l'on voit que la manière de mouvoir cet inſtrument ſe réduit à orienter le cercle mobile, par rapport à l'heure du paſſage de l'Aſtre par le méridien, & la ſeconde pièce *IKLM*, par rapport à la déclinaiſon donnée de ce même Aſtre.

Pour ce qui concerne la manière de graduer l'échelle des déclinaiſons, tant auſtrales que boréales, le mécaniſme en eſt tout ſimple, & la table des arcs ſemi-diurnes qu'on ſuppoſe toute calculée, préſente naturellement le tableau de la graduation demandée (*Connoiſſance des Temps, année 1782, p. 306*). Par exemple, ſuppoſons qu'à 30 degrés de déclinaiſon auſtrale, on ait ſous la latitude de Paris un arc ſemi-diurne *NS* de $3^h\ 20'$, ou de 50 degrés, dont le complément *SV* eſt de 40 degrés; alors on marquera 30 degrés de déclinaiſon auſtrale en faiſant *VX* égale au ſinus de 40 degrés du cercle; donc *cN*, ou *cP* eſt le rayon, & c'eſt ainſi qu'on graduera l'échelle des déclinaiſons, requiſe ſur ledit inſtrument.



DÉTERMINATION



Y. le Gouaz Sc.

ASTÉRÉOMETRE

Instrument destiné à calculer le Lever et le Coucher des Astres dont on connoît la Déclinaison et l'heure du passage au Méridien.

Zéro Déclinaison

Déclinaison Australe

Déclinaison Boréale

Heures du Matin

Heures du Soir

Y le Gouaz Sc.

DÉTERMINATION

De la position de soixante-quatre Étoiles des Pléïades, & Observation de l'Opposition de Jupiter, du 12 Mars 1779.

Par M. JEAURAT.

Lû à la rentrée du 17 Avril 1779.

LES Étoiles du cou du Taureau, qui forment un amas qu'on nomme *constellation des Pléïades*, sont pour la plupart si petites, qu'on n'en peut distinguer que neuf avec la foible lunette du quart-de-cercle mural que j'ai chez moi; encore les six plus fortes, savoir Électra, Taïgeta, Maïa, Alcïone, Atlas & Pleïone, ne sont-elles que de la troisième & même de la quatrième grandeur : aussi n'a-t-on, d'ancienne date, la position exacte & précise que de huit de ces Étoiles; on réduit même communément la constellation entière à six Étoiles principales, parmi lesquelles on distingue Alcïone, qu'on regarde comme la principale de toutes, & à laquelle on rapporte ordinairement toutes les autres.

Dans ce Mémoire, je détermine, avec la précision la plus scrupuleuse, les neuf Étoiles des Pléïades que j'ai pu voir avec la lunette de mon instrument mural : & de ces neuf positions dépendent celles de cinquante-cinq autres Étoiles, pour lesquelles j'ai été forcé d'avoir recours à un télescope de trente-deux pouces de foyer. Ainsi, moyennant ce bon télescope, j'ai pu augmenter mon catalogue des Étoiles des Pléïades, jusqu'à la concurrence de soixante-quatre Étoiles déterminées pour le 1.er Janvier 1779 : & ce que je puis dire en faveur de la peine que j'ai prise à cet égard, c'est que ce sera au plus si on peut reprocher une minute d'erreur à la position des plus petites Étoiles que je n'ai pu comparer exactement avec les plus belles & les plus remarquables.

Le quart-de-cercle mural où ont été faites mes principales obſervations, eſt celui que feu M. de la Hire a placé en 1682 à l'Obſervatoire dans le plan du méridien : il fut aidé alors des ſoins de M. Picard, qui mourut l'année ſuivante; & ce fut M. de la Hire qui prit lui-même les hauteurs correſpondantes, néceſſaires pour bien placer cet inſtrument dans le plan du Méridien.

C'eſt à ce mural de M. de la Hire que j'ai comparé, comme on le verra par mes obſervations qui ſuivent, neuf Étoiles des Pléïades avec deux autres du Taureau : & mes comparaiſons, faites conſtamment & un grand nombre de fois avec un bon inſtrument, ont d'ailleurs été heureuſement confirmées par des hauteurs abſolues, par des hauteurs correſpondantes, & par l'obſervation des différences d'aſcenſions droites obſervées & priſes en particulier par M. Caſſini fils, le 3 Janvier 1779. Ces obſervations déciſives de M. Caſſini ſeront publiées dans l'*Hiſtoire céleſte*, à laquelle il travaille avec tant d'activité, d'aſſiduité & de capacité : & les miennes vont être détaillées ici, avec les conſéquences que j'en déduirai.

Pour juger du changement de poſition qui pourroit être arrivé dans quelques-unes des Étoiles des Pléïades, ainſi que du mouvement propre des Étoiles fixes en longitude, on pourra comparer mon catalogue & ma carte avec le catalogue & la carte des Pléïades, publiés par M. le Monnier, *pages 34 & 35 de ſon catalogue des Étoiles zodiacales*, réduites à l'année 1755.

Remontant plus haut, on pourra recourir à la carte des Pléïades, dreſſée par le premier des Caſſini; cette carte, publiée dans les Mémoires de l'Académie, *année 1708, page 302*, a été dreſſée pour l'époque du 10 Août 1708, époque où la Lune éclipſa pluſieurs des Étoiles des Pléïades. Quant aux anciennes poſitions fixées dans ce Mémoire de M. Caſſini, *page 299*, elles ſont pour l'année 1697, ainſi il y a un intervalle d'environ quatre-vingt-deux ans entre l'époque des longitudes de M. Caſſini & la mienne du 1.er Janvier 1779.

Rétrogradant encore & remontant au célèbre Képler. Ce fameux Aſtronome a donné quatre Cartes céleſtes particulières, gravées en manière noire, dont une eſt la carte des Étoiles des Pléïades; ces cartes ſont à la ſuite de ſon Traité d'Optique, imprimé à Londres en 1653; ce livre que j'ai eſt rare, mais on le trouve dans beaucoup de Bibliothèques choiſies. On voit par la carte des Pléïades, que Képler comptoit dans cette conſtellation ſix Étoiles principales, & vingt-ſix autres beaucoup plus petites; le tout formant un enſemble général, qui, autant qu'on peut juger à vue, ne diffère pas ſenſiblement de celui qui exiſte actuellement; mais cette carte eſt trop petite, pour qu'on puiſſe juger exactement d'un petit déplacement ou d'un mouvement qui ſeroit lent.

En récapitulant les connoiſſances ſucceſſivement acquiſes, quant à la conſtellation des Pléïades, on voit que les comparaiſons les plus certaines ſont celles de mes longitudes avec celles qui précédemment ont été déterminées avec préciſion: or, huit de celles de M. Caſſini pour 1697, & trois de M. l'Abbé de la Caille pour 1750, ſont dans ce cas; mais j'ai du doute ſur l'époque de M. Caſſini, & je n'en ai point pour celle de M. de la Caille. L'époque de M. Caſſini eſt-elle le commencement, le milieu ou la fin de l'année 1697? car dans ce doute, l'intervalle des temps entre l'époque des longitudes de M. Caſſini & les miennes, eſt de quatre-vingt-un ou de quatre-vingt-un & demi, ou de quatre-vingt-deux années; au lieu que l'intervalle entre l'époque de M. de la Caille & la mienne eſt décidément & certainement de vingt-neuf années.

Ainſi, ſelon la comparaiſon faite des longitudes de M. l'Abbé de la Caille avec les miennes, & pour une révolution certaine de vingt-neuf années, j'ai trouvé que:

Le mouvement en longitude pour les Étoiles fixes, eſt de	+ 24′ 25″
Tandis qu'on fait depuis long-temps ce mouvement pour vingt-neuf années, de	+ 24. 20. 1.

D'autre part, la comparaiſon des longitudes de M. Caſſini avec les miennes, dans le cas où l'intervalle des temps ſeroit

De quatre-vingt-un ans . . . . donnera pour vingt-neuf années	+ 24′	23″
De quatre-vingt-un ans & demi . donnera pour vingt-neuf années	+ 24.	14.
De quatre-vingt-deux ans . . . donnera pour vingt-neuf années	+ 24.	5.

On peut donc conclure de ces réſultats, que le mouvement des Étoiles fixes en longitude, adopté depuis long-temps, ne peut différer du vrai de plus de dix ſecondes de degrés, en trente ans : ce qui eſt une préciſion auſſi grande qu'on puiſſe l'eſpérer quant à préſent, puiſque quinze ſecondes de degrés ne répondent qu'à une ſeconde de temps, & ſi je faiſois une conjecture à cet égard, c'eſt que ce mouvement eſt plus grand qu'on ne le croit, d'environ cinq ſecondes en trente ans.

Dans les comparaiſons que j'ai faites, j'ai rejeté comme on le verra, celles que m'auroient données Pleïone, parce qu'il y a, pour cette Étoile, ou une erreur, ou un mouvement particulier : & dans le cas où le mouvement particulier que je ſoupçonne auroit lieu, il ſe feroit, circulairement, à ce que je préſume, d'orient en occident, autour de la principale Étoile nommée *Alcïone*, & d'environ un degré dans l'eſpace à peu-près de cent ans ; c'eſt-à-dire, que ce mouvement autour d'Alcïone, approche de celui des Étoiles fixes, mais qu'il ſe fait dans un ſens contraire.

Quant à l'oppoſition de Jupiter, du 12 Mars 1779, dont mes obſervations terminent ce Mémoire, le temps a été des plus favorables : Jupiter & β de la Vierge qui étoient fort près l'une de l'autre, ont été comparées enſemble au méridien quatorze jours de ſuite, & entr'autres le 12 Mars, environ ſept minutes avant l'inſtant même de l'oppoſition. Mes obſervations ſont donc complètes, & toutes confirmées les unes par les autres. De plus β de la Vierge a été direc-

tement comparée avec le Soleil, le 28 Mars, jour où l'Étoile étoit seulement moins haute que le centre du Soleil de 2′ 13″,5. Enfin, de mes calculs il résulte que les tables qui, cette fois-ci, ont le plus approché de l'observation, sont celles de M. Cassini, & que celles qui s'en sont le plus éloignées, sont celles de M. Halley; d'ailleurs celles de M. Wargentin, & les miennes, n'ont différé entr'elles que de 27 secondes, quoique très-différentes quant à la forme & quant au fond; nos erreurs en longitude, sont:

Pour les tables de M. Cassini, de — 1′ 3″, l'anomalie moyenne étant de........................	$11^s\ 9^d\ 46'\ 35''$.
Pour mes tables, de......... + 4. 5, l'anomalie moyenne étant de........................	11. 9. 59. 56.
Pour les tables de M. Wargentin, *Astronomie de M. de la Lande*, de ..... + 4. 32, l'anomalie moyenne étant de	11. 9. 40. 26.
Pour les tables de M. Halley, de + 7. 4, l'anomalie moyenne étant de........................	11. 9. 26. 32.

Car l'opposition de Jupiter avec le Soleil est arrivée le 12 Mars 1779,

à 12^h 9′ 28″ temps vrai.. }
à 12. 19. 20. temps moyen } du méridien de l'Observ. royal de Paris.

La longitude géocentrique de Jupiter étant alors de $5^s\ 22^d\ 18'\ 26''$.

Voici présentement les observations mêmes, telles qu'elles ont été faites, ainsi que les calculs qu'elles ont procurés, & dont il a été déduit les résultats qui viennent d'être cités.

OBSERVATIONS des neuf plus belles Étoiles des Pléïades, comparées au Méridien avec deux Étoiles du Bélier, & à l'Obſervatoire avec le quart-de-cercle mural de M. de la Hire.

30 Novembre 1778.

NOMS des ÉTOILES.	TEMPS des paſſages à la PENDULE.	TEMPS vrai des paſſages au SOLEIL.	HAUTEURS de L'INSTRUMENT.
	H. M. S.	H. M. S.	D. M. S.
Petite Étoile.	8. 57. 27	9. 17. 6 ½	63. 47. 0.
α du Bélier..	9. 6. 32	9. 26. 11 ½	63. 39. 40.
Celeno	10. 43. 11	11. 2. 50 ½	64. 48. 50.
Éleĉtra.....	10. 43. 16	11. 2. 55 ½	64. 39. 30.
N	10. 43. 31	11. 3. 10 ½	65. 21. 20.
Taïgeta.....	10. 43. 35	11. 3. 14 ½	65. 0. 42.
Maïa	10. 44. 11 ½	11. 3. 51	64. 55. 13.
Mérope	10. 44. 44	11. 4. 23 ½	64. 25. 0.
Alcïone....	10. 45. 52 ½	11. 5. 32	64. 39. 52.
Atlas.......	10. 47. 32 ½	11. 7. 12	64. 37. 17.
Pleïone	10. 47. 33 ½	11. 7. 13	64. 42. 0.

Suite des Observations faites au Quart-de-cercle mural de M. de la Hire, dont la division de l'Instrument hausse les Hauteurs de 5′ 22″.

4 Décembre 1778.

NOMS des ÉTOILES.	TEMPS des passages à la PENDULE.	TEMPS vrai des passages au SOLEIL.	HAUTEURS apparentes & non corrigées de la RÉFRACTION.
	H. M. S.	*H. M. S.*	*D. M. S.*
Petite Étoile.	8. 41. 54	8. 59. 48	63. 41. 38.
α du Bélier. .	8. 50. 59	9. 8. 53	63. 34. 18.
Celeno.	10. 27. 38	10. 45. 32	64. 43. 28.
Electra.	10. 27. 43	10. 45. 37	64. 34. 8.
N.	10. 27. 58	10. 45. 52	65. 15. 58.
Taïgeta.	10. 28. 2	10. 45. 56	64. 55. 20.
Maïa	10. 28. 38 ½	10. 46. 33	64. 49. 51.
Mérope	10. 29. 11	10. 47. 5	64. 19. 38.
Alcïone	10. 30. 19 ½	10. 48. 14	64. 34. 30.
Atlas.	10. 31. 59 ½	10. 49. 54	64. 31. 55.
Pléïone.	10. 32. 0 ½	10. 49. 55	64. 36. 38.

Suite des Observations faites au Quart-de-cercle mural de M. de la Hire.

9 Décembre 1778.

NOMS des ÉTOILES.	TEMPS des passages à la PENDULE.			TEMPS vrai des passages au SOLEIL.			HAUTEURS VRAIES corrigées de la RÉFRACTION, suivant celle de M. Cassini.		
	H.	M.	S.	H.	M.	S.	D.	M.	S.
Petite Étoile.	8.	22.	31 ½	8.	37.	57 ½	63.	41.	9.
α du Bélier..	8.	31.	36 ½	8.	47.	2 ½	63.	33.	49.
Celeno.....	10.	8.	15 ½	10.	23.	41 ½	64.	43.	1.
Electra.....	10.	8.	20 ½	10.	23.	46 ½	64.	33.	41.
N........	10.	8.	35 ½	10.	24.	1 ½	65.	15.	31.
Taïgeta.....	10.	8.	39 ½	10.	24.	5 ½	64.	54.	53.
Maïa......	10.	9.	16	10.	24.	42	64.	49.	25.
Mérope....	10.	9.	48 ½	10.	25.	14 ½	64.	19.	18.
Alcïone....	10.	10.	57	10.	26.	23	64.	34.	4.
Atlas......	10.	12.	37	10.	28.	3	64.	41.	29.
Pleïone....	10.	12.	38	10.	28.	4	64.	36.	12.

Suite

Suite des Observations faites au Mural de M. de la Hire.
On a supposé la hauteur de l'Équateur de 41^d 9' 46".

3 Janvier 1779.

NOMS des ÉTOILES.	TEMPS des passages à la PENDULE.	TEMPS vrai des PASSAGES, &c.	DÉCLINAISONS APPARENTES.
	H. M. S.	H. M. S.	D. M. S.
Petite Étoile.	6. 45. 31	6. 47. 34	22. 31. 23. B.
α du Bélier. .	6. 54. 36	6. 56. 39	22. 24. 3.
Celeno.	8. 31. 15	8. 33. 18	23. 33. 15.
Electra.	8. 31. 20½	8. 33. 23	23. 23. 55.
N.	8. 31. 35	8. 33. 38	24. 5. 45.
Taïgeta	8. 31. 39	8. 33. 42	23. 45. 7.
Maïa.	8. 32. 15½	8. 34. 18	23. 39. 39.
Mérope	8. 32. 48	8. 34. 51	23. 14. 34.
Alcïone. . . .	8. 33. 56½	8. 35. 59	23. 24. 18.
Atlas	8. 35. 36½	8. 37. 39	23. 31. 43.
Pléïone	8. 35. 37½	8. 37. 40	23. 26. 26.

Suite des Observations faites au Mural de M. de la Hire.
La correction d'Aberration & de Nutation en déclinaison est de — 2 secondes.

15 Janvier 1779.			
NOMS des ÉTOILES.	TEMPS des passages à la PENDULE.	TEMPS vrai des PASSAGES, &c.	DÉCLINAISONS VRAIES.
	H. M. S.	H. M. S.	D. M. S.
Petite Étoile.	5. 59. 13	5. 55. 30	22. 31. 21.B
α du Bélier. .	6. 8. 18	6. 4. 35	22. 24. 1.
Celeno.	7. 44. 57	7. 41. 14	23. 33. 13.
Electra.	7. 45. 2	7. 41. 19	23. 23. 53.
N.	7. 45. 17	7. 41. 34	24. 5. 43.
Taïgeta.	7. 45. 21	7. 41. 38	23. 45. 5.
Maïa	7. 45. 57½	7. 42. 14½	23. 39. 37.
Mérope	7. 46. 30	7. 42. 47	23. 14. 32.
Alcïone. . . .	7. 47. 38½	7. 43. 55½	23. 24. 16.
Atlas.	7. 49. 18½	7. 45. 35½	23. 21. 41.
Pléïone	7. 49. 19½	7. 45. 36½	23. 26. 24.

Ascensions droites déduites des Observations précédentes.

NOMS des ÉTOILES.	ASCENSIONS DROITES pour le 1.er Janvier 1779. EN TEMPS.	ÉN DEGRÉS, non corrigée.	EN DEGRÉS, mais corrigée de l'aberration & de la nutation.
	H. M. S. T.	D. M. S.	D. M. S.
Petite Étoile..	1. 45. 38. 30	26. 24. 30	26. 24. 38.
α du Bélier...	1. 54. 45. 0	28. 41. 17	28. 41. 25.
Celeno	3. 3. 41. 44	52. 55. 26	52. 55. 27.
Electra	3. 31. 46. 48	52. 56. 50	52. 56. 51.
N.........	3. 32. 1. 50	53. 0. 27	53. 0. 28.
Taïgeta.....	3. 32. 5. 50	53. 1. 27	53. 1. 28.
Maïa.......	3. 32. 42. 25	53. 10. 36	53. 10. 37.
Mérope.....	3. 33. 15. 6	53. 18. 41	53. 18. 42.
Alcïone.....	3. 34. 23. 47	53. 35. 57	53. 35. 58.
Atlas.......	3. 36. 4. 0	54. 1. 0	54. 1. 1.
Pléïone.....	3. 36. 5. 9	54. 1. 17	54. 1. 18.

Longitudes & Latitudes déduites des Observations précédentes, pour le 1.er Janvier 1779, & comparaison de ses résultats avec ceux qu'a donnés M. Cassini, pour l'année 1697. Mémoires de l'Académie, année 1708, page 299.

NOMS des ÉTOILES.	LONGITUDES		LATITUDES	
	EN 1697.	EN 1779.	EN 1697.	EN 1779.
	S. D. M. S.	S. D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.
Pleïone.....	1. 26. 10. 50	1. 27. 17. 47	3. 57. 30 B.	3. 58. 1 B.
Maïa.......	1. 25. 27. 50	1. 26. 35. 42	4. 21. 40	4. 21. 52.
Atlas.......	1. 26. 8. 30	1. 27. 16. 26	3. 53. 30	4. 53. 29.
Celeno.....	1. 25. 12. 35	1. 26. 20. 36	4. 19. 54	4. 19. 0.
Taïgeta.....	1. 25. 20. 40	1. 26. 28. 50	4. 29. 10	4. 29. 11.
Alcïone.....	1. 25. 46. 27	1. 26. 54. 38	4. 1. 3	4. 1. 25.
Electra.....	1. 25. 11. 10	1. 26. 19. 36	4. 9. 34	4. 9. 39.

De la Table précédente, il résulte naturellement la détermination du mouvement des Étoiles, depuis l'année 1697 jusqu'à celle de 1779 : or, si les positions données par M. Cassini, *Mémoires de l'Académie, année 1708, page 299,* sont, comme on doit le croire, pour le 1.er Janvier 1697, alors les mouvemens indiqués dans la Table qui suit, répondent exactement à un intervalle de quatre-vingt-deux années. Voici donc la Table de ces mouvemens pour quatre-vingt-deux années, ou peut-être pour quatre-vingt-un ans & demi.

NOMS des ÉTOILES.	MOUVEMENS DES ÉTOILES DES PLÉIADES pour quatre-vingt-deux ans, ou peut-être pour quatre-vingt-un ans & demi.			
	EN LONGITUDE.	EN ASCENSION droite.	EN LATIT.	EN DÉCLIN.
Pléïone...	+ 1d 6′ 57″	+ 1d 11′ 9″	+ 0′ 31″	+ 15′ 42″
Maïa.....	+ 1. 7. 52	+ 1. 11. 37	+ 0. 12	+ 15. 53.
Atlas.....	+ 1. 7. 56	+ 1. 11. 40	− 0. 1	+ 15. 59.
Celeno....	+ 1. 8. 1	+ 1. 12. 2	− 0. 54	+ 15. 1.
Taïgeta...	+ 1. 8. 10	+ 1. 12. 17	+ 0. 1	+ 15. 53.
Alcïone...	+ 1. 8. 11	+ 1. 11. 55	+ 0. 22	+ 16. 4.
Electra....	+ 1. 8. 26	+ 1. 12. 10	+ 0. 5	+ 16. 11.

Pour conclure, d'après cette Table, le mouvement des Étoiles en longitude, je laiſſe de côté le mouvement de Pléïone, parce que ce mouvement s'écarte un peu de celui des ſix autres Étoiles, ſoit par erreur dans cette Étoile, ſoit parce qu'elle a peut-être un mouvement qui lui eſt particulier. Voici donc le moyen mouvement que je conclus des obſervations de Maïa, d'Atlas, de Celano, de Taïgeta, d'Alcïone & d'Électra.

Mouvement en longitude + 1d 8′ 6″.

Or, ſi ce mouvement eſt

Pour quatre-vingt-un ans ..... on aura pour vingt-neuf ans + 24′ 23″.

Pour quatre-vingt-un ans & demi, on aura pour vingt-neuf ans + 24. 14.

Pour quatre-vingt-deux ans .... on aura pour vingt-neuf ans + 24. 5.

D'une autre part, ſi on compare mes longitudes d'Électra, d'Atlas & d'Alcïone, avec celle de feu M. l'abbé de la

Caille, pour 1750, on trouvera que le mouvement en vingt-neuf ans, eſt pour

Electra de + 24′ 10″
Atlas . . de + 24. 30.
Alcïone de + 24. 35.

& alors le moyen mouvement en longitude & pour une révolution certaine de vingt-neuf ans, eſt de + 24′ 25″.

Ce qui s'accorde auſſi-bien que faire ſe puiſſe avec ce que m'ont donné les obſervations de M. Caſſini, & auſſi avec le mouvement adopté juſqu'à préſent; ſavoir, + 24′ 20″,1 pour une révolution de vingt-neuf années.

Quant à Pléïone à qui je ſoupçonne un petit mouvement particulier, autour d'Alcïone, voici la quantité dont paroît être ce mouvement en quatre-vingt-un ans de temps.

Mouvement particulier & douteux en quatre-vingt-un ans.

Pour Pléïone, { — 1′ 9″ en longitude.
+ 0. 31. en latitude.

Au reſte, d'après les obſervations que je viens de donner, & d'après celles que j'ai faites d'ailleurs avec un bon téleſcope de trente-deux pouces de foyer, j'ai dreſſé le catalogue qui ſuit; & ſi les plus petites Étoiles ne ſont placées ici qu'à une minute près du vrai, au moins on pourra les reconnoître toutes & les trouver facilement avec une lunette, pourvu qu'elle ſoit plus forte que celle qu'on adapte ordinairement aux inſtrumens muraux placés dans le plan du Méridien. Voici donc ce catalogue de ſoixante-quatre Étoiles des Pléïades, & j'ai réduit ce catalogue au 1.er Janvier 1786, afin de le rapprocher de l'époque des volumes de la Connoiſſance des Temps, déjà publiés en faveur des Marins qui ont beſoin de ces volumes environ trois ans avant l'époque des phénomènes annoncés.

Catalogue des soixante-quatre Étoiles des Pléiades, pour le 1.er Janvier 1786.

1.° Étoiles qui sont à l'occident d'Alcïone, ou qui passent avant Alcïone par le Méridien.

NOMS des ÉTOILES.	GRANDEUR.	ASCENSION DROITE		DÉCLIN. boréale.	Différence avec η ou d'Alcïone.		
					EN ASCENSION DROITE		En DÉCLINAIS.
		En temps.	En degrés.		En temps.	En degrés.	
		H. M. S.	D. M. S.	. M. S	M. S	M. S.	M. S.
1.	5.	3. 30. 58	52. 44. 14	23. 40. 58	Occ. — 3. 52	— 57. 58	+ 15′24″. N.
2.	5.	3. 31. 13	52. 48. 4	23. 48. 18	— 3. 37	— 54. 8	+ 22. 44 N.
3.	7.	3. 31. 42	52. 55. 14	23. 25. 48	— 3. 8	— 46. 58	+ 4. 14 N
4.	6.	3. 31. 45	52. 56. 4	23. 37. 48	— 3. 5	— 46. 8	+ 12. 14 N.
5.	7.	3. 31. 46	52. 56. 14	23. 41. 48	— 3. 4	— 45. 58	+ 16. 14 N.
6. *g.* Celeno.	3.	3. 32. 8	53. 1. 41	23. 34. 31	— 2. 42	— 40. 31	+ 8. 57 N.
7. *b.* Electra.	3.	3. 32. 13	53. 3. 5	33. 25. 11	— 2. 37	— 39. 7	— 0. 23 S.
8.	6.	3. 32. 27	53. 5. 24	23. 33. 8	— 2. 23	— 36. 48	+ 7. 34 N.
9. *n.*	8.	3. 32. 28	53. 6. 42	23. 7. 1	— 2. 22	— 35. 30	+ 41. 27 N.
10. *c.* Taïgeta.	3.	3. 32. 32	53. 7. 42	23. 46. 23	— 2. 18	— 34. 30	+ 20. 49 N.
11.	5.	3. 32. 48	53. 12. 0	23. 21. 0	— 2. 2	— 31. 12	— 4. 34 S.
12.	6.	3. 32. 48	53. 11. 44	23. 46. 18	— 2. 2	— 30. 28	+ 20. 44 N.
13.	5.	3. 32. 57	53. 13. 54	23. 39. 18	— 1. 53	— 28. 18	+ 13. 44 N.
14. *e.* Maïa.	3.	3. 33. 9	53. 16. 51	23. 40. 55	— 1. 41	— 25. 21	+ 15. 21 N.
15.	5.	3. 33. 12	53. 17. 44	23. 21. 0	— 1. 38	— 24. 28	— 4. 34 S.
16. *o.* Asterope.	4.	3. 33. 13	53. 17. 54	23. 52. 18	— 1. 37	— 24. 18	+ 26. 44 N.
17. *o.*	4.	3. 33. 21	53. 19. 54	23. 51. 18	— 1. 29	— 22. 18	+ 25. 44 N.
18.	7.	3. 33. 31	53. 22. 24	23. 30. 38	— 1. 19	— 19. 48	+ 5. 4 N.
19.	7.	3. 33. 34	53. 23. 14	23. 30. 18	— 1. 16	— 18. 58	+ 4. 44 N.
20. *d.* Mérope.	3.	3. 33. 41	53. 24. 56	23. 15. 50	— 1. 9	— 17. 16	— 9. 44 S.
21.	9.	3. 33. 42	53. 25. 14	23. 25. 18	— 1. 8	— 16. 58	— 0. 16 S.
22.	5.	3. 33. 48	53. 26. 44	23. 34. 18	— 1. 2	— 15. 28	+ 8. 44 N.
23.	5.	3. 34. 2	53. 30. 14	22. 52. 18	— 0. 48	— 11. 58	— 33. 16 S.
24.	6.	3. 34. 2	53. 30. 30	23. 23. 20	— 0. 48	— 11. 42	— 2. 14 S.
25.	4.	3. 34. 20	53. 35. 4	23. 50. 18	— 0. 28	— 7. 8	+ 24. 44 N.
26.	5.	3. 34. 22	53. 35. 14	24. 7. 48	— 0. 28	— 6. 58	+ 42. 14 N.
27.	5.	3. 34. 28	53. 36. 44	23. 34. 48	— 0. 22	— 5. 28	+ 9. 14 N.
28.	5.	3. 34. 24	53. 36. 0	23. 17. 28	— 0. 26	— 6. 12	— 8. 6 S.
29.	8.	3. 34. 38	53. 39. 14	23. 27. 18	— 0. 12	— 2. 58	+ 1. 44 N.
30.	4.	3. 34. 39	53. 39. 24	23. 26. 18	— 0. 11	— 2. 48	+ 0. 44 N.
31.	8.	3. 34. 39	53. 39. 24	23. 2. 0	— 0. 11	— 2. 48	— 23. 34 S.
32.	5.	3. 34. 46	53. 41. 14	23. 58. 18	— 0. 4	— 0. 58	+ 32. 44 N.
33.	5.	3. 34. 47	53. 41. 24	23. 54. 0	— 0. 3	— 0. 48	+ 28. 26 N.
34.	4.	3. 34. 47	53. 41. 24	23. 5. 0	— 0. 3	— 0. 48	— 20. 34 S.
35.	4.	3. 34. 47	53. 41. 24	23. 0. 0	— 0. 3	— 0. 48	— 25. 34 S.
36.	4.	3. 34. 49	53. 42. 4	23. 12. 0	— 0. 1	— 0. 8	— 13. 34 S.
37. *η.* Alcïone.	3.	3. 34. 50	53. 42. 12	23. 25. 34	— 0. 0	— 0. 0	— 0. 0

Suite du Catalogue des soixante-quatre Étoiles des Pléïades, pour le 1.er Janvier 1786.

2°. Étoiles qui sont à l'orient d'Alcïone, ou qui passent après Alcïone par le Méridien.

NOMS des ÉTOILES.	GRANDEUR.	ASCENSION DROITE		DÉCLIN. boréale.	Différence avec η ou Alcïone.		
					EN ASCENSION DROITE		En DÉCLINAIS.
		En temps.	En degrés.		En temps.	En degrés.	
		H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S	M. S.
37. η. Alcïone.	3.	3. 34. 50	53. 42. 12	23. 25. 34	Or. + 0. 0	+ 0. 0	— 0. 0
38.	4.	3. 34. 54	53. 43. 12	23. 37. 4	+ 0. 4	+ 1. 0	+ 11. 30 N.
39.	5.	3. 34. 54	53. 43. 14	22. 58. 0	+ 0. 4	+ 1. 2	— 27. 34 S.
40.	5.	3. 35. 6	53. 46. 14	22. 55. 30	+ 0. 16	+ 4. 2	— 30. 4 S.
41.	6.	3. 35. 18	53. 49. 4	22. 52. 30	+ 0. 28	+ 6. 52	— 33. 4 S.
42.	5.	3. 35. 23	53. 50. 29	23. 48. 18	+ 0. 33	+ 8. 17	+ 22. 44 N.
43.	6.	3. 35. 29	53. 51. 59	23. 39. 18	+ 0. 39	+ 9. 47	+ 13. 44 N.
44.	4.	3. 35. 42	53. 55. 30	23. 41. 18	+ 0. 52	+ 13. 18	+ 15. 44 N.
45.	4.	3. 35. 58	53. 59. 14	22. 42. 18	+ 1. 8	+ 17. 2	— 43. 16 S.
46. p.	7.	3. 36. 18	54. 4. 14	23. 44. 18	+ 1. 28	+ 22. 2	+ 18. 44 N.
47.	5.	3. 36. 20	54. 4. 44	22. 33. 48	+ 1. 30	+ 22. 32	— 51. 46 S.
48. p.	4.	3. 36. 23	54. 5. 29	23. 44. 18	+ 1. 33	+ 23. 17	+ 18. 44 N.
49.	5.	3. 36. 26	54. 6. 14	23. 9. 8	+ 1. 36	+ 24. 2	— 16. 26 S.
50. f. Atlas.	3.	3. 36. 30	54. 7. 15	23. 22. 59	+ 1. 40	+ 25. 3	— 2. 35 S.
51. h. Pleïone.	4.	3. 36. 31	54. 7. 32	23. 27. 42	+ 1. 41	+ 25. 20	+ 2. 8 N.
52.	6.	3. 36. 36	54. 8. 44	23. 36. 18	+ 1. 46	+ 26 32	+ 10. 44 N.
53.	4.	3. 36. 42	54. 10. 14	23. 12. 8	+ 1. 52	+ 28. 2	— 13. 26 S.
54.	6.	3. 36. 42	54. 10. 14	23. 35. 28	+ 1. 52	+ 28. 2	— 50. 6 S.
55.	5.	3. 36. 45	54. 10. 59	23. 54. 8	+ 1. 55	+ 28. 47	+ 28. 34 N.
56.	5.	3. 36. 57	54 13. 59	23. 40. 18	+ 2. 7	+ 31. 47	+ 14. 44 N.
57.	5.	3. 36. 58	54. 14. 14	23. 31. 18	+ 2. 8	+ 32. 2	+ 5. 44 N.
58.	5.	3. 36. 58	54. 14. 14	22. 45. 8	+ 2. 8	+ 32. 2	— 40. 26 S.
59.	5.	3. 37. 6	54. 16. 14	23. 45. 18	+ 2. 16	+ 34. 2	+ 19. 44 N.
60.	4.	3. 37. 7	54. 16. 29	23. 1. 48	+ 2. 17	+ 34. 17	— 23. 46 S.
61.	4.	3. 37. 26	54. 21. 14	23. 10. 18	+ 2. 36	+ 39. 2	— 15. 16 S.
62.	4.	3. 37. 30	54. 22. 14	23. 54. 18	+ 2. 40	+ 40. 2	+ 28. 44 N.
63.	5.	3. 37. 46	54. 26. 14	23. 52. 18	+ 2. 56	+ 44. 2	+ 26. 44 N.
64.	4.	3. 38. 14	54. 33. 14	23. 17. 18	+ 3. 24	+ 51. 2	— 8. 16 S.

Le 9 Février 1783, la Lune éclipsera vingt-sept de ces Étoiles, *(Connoissance des Temps, page 24)*; & le 13 Décembre de l'année 1785, elle en éclipsera aussi trente-sept, *(Connoissance des Temps, page 164)*.

Présentement

Présentement je paſſe aux obſervations de Jupiter, qui forment la ſeconde & dernière partie de ce Mémoire.

Obſervations de Jupiter pour ſon oppoſition avec le Soleil, du 12 Mars 1779, faites à l'Obſervatoire royal au Quart-de-cercle mural de M. de la Hire.

JOURS des OBSERV. année 1779.	PASSAGES PAR LE MÉRIDIEN. Temps de la Pendule.		PASSAGES PAR LE MÉRIDIEN. Temps vrai.		HAUTEUR du centre de JUPITER, ſelon l'Inſtrument.
	β de la VIERGE.	JUPITER.	β de la VIERGE.	JUPITER.	
	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.	D. M. S.
Fév. 28	13. 2. 14	13. 2. 55	12. 51. 26	12. 52. 7	45. 7. 5.
Mars 1.	12. 58. 21	12. 58. 33	12. 47. 46	12. 47. 58	45. 10. 1.
2.	12. 54. 28	12. 54. 11	12. 44. 6	12. 43. 49	45. 12. 57.
3.	12. 50. 36	12. 49. 50	12. 40. 26	12. 39. 41	45. 15. 53.
4.	12. 46. 42	57. 45. 29	12. 36. 46	12. 35. 33	45. 18. 53.
5.	12. 42. 48	12. 41. 7	12. 33. 6	12. 31. 24	45. 22. 0.
6.	12. 38. 53	12. 36. 44	12. 29. 25	12. 27. 15	45. 25. 10.
7.	12. 34. 59	12. 32. 21	12. 25. 44	12. 23. 6	45. 28. 20.
8.	12. 31. 4	12. 27. 58	12. 22. 3	12. 18. 57	45. 31. 30.
9.	12. 27. 8	12. 23. 34	12. 18. 22	12. 14. 48	45. 34. 40.
10.	12. 23. 12	12. 19. 10	12. 14. 41	12. 10. 39	45. 37. 50.
11.	12. 19. 17	12. 14. 46	12. 11. 1	12. 6. 30	45. 40. 55.
12.	12. 15. 22	12. 10. 23	12. 7. 22	12. 2. 22	45. 44. 5.
13.	12. 11. 28	12. 6. 0	12. 3. 43	11. 58. 15	45. 47. 15.
21.	11. 40. 22½	11. 31. 8	11. 34. 43½	11. 25. 29	46. 11. 30.
22.	11. 36. 29	11. 26. 47	11. 31. 6	1. 21. 24	46. 14. 15.
28	11. 13. 1	....	11. 9. 22		

Selon ces obſervations, Jupiter a été comparé ſeize jours avec l'Étoile β de la Vierge, puis cette Étoile elle-même a auſſi été comparée au méridien avec le Soleil, le 28 Mars, jour

où elle n'étoit éloignée du parallèle du centre du Soleil que de 2′ 13″,5, ainſi avant que de rapporter la poſition de Jupiter à celle de β de la Vierge, je vais rapporter la poſition de β de la Vierge à celle du Soleil même, & avec d'autant plus de ſûreté que dans ce cas les meilleures Tables du Soleil, ſavoir celles de M. l'Abbé de la Caille & celles de M. Mayer, ne diffèrent entr'elles que de deux ſecondes.

La marche de ma pendule a été aſſez conſtante & aſſez uniforme pendant le mois entier de Mars : or, ſelon cette pendule, la différence des aſcenſions droites étoit de $11^h\ 9'\ 14''$, à raiſon de $23^h\ 56'\ 5''$ pour 360 degrés, ainſi la différence en temps vrai, $11^h\ 9'\ 14''$ réduite en degrés, donne .... $167^d\ 45'\ 51''$

Tandis que l'aſcenſion droite du Soleil étoit de .... 7. 2. 7.

Donc pour aſcenſion droite cherchée de β de la Vierge, on aura .... 174. 47. 58.

D'une autre part, ſelon la poſition déjà connue, & les réductions convenables, cette même aſcenſion droite, doit être de 174. 47. 38.

Alors j'ai cru devoir adopter pour vraie poſition celle qui tient le milieu entre les deux réſultats, ſavoir celle-ci .... 174. 47. 48.

De la poſition de β de la Vierge, déduite comme je viens de le faire de celle du Soleil même, il ſuit que pour vingt-neuf années, le mouvement des Étoiles en longitude, eſt de .... + 24. 30.

Tandis que ſelon mes obſervations & calculs des Étoiles des Pléïades, ce mouvement eſt de .... + 24. 25.

Et tandis que le mouvement adopté depuis long-temps, eſt de............ + 24′ 20″.

Si donc j'avois une conjecture à faire quant à la quantité, dont eſt réellement le mouvement des Étoiles en longitude, c'eſt qu'on fait ce mouvement trop petit d'environ 5 ſecondes en vingt-neuf ans. Préſentement voici mes calculs & réſultats pour l'oppoſition de Jupiter, dont je viens de donner les obſervations : ces calculs & réſultats termineront ce Mémoire.

Calculs des Obſervations de Jupiter.

JOURS des OBSERVAT. année 1779.	DIFFÉR. des ASCENSIONS droites en degrés.	ASCENS. droites vraies du centre de JUPITER.	HAUTEURS du centre de JUPITER.		DÉCLINAIS. vraie du centre de JUPITER, boréale.
			APPARENTES.	VRAIES.	
	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.
Mars. 1	+ 3. 1	174. 50. 49	45. 5. 6	45. 4. 8	3. 54. 20 B.
2.	− 4. 5	174. 43. 43	45. 8. 2	45. 7. 4	3. 57. 16.
3.	− 11. 12	174. 36. 36	45. 10. 58	45. 10. 0	4. 0. 12.
4.	− 18. 18	174. 29. 30	45. 13. 58	45. 13. 0	4. 3. 12.
5.	− 25. 24	174. 22. 24	45. 17. 5	45. 16. 7	4. 6. 19.
6.	− 32. 31	174. 15. 17	45. 20. 15	45. 19. 17	4. 9. 29.
7.	− 39. 37	174. 8. 11	45. 23. 25	45. 22. 27	4. 12. 39.
8.	− 46. 43	174. 1. 5	45. 26. 35	45. 25. 37	4. 15. 49.
9.	− 53. 49	173. 53. 59	45. 29. 45	45. 28. 47	4. 18. 59.
10.	1. 0. 55	173. 46. 53	45. 32. 55	45. 31. 57	4. 22. 9.
11.	1. 8. 1	173. 39. 47	45. 36. 0	45. 35. 2	4. 25. 14.
12.	1. 15. 7	173. 32. 41	45. 39. 10	45. 38. 12	4. 28. 24.
13.	1. 22. 13	173. 25. 35	45. 42. 20	45. 41. 22	4. 31. 34.

Suite du calcul des Obſervations de Jupiter pour ſon oppoſition avec le Soleil.

JOURS des OBSERVATIONS, année 1779.		ASCENSION droite vraie du centre de JUPITER.	DÉCLINAIS. vraie du centre de JUPITER.	LONGITUDE géocentrique obſervée de JUPITER.	LONGITUDE de la TERRE.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	S. D. M. S.	S. D. M. S.
	Temps vrai.				
Mars. 11	12. 6. 30	173. 39. 47	4. 25. 14 B.	5. 22. 25. 58	5. 21. 18. 18.
12.	12. 2. 22	173. 32. 41	4. 28. 24	5. 22. 18. 13	5. 22. 17. 52.
13.	11. 58. 15	173. 25. 35	4. 31. 34	5. 22. 10. 27	5. 23. 17. 28.

De ces calculs il ſuit les réſultats que voici :

Oppoſition de Jupiter obſervée avec le Soleil.

12 Mars 1779.

à 12^h 9′ 28″ temps vrai } du méridien de l'Obſerv. royal de Paris.
à 12. 19. 20. temps moyen }

Alors la longitude héliocentrique de Jupiter étoit obſervée

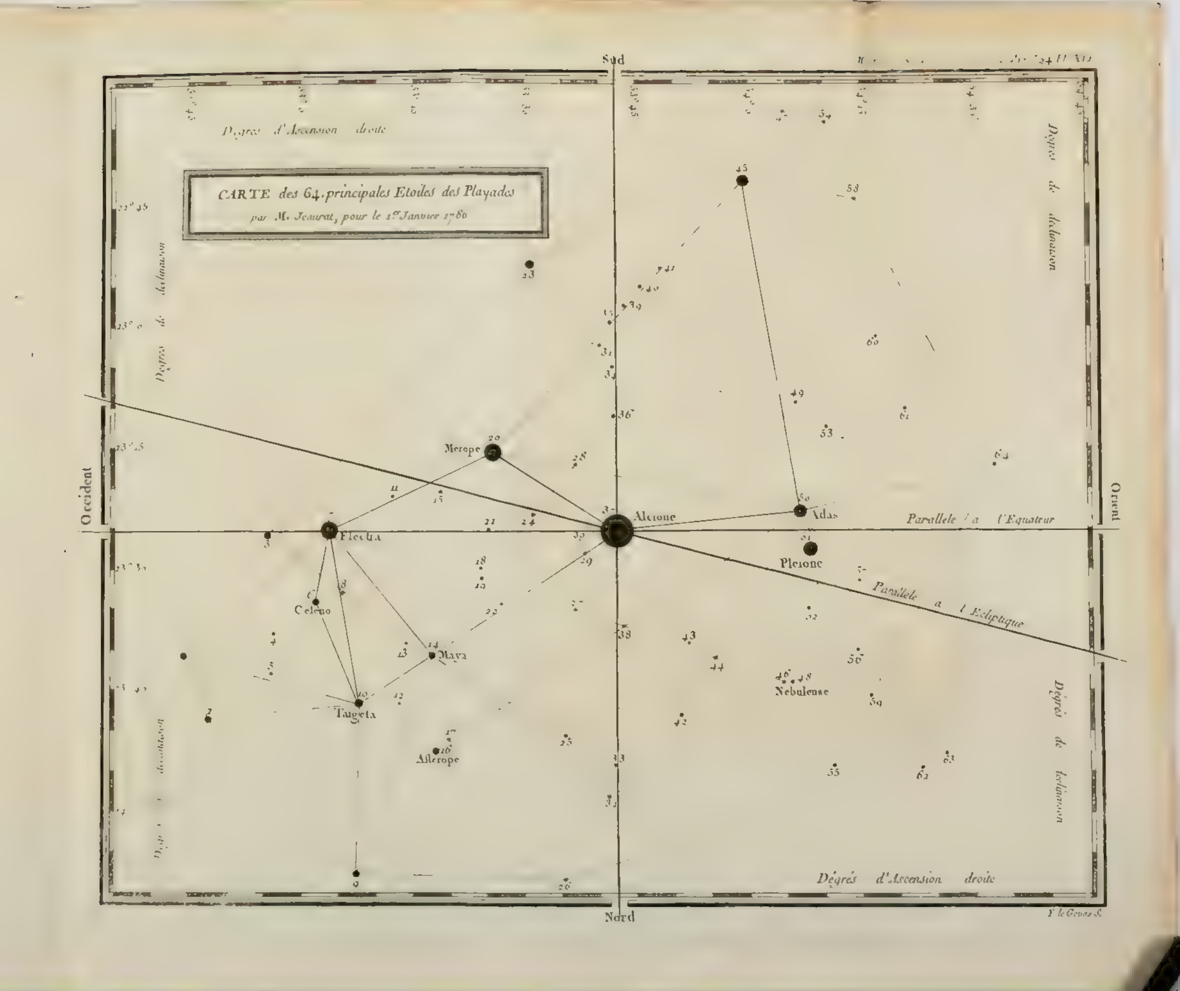
Dans l'Écliptique .... de 5^s 22^d 18′ 11″.
Dans l'Orbite .... de 5. 22. 18. 26.

Tandis qu'elle étoit

Selon les Tables de M. Caſſini. .. de 5^s 22^d 17′ 23″ }
Selon mes Tables .... de 5. 22. 22. 31. } dans l'orbite.
Selon les Tables de M. Wargentin, de 5. 22. 22. 58. }
Selon les Tables d'Halley .... de 5. 22. 25. 30. }

Ainſi dans cette oppoſition, les Tables de M. Caſſini ſont celles qui approchent le plus de l'obſervation, & celles de

Sud
53° 30'
53° 45'
54° 0'
54° 15'
54° 30'
54° 45'
Playades
Dégrés de déclinaison
45
58
54
23
41
40
39
35
31
34
36
60
49
61
53
20
28
64
Orient
50
Alcione
Atlas
Parallèle à l'Equateur
21
24
30
51
Pleione
18
19
29
57
Parallèle à l'Ecliptique
22
27
52
38
43
44
56
46
48
Nebuleuse
59
42
25
Dégrés de déclinaison
33
55
63
62
32
26
Dégrés d'Ascension droite
Nord
Y. le Gouaz Sc.



CARTE des 64. principales Etoiles des Playades
par M. Jeaurat, pour le 1er Janvier 1780
Sud
Nord
Occident
Orient
Dégrés d'Ascension droite
Degrés de declinaison
Parallele à l'Equateur
Parallele à l'Ecliptique
Merope
Alcione
Atlas
Pleione
Electra
Celeno
Maya
Taygeta
Asterope
Nebuleuse

M. Halley ſont celles qui s'en éloignent davantage ; d'ailleurs les erreurs de chacune de ces Tables ſont fort éloignées d'être conſtamment les mêmes, car

Pour l'oppoſition du 23 Mars 1590.

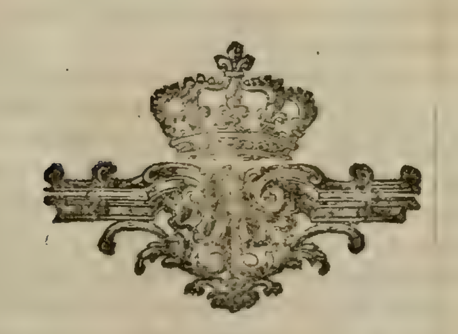
L'erreur des Tables de M. Caſſini étoit de	+	10′ 21″
L'erreur de mes Tables étoit ſeulement de	+	1. 21.

Pour l'oppoſition du 1.er Février 1754.

L'erreur des Tables de M. Caſſini étoit de	—	6. 40.
L'erreur de mes Tables étoit ſeulement de	—	2. 31.

Pour l'oppoſition du 24 Avril 1733.

L'erreur des Tables de M. Wargentin étoit de	+	1. 1.
L'erreur de mes Tables étoit ſeulement de	+	0. 29.



MÉMOIRE
SUR LA
PLANÈTE DE HERSCHEL.

Par M. DE LA LANDE. *(a)*

Lû le 22 Décemb. 1781. Remis le 1.er Oct. 1782.

LA nouvelle Planète qui occupe les Astronomes depuis le mois d'Avril 1781, est une des choses les plus singulières qu'on ait découvertes dans le Ciel, & l'on étoit bien loin de l'espérer. Depuis le temps que l'on cherche des Comètes, on n'en avoit jamais vu qui ressemblât à une petite Étoile; on ne soupçonnoit jamais ce qui paroissoit une petite Étoile d'avoir un mouvement; d'ailleurs on y donnoit peu d'attention, le nombre des Étoiles de septième grandeur est si prodigieux, qu'on auroit regardé comme impossible & inutile de les observer toutes & à plusieurs reprises, & cela eût été nécessaire pour savoir s'il n'y en avoit pas quelqu'une qui eût un mouvement.

Lorsqu'on avoit déterminé plusieurs petites Étoiles dans une région du Ciel, on croyoit superflu d'observer les autres, puisqu'il suffit d'avoir quelques points fixes dans chaque partie. Aussi voit-on en comparant les catalogues de Flamstéed, de Mayer, de Bradley, de la Caille, que plusieurs Étoiles qui se trouvent dans les uns, sont négligées dans les autres. Nous pouvions donc être encore bien des années sans connoître la Planète que M. Herschel vient de nous annoncer, si son habileté n'eût été secondée par un heureux hasard.

J'appelle le nouvel Astre *Planète* plutôt que *Comète :* il est

(a) Quoique ce Mémoire n'ait été lû qu'en 1781, l'Académie a cru pouvoir le publier dans ce volume, à cause de la nouveauté de l'objet, & de l'impatience que doivent avoir les Astronomes de savoir ce que l'on a fait à ce sujet.

vraî que les limites de ces dénominations ne ſont plus les mêmes qu'autrefois, puiſque les Comètes ſont de véritables Planètes, & ces limites ſont encore plus confondues par l'obſervation dont il s'agit; mais il me ſemble naturel de réſerver le nom de *Comètes* aux Aſtres dont les apparitions ſont courtes, rares, qui ſont long-temps hors de la portée de notre vue, & qui ſe font remarquer par les queues, les chevelures & les nébuloſités qu'on a vues juſqu'à préſent dans toutes les Comètes. J'appelle auſſi le nouvel aſtre *Planète de Herſchel;* à l'honneur de celui à qui nous devons cette curieuſe découverte; il lui a donné le nom de *Georgium Sidus;* M. Bode propoſe de l'appeler *Uranus;* M. de Sivry, *Cybèle;* M. Proſperin, *Neptune;* mais quelle raiſon pourroit l'emporter ſur la reconnoiſſance que nous devons à l'Auteur, & ſur l'intérêt des Sciences qui demande qu'on excite l'émulation?

M. Herſchel *(b)*, Membre de la Société Royale de Londres, Muſicien, né à Hanovre en 1738, mais établi à Bath en Angleterre, s'occupe depuis dix ans, à faire des Téleſcopes, par goût & par curioſité, il y a réuſſi ſupérieurement; car M. Maskelyne, au mois de Juin 1782, ayant comparé un de ces téleſcopes de M. Herſchel avec le meilleur téleſcope de 6 pieds que l'on ait du célèbre Short, a trouvé celui de M. Herſchel fort ſupérieur. Dans une lettre que j'ai vue de M. Herſchel, il aſſure en avoir fait un qui groſſit quinze cents fois, & cela en donnant une grande ouverture au miroir par le moyen d'une courbure parabolique. Il parle d'un téleſcope de 20 pieds qui groſſit trois cents fois, dans ſes Obſervations ſur les taches de Jupiter & de Mars *(Philoſ. Tranſactions, 1781, pages 121 & 127).* Il y parle d'un groſſiſſement de deux mille dix fois, &c. dont il a fait uſage à cette occaſion. *(Phil. Tranſ. 1781, page 492).* Enfin, M. Magellan écrivoit au mois de Juin 1782, qu'il avoit vu un téleſcope

(b) On a écrit ce nom de dix façons différentes dans les Journaux, mais c'eſt d'après une lettre de M. Herſchel lui-même, que je l'écris ainſi, & d'après les Tranſactions philoſophiques de 1781: *Account of a Comet, by M. Herſchel, F. R. S.*

Newtonien de 7 pieds, fait par M. Herſchel, & qui groſſit ſix mille fois, il ajoute que l'Auteur eſt un prodige d'adreſſe & de patience, & qu'il vient d'obtenir du Roi une penſion de trois cents livres ſterling, & un logement à Windſor en conſidération du ſuccès étonnant auquel il eſt parvenu, & pour le mettre à portée de continuer à s'occuper de l'Aſtronomie. C'eſt à ce talent extraordinaire de M. Herſchel, pour la conſtruction des téleſcopes, que nous devons la découverte de la Planète qui fait l'objet de ce Mémoire.

Ce fut le 13 Mars 1781, que M. Herſchel, regardant avec un téleſcope de 7 pieds, les Étoiles qui ſont vers les pieds des Gemeaux, vit un petit Aſtre différent des Étoiles de même lumière, qui paroiſſoit plus large, & qu'il ſoupçonna être une Comète *(Philoſophical Tranſactions, 1781, p. 492)*; il regarda cet Aſtre avec un équipage qui groſſiſſoit neuf cents trente-deux fois, & il trouva que ſon diamètre étoit encore plus grand, tandis que celui des Étoiles ne changeoit pas; il le compara avec beaucoup de petites Étoiles, & il en donne la configuration dans ſon Mémoire *(Philoſ. Tranſ. 1781)*, avec la deſcription d'un micromètre de ſon invention: il fut aſſuré deux jours après, que ce n'étoit pas une Étoile, en voyant que cet Aſtre avoit changé de place; mais il avoit préſumé, dès la première vue, que ce n'étoit pas une Étoile, & cela me paroît ſurprenant, parce que dans ma lunette, qui groſſit cent vingt fois, cette Planète ne me paroît pas différente d'une Étoile de ſeptième grandeur; mais il ſeroit encore plus difficile de croire que M. Herſchel ſe fût aperçu de ſon mouvement, ſi quelque raiſon n'avoit fixé ſon attention ſur un auſſi petit Aſtre, confondu avec tant d'autres; il me paroît donc certain que M. Herſchel dut cette découverte à la grande force de ſon téleſcope.

Il en donna bientôt avis à M. Maskelyne, Aſtronome royal d'Angleterre; celui-ci ayant examiné les petites Étoiles auxquelles M. Herſchel avoit comparé la Planète, dès le 17 Mars, trouva que ce jour-là, à $10^h 40'$ temps moyen, elle étoit à $83^d 59' 44''$ d'aſcenſion droite, & à $23^d 33' 8''$ de

de déclinaiſon boréale; il s'aſſura du mouvement les jours ſuivans; je rapporterai ſes obſervations ci-après, *page 538*.

M. Maskelyne écrivit, dès les premiers jours d'Avril, cette nouvelle à Paris; M. Meſſier commença à obſerver la Planète le 16 Avril, & continua juſqu'à la fin d'Octobre; je rapporterai de même, ci-après, les obſervations de M. Meſſier.

M.rs le Monnier, Méchain, d'Agelet, Léveſque & moi, avons continué ces obſervations à Paris *(c)*, de même que M.rs Reggio & de Ceſaris à Milan, M. Slope à Piſe, M. Darquier à Toulouſe, M. Bode à Berlin, M. Wargentin à Stockolm, &c.

Auſſitôt qu'on eut à Paris quelques jours d'obſervations, on entreprit de calculer cet Aſtre, comme les Comètes ordinaires, dans une parabole; M.rs Méchain, l'abbé Boſcovich, le Préſident de Saron, de la Place, Lexell, firent diverſes tentatives, mais comme on ne penſoit pas à ſuppoſer cette Planète dix-huit fois plus loin que le Soleil, on repréſentoit fort bien quelques obſervations, & peu de jours après, l'écart étoit conſidérable.

M. le Préſident de Saron fut le premier qui, le 8 Mai, s'aperçut que cette Planète devoit être fort éloignée de nous; il l'eſtimoit au moins douze fois plus loin que le Soleil, & les calculs commencèrent à s'accorder beaucoup mieux.

M. l'abbé Boſcovich compoſa au commencement de Juin, un ſavant Mémoire, ou par une théorie ingénieuſe & ſimple; il montra qu'il y avoit quatre paraboles qui pouvoient ſatisfaire au petit mouvement qu'on avoit obſervé juſqu'alors. M. de la Place publia des Élémens, dans la Connoiſſance des Temps de 1784.

M. Lexell qui étoit alors en Angleterre, écrivoit vers le même temps qu'on repréſentoit fort bien ſon mouvement par un cercle qui avoit un rayon égal à dix-huit fois la diſtance

---

(c) Voyez le Journal de Paris, des 27 Avril, 29 Mai, 24 Juillet, 26 Décembre 1781, 22 Juillet 1782; le Journal des Savans, Juin 1781 & Février 1782; le Mercure des 4 Août 1781 & 6 Avril 1782.

du Soleil; dès-lors il me parut qu'on devoit lui donner le nom de *nouvelle Planète ;* le 24 Juillet, M. Lexell qui avoit calculé ſon mouvement dans différentes hypothèſes paraboliques, vit que dans toutes les paraboles qui avoient depuis 14 juſqu'à 18 de diſtance périhélie, on trouvoit à peu-près le même accord entre le calcul & l'obſervation. On comprit alors qu'il falloit attendre que la Planète eût parcouru un arc plus étendu pour entreprendre de calculer ſon orbite.

Mais lorſque j'ai eu huit mois d'obſervations, la Planète ayant été en conjonction & en oppoſition, & la ſituation de la Terre nous l'ayant fait voir dans toutes les poſitions, avec un mouvement de plus de ſix degrés, j'ai cru que l'on pouvoit former des hypothèſes au moins pour calculer ſa route dans le cours de l'année 1782, voici le réſultat de mes calculs qui ont aſſez bien réuſſi.

J'ai pris trois obſervations exactes, confirmées chacune par les précédentes & les ſuivantes, & dans leſquelles la Planète avoit été comparée à la même étoile *Propus* ou *H* des Gemeaux; la première & la dernière ſont de M. Méchain, la ſeconde de M. Meſſier; je les ai calculées, & j'ai trouvé les réſultats ſuivans. J'appelle *longitude héliocentrique moyenne de la Planète*, celle qui eſt corrigée de l'aberration & de la nutation, c'eſt-à-dire qui eſt comptée de l'Équinoxe moyen, & telle qu'on la verroit s'il n'y avoit point d'aberration. Les lieux du Soleil ſont calculés par les Tables de la Caille, mais ſans y employer la nutation, afin qu'ils ſoient, ainſi que ceux de la Planète, comptés de l'Équinoxe moyen.

Temps moyen des Obſervations.	*25 Avril 1781, à 9h 47'.*	*31 Juillet 1781, à 15h 33'.*	*12 Décemb. 1781, à 10h 10'.*
Aſcenſion droite obſervée	85d 15' 27"	91d 7' 49"	91d 23' 31"
Déclinaiſon boréale obſervée	23. 35. 34	23. 40. 25	23. 42. 47.
Longitude	2s 25. 39. 17	3s 1. 2. 7	3s 1. 16. 28.
Latitude boréale	0. 11. 36	0. 12. 24	0. 14. 54.
Nutation à ajouter à la longitude obſervée	+ 10	+ 8	+ 7.
Aberration en longitude	+ 19	+ 21	− 18.

Temps moyen des Observations.	*25 Avril 1781, à 9h 47'.*	*31 Juillet 1781, à 15h 33'.*	*12 Décemb. 1781, à 10h 10'.*
Longitude du Soleil comptée de l'Équinoxe moyen........	1s 5d 58' 53"	4s 9d 7' 13"	8s 21d 21' 50"
Logarithme de la dist. du Soleil..	0,003196	0,006272	9,992993.
Longit. héliocentrique moyenne calculée...............	2. 27. 58. 56	2. 29. 9. 3	3. 0. 45. 31.
Latitude héliocentrique.......	0. 11. 59	0. 12. 55	0. 14. 8.

Ayant calculé la première & la dernière observation, je les ai réduites au Soleil, en supposant connue la distance de la Planète au Soleil, & calculant la parallaxe du grand orbe; cela m'a donné un mouvement vu du Soleil, dans l'espace de deux cents trente-un jours.

La même distance avec laquelle j'avois calculé la parallaxe du grand orbe, m'a donné la durée de la révolution par rapport aux Étoiles fixes, par la règle de Képler; j'en ai déduit le mouvement de la Planète en deux cents trente-un jours, par rapport aux Équinoxes moyens; le mouvement devoit être le même que celui qui étoit tiré des observations réduites au Soleil, si la distance supposée de la Planète au Soleil étoit bonne: tant que ma distance a été mal supposée, elle m'a donné une erreur sur les parallaxes annuelles, sur les longitudes héliocentriques & sur le mouvement que j'en avois déduit; d'un autre côté, la révolution de la Planète autour du Soleil, déduite de la même distance, étant défectueuse, me donnoit une erreur sur le mouvement dans l'espace de deux cents trente-un jours, & cette erreur étant différente de la première, je trouvois pour le mouvement deux quantités différentes.

J'ai donc fait varier la distance de la Planète, jusqu'à ce que le mouvement héliocentrique, calculé avec cette distance, fût le même que celui qui résultoit de l'intervalle des temps & de la durée de la révolution tirée de la distance; j'ai trouvé par-là qu'il falloit supposer la distance 18,931, & la révolution sidérale, 82 années $\frac{37}{100}$. Par-là le mouvement de la Planète, corrigé de l'aberration, de la précession & de

la nutation, c'eſt-à-dire réduit au mouvement moyen, par rapport aux Étoiles fixes, étoit de $2^d\,46'\,3''$ ou de $2^d\,46'\,35''$ par rapport aux Équinoxes, le même que par le calcul des parallaxes annuelles, en employant la diſtance 18,931.

Enſuite j'ai pris l'obſervation intermédiaire du 31 Juillet éloignée de la première de quatre-vingt-dix-ſept jours $\frac{24}{100}$, j'ai calculé avec les mêmes élémens la longitude géocentrique moyenne, & je l'ai trouvée de $3^f\,1^d\,2'\,41''$, plus grande de 5 ſecondes ſeulement que celle qui étoit déduite de l'obſervation, & qui eſt de $3^f\,1^d\,2'\,36''$, par rapport au lieu moyen de l'Équinoxe: cet accord eſt plus grand que celui que comportent les obſervations, dans leſquelles on a même négligé la différence de réfraction entre la Planète & l'Étoile. Ainſi il eſt inutile, quant à préſent, de chercher une autre courbe que le cercle pour repréſenter le mouvement de cette Planète. Le cercle ſuffira pour pouvoir prédire le cours du nouvel Aſtre d'ici à une année ou deux avec une exactitude ſuffiſante.

Pour cet effet il ſuffira de ſuppoſer la longitude héliocentrique pour le 1.er Janvier 1782 à midi, $3^f\,0^d\,59'\,22''$, & le mouvement diurne par rapport aux Équinoxes de $43'',13$ ou de $4^d\,22'\,22''$ par an. Enſuite avec la longitude héliocentrique de la Planète & celle du Soleil, on cherchera la longitude géocentrique de la Planète par les méthodes ordinaires. J'ai négligé dans ces calculs la latitude qui n'eſt que de quelques minutes.

Ayant vu que cette hypothèſe s'accordoit ſi bien avec un intervalle de près de huit mois, j'ai calculé d'autres obſervations, antérieures, intermédiaires ou poſtérieures, & j'ai trouvé un accord aſſez ſatisfaiſant, de même que dans la conjonction & l'oppoſition déterminées par M. Méchain au 19 Juin & au 21 Décembre, & dans la ſtation qui eſt arrivée le 7 Octobre.

Voici trente-deux longitudes apparentes obſervées par M.rs Maskelyne, le Monnier, Meſſier, Méchain, d'Agelet, Léveſque & moi; elles ſont ſans corrections, excepté celles

de la conjonction & de l'opposition qui sont des longitudes moyennes corrigées de l'aberration & de la nutation; j'y ai joint l'erreur du calcul de mon hypothèse, ou ce qu'il faut appliquer à mon calcul pour l'accorder avec les observations.

ANNÉES, MOIS & JOURS.			TEMPS MOYEN.	LONGITUDE OBSERVÉE.	ERREUR.
			H. M.	S. D. M. S.	M. S.
1781.	Avril.	1.	10. 8	2. 24. 49. 30	+ 1. 28.
		6.	7. 45	2. 24. 57. 33	+ 1. 2.
		16.	9. 8	2. 25. 17. 20	+ 0. 18.
		25.	9. 47	2. 15. 39. 17	0. 0.
	Mai.	26.	8. 42	2. 27. 13. 4	— 0. 22.
Conj.	Juin.	19.	5. 31	2. 28. 38. 14	— 0. 9.
	Juillet.	20.	15. 11	3. 0. 27. 36	+ 0. 22.
		31.	15. 33	3. 1. 2. 7	— 0. 5.
	Octob.	5.	17. 12	3. 2. 54. 46	— 0. 12.
	Déc.	12.	10. 10	3. 1. 16. 28	0. 0.
Oppos.		21.	18. 3	3. 0. 52. 13	+ 0. 8.
1782.	Janv.	3.	7. 40	3. 0. 20. 15	+ 0. 9.
		18.	8. 16	2. 29. 44. 52	— 0. 9.
		26.	6. 10	2. 29. 29. 5	+ 0. 27.
	Févr.	12.	8. 27	2. 29. 2. 40	+ 0. 25.
		15.	6. 47	2. 28. 59. 40	+ 0. 27.
	Mars.	4.	7. 50	2. 28. 49. 38	+ 0. 3.
		11.	8. 57	2. 28. 50. 9	+ 0. 3.
		26.	10. 9	2. 29. 0. 29	+ 0. 26.
	Avril.	8.	7. 55	2. 29. 18. 13	+ 0. 22.
		19.	8. 17	2. 29. 39. 35	+ 0. 19.
		27.	8. 39	2. 29. 58. 23	+ 0. 20.
	Mai.	7.	8. 13	3. 0. 25. 8	+ 0. 45.
		24.	8. 44	3. 1. 17. 50	+ 0. 55.
		29.	9. 18	3. 1. 34. 0	+ 0. 35.
	Juillet.	18.	15. 22	3. 4. 32. 54	+ 2. 17.
		20.	15. 3	3. 4. 39. 18	+ 1. 57.
		21.	15. 0	3. 4. 42. 39	+ 1. 56.
	Août.	16.	16. 16	3. 6. 1. 54	+ 1. 36.
		23.	16. 30	3. 6. 19. 40	+ 2. 5.
		31.	15. 53	3. 6. 37. 41	+ 2. 11.
	Sept.	23.	15. 48	3. 7. 13. 39	+ 2. 26.

J'ai employé dans mon calcul l'aberration, qui est + 24 secondes vers la conjonction, & — 17 secondes vers l'opposition. Dans la plupart de ces observations, la Planète a été comparée avec l'étoile *Propus* ou *H* des Gemeaux, de cinquième grandeur; on trouve cependant des inégalités de 15 à 20 secondes dans la marche des observations, mais il est assez difficile de faire parcourir exactement à une étoile le fil d'un micromètre, & de s'assurer que les deux fils sont rigoureusement perpendiculaires l'un à l'autre.

Voyant que l'erreur de ma première hypothèse s'étoit accrue au mois de Juillet 1782 jusqu'à 2 minutes, j'ai voulu voir quel changement il faudroit y faire pour accorder l'observation du 21 Juillet 1782, avec celle du 25 Avril 1781, j'ai trouvé la distance 18,893, la révolution 82 ans $\frac{12}{100}$, le mouvement diurne par rapport aux Équinoxes 43",22, & la longitude héliocentrique moyenne le 1.er Janvier 1782, $3^{f}\ 1^{d}\ 1'\ 0''$. Mais cette nouvelle hypothèse donne 1' 27" de trop pour la longitude en opposition observée au mois de Décembre; cela annonce une inégalité réelle dans le mouvement de la Planète, puisque le même cercle ne peut représenter les observations extrêmes & les intermédiaires dans l'espace de quinze mois. Mais cette inégalité est si petite, qu'on ne peut espérer de la déterminer avec quelqu'exactitude, si ce n'est au bout de quelques années d'observations.

Cette distance que j'ai trouvée 18,931 & 18,893, seroit, suivant M. Lexell, 18,886; suivant M. Prospérin, 18,878; suivant M. Klinkenberg 18,809: M. Oriani dans les *Ephémérides de Milan*, fait cette distance de 20,873; mais on voit qu'il s'y est glissé une erreur considérable, relativement à la conjonction de la Planète.

J'ai fait aussi quelques essais pour déterminer l'inclinaison & le nœud de cette orbite, quoique la petitesse du mouvement en latitude rende cette détermination très-imparfaite.

Les latitudes observées le 25 Avril & le 12 Décembre 1781, 11' 36" & 14' 54" étant réduites au Soleil,

ſont de 11′ 59″ & 14′ 8″, avec ces deux latitudes & le mouvement en longitude ou l'arc de l'Écliptique, compris entre les deux cercles de latitude 2^d 46′ 3″, on trouve la diſtance au nœud le 25 Avril 15^d 4′, le lieu du nœud 2^f 12^d 54′, & l'inclinaiſon 46 minutes.

Les latitudes du 16 Avril 1781 & du 26 Mars 1782, qui ſont de 11′ 48″ & 15′ 5″, & vues du Soleil 12′ 7″ & 15′ 10″, avec un arc parcouru de 4^d 7′ 44″, donnent pour le lieu du nœud 2^f 12^d 2′, avec une inclinaiſon de 44 minutes. Cette détermination eſt un peu plus exacte que la précédente, & peut ſuffire pour donner une idée de la ſituation de cette orbite, & du changement que la Planète éprouve quant à ſa latitude. On voit qu'elle a paſſé par ſon nœud il y a quatre ans, elle ſera dans ſa plus grande latitude boréale vers 1798.

Quant à la grandeur de cette Planète, elle paroît comme une Etoile de ſixième à ſeptième grandeur, & ce n'eſt que quand il fait très-beau temps, qu'on peut la voir à la vue ſimple. Elle eſt un peu moins brillante que l'étoile 132e du Taureau dans le Catalogue de Flamſtéed; elle n'a l'air que d'une Étoile, même dans une lunette qui groſſit cent cinquante fois. Son diamètre apparent a été trouvé de 4 à 5 ſecondes par M. Herſchel *(Philoſ. Tranſ. 1781, p. 494).* M. Maskelyne l'eſtimoit de 3 ſecondes. Mais dans les diamètres meſurés, il y a toujours une partie à ôter pour l'effet de l'irradiation ou de l'aberration des lunettes: ſi l'on ſuppoſe que le diamètre apparent du diſque réel de la planète, ſoit de 3 ſecondes, on trouve qu'elle doit avoir neuf mille quatre cents ſoixante lieues de diamètre réel, c'eſt-à-dire trois fois & un tiers celui de la Terre.

Le mouvement moyen de la nouvelle Planète, eſt, ſuivant mon calcul, de 43 ſecondes par jour, mais en conjonction elle fait 3′ 36″ par jour, & en oppoſition elle rétrograde de 2′ 48″ par jour. Sa rétrogradation eſt d'environ quatre degrés & dure cent cinquante jours chaque année.

En comparant avec mon calcul l'obſervation du 4 Mars 1781, il me fut aiſé de voir que la Planète devoit être ſtationnaire le ſurlendemain. Car pour calculer le lieu de la Planète vue de la Terre, j'étois obligé d'ajouter la tangente de 42 degrés, avec celle du ſupplément de la demi-commutation 53ᵈ 40′, pour avoir la tangente d'un arc 50ᵈ 45′, qui ajouté avec 53ᵈ 40′ devoit faire l'élongation. Le ſupplément de la demi-commutation diminuoit de 29′ 37″ par jour, & le lieu du Soleil augmentoit de 59′ 57″, il falloit donc que l'arc 50ᵈ 45′ diminuât de 30′ 20″, afin que la diminution de l'élongation compensât exactement l'augmentation de la longitude du Soleil. En conſidérant la différence des logarithmes des tangentes, d'une minute à l'autre, vers 53ᵈ 40′, je voyois qu'elle étoit de 2647; or, 30′ 20″ ſont à 29′ 37″, comme 2647 à 2584. Ainſi la différence devoit être plus petite de 63 pour l'arc cherché; mais elle étoit dans le calcul du 4 Mars plus petite de 68, & je voyois qu'elle diminuoit de trois ou quatre parties chaque jour, ainſi je vis qu'elle ſeroit réduite à 63 le 6 au matin. En effet, je trouve que le 6 au ſoir à 7 heures 40 minutes, la Planète devoit être à 88ᵈ 49′ 33″ de longitude, plus avancée d'une ſeconde que la veille à pareille heure; elle étoit alors à 3ˢ 12ᵈ 25′ 25″ d'élongation. Elle a rétrogradé de 4ᵈ 4′ depuis le 7 Octobre 1781 qu'elle avoit été ſtationnaire, juſqu'au 6 Mars 1742. Au reſte, l'élongation du point de la ſtation peut ſe trouver aiſément par une formule très-ſimple que M. Lexell m'a envoyée à cette occaſion; car la diſtance 18,9 diviſée par la racine de 19,9, c'eſt-à-dire par la ſomme des deux diſtances de la Planète & de la Terre au Soleil, donne la tangente de l'angle 76ᵈ 46′, élongation au moment de la ſtation, en ſuppoſant les deux orbites circulaires & concentriques.

De-là il ſuit qu'en 1781, ayant quatre degrés de moins en longitude, cette Planète fut ſtationnaire le 2 Mars, à 83ᵈ 57′ d'aſcenſion droite, c'eſt-à-dire treize jours avant la première obſervation de M. Herſchel, en ſorte que ſi le haſard eût

eût dirigé ſon téleſcope vers cette Étoile onze jours plus tôt, il ne ſe ſeroit point aperçu de ſon mouvement, & peut-être cette découverte curieuſe eût été perdue pour nous.

Pour calculer dès-à-préſent la véritable orbite de cette Planète, il ne faudroit que retrouver quelque veſtige de ſon apparition au temps où l'on a fait les catalogues d'Étoiles que nous avons & dans leſquels elle devroit ſe trouver.

M. Bode, Aſtronome de Berlin, qui a ſuivi la Planète depuis le mois d'Août 1780, a donné un Mémoire à ce ſujet dans le premier volume de ſes Éphémérides Allemandes pour 1784, imprimé au mois de Septembre 1781; il y rapporte d'abord une hypothèſe circulaire, dans laquelle il ſuppoſe la diſtance 18,928. Il dit enſuite dans ce Mémoire, que l'Étoile 964 du Catalogue de Mayer, indiquée pour 1756, a $348^{d}\ 0'\ 2''$ d'aſcenſion droite, & $6^{d}\ 2'\ 3''$ de déclinaiſon, pourroit bien être la Planète de Herſchel; M. Bode n'a trouvé aucune Étoile dans ce point-là, quelque recherche qu'il ait faite avec ſa lunette; mais il faudroit ſavoir dans quelle année & dans quel mois Mayer avoit fait l'obſervation de cet Aſtre, pour avoir une poſition exacte & dont on put faire uſage.

Au mois d'Avril 1782, M. Bode a fait ſur cette Planète un ſecond Mémoire deſtiné au troiſième volume des Mémoires de la Société des Phyſiciens de Berlin, & qui ſera auſſi dans ſes Éphémérides pour 1785; il obſerve que Tycho dans ſon Catalogue, place une Étoile de la ſixième grandeur au-deſſus de l'Étoile μ de la queue du Capricorne, *n.° 27* de ſon Catalogue. Hévélius ne put la retrouver, & c'eſt-là en effet que notre Planète devoit être en 1587, ſuivant le calcul de M. Bode; mais notre Planète eſt bien petite pour avoir été obſervée par Tycho-Brahé.

On pouvoit ſur-tout examiner les étoiles du Zodiaque de la Caille, vers le point équinoxial où la Planète devoit être à la fin de 1761 & au commencement de 1762, temps où cet habile Obſervateur travailloit à ſon Catalogue d'Étoiles zodiacales, imprimé dans les Éphémérides de 1765 à 1784.

C'est parmi les premières & les dernières Étoiles de ce Catalogue qu'on pouvoit faire cette recherche, en regardant s'il manquoit dans le Ciel quelque Étoile observée alors par la Caille. Comme j'ai entre les mains ses registres originaux, nous y aurions trouvé une époque fixe, & nous aurions eu tout-d'un-coup une observation éloignée de vingt ans, pour calculer la révolution de la Planète & l'inégalité de son mouvement. Mais M. Lévesque qui a fait cet examen, n'a pas eu la satisfaction d'y trouver ce qu'il cherchoit, & les petites Étoiles du Catalogue de la Caille, se sont trouvées dans le Ciel à la place où il les avoit observées.

OBSERVATIONS
DE LA PLANÈTE DE HERSCHEL.
Observations de M. Maskelyne, à Gréenwich.

MOIS & JOURS.	TEMPS MOYEN.		ASCENSION DROITE.			DÉCLINAISON		
	H.	M.	D.	M.	S.	D.	M.	S.
1781. Mars 17	10.	40	83.	59.	44	23.	33.	8.
Avril. 1	9.	58	84.	21.	9	23.	34.	1.
2	8.	34	84.	21.	56	25.	33.	37.
3	9.	6	84.	24.	29	23.	33.	40.
6	7.	35	84.	29.	57	23.	33.	58.
9	10.	41	84.	36.	14	23.	34.	21.
10	9.	7	84.	38.	14	23.	34.	27.
13	8.	51	84.	44.	56	23.	34.	39.
14	8.	7	84.	47.	8	23.	34.	39.
16	8.	26	84.	51.	50	23.	34.	50.
18	8.	0	84.	56.	50	23.	35.	3.
Mai. 2	8.	30	85.	36.	27	23.	36.	22.
11	8.	28	86.	4.	49	23.	36.	51.
22	9.	6	86.	43.	20	23.	37.	40.
27	8.	56	87.	1.	47	23.	38.	1.
28	9.	2	87.	5.	19	23.	37.	45.

Observations de M. Messier, à Paris.

MOIS & JOURS.	TEMPS VRAI.	ASCENSION DROITE.	DÉCLINAISON.
	H. M. S.	*D. M. S.*	*D. M. S.*
1781. Avril. 16	9. 8. 45	84. 51. 31	23. 34. 58.
17	7. 58. 55	84. 53. 39	23. 35. 0.
19	8. 7. 26	84. 58. 50	23. 35. 6.
20	7. 38. 38	85. 1. 26	23. 35. 7.
21	8. 13. 28	85. 4. 20	23. 35. 9.
22	8. 47. 8	85. 6. 43	23. 35. 18.
23	8. 27. 33	85. 9. 48	23. 35. 26.
24	7. 47. 9	85. 12. 13	23. 35. 30.
25	7. 50. 30	85. 15. 5	23. 35. 34.
26	9. 50. 9	85. 18. 16	23. 35. 40.
28	8. 40. 44	85. 23. 46	23. 35. 53.
29	8. 37. 14	85. 26. 37	23. 35. 52.
30	9. 51. 54.	85. 29. 30	23. 35. 56.
Mai. 1	8. 11. 9	85. 32. 41	23. 36. 3.
2	8. 27. 3	85. 35. 53	23. 36. 6.
5	8. 58. 40	85. 45. 28	23. 36. 23.
6	8. 10. 49	85. 48. 24	23. 36. 29.
7	8. 39. 7	85. 51. 38	23. 36. 38.
8	8. 49. 49	85. 54. 43	23. 36. 41.
11	8. 46. 22	86. 5. 1	23. 36. 54.
12	8. 41. 31	86. 8. 18	23. 36. 57.
16	8. 29. 56	86. 22. 5	23. 37. 18.
20	8. 54. 9	86. 36. 7	23. 37. 43.
21	8. 50. 11	86. 39. 43	23. 37. 43.
23	8. 43. 26	86. 46. 59	23. 37. 52.
24	8. 45. 0	86. 50. 35	23. 37. 52.
25	8. 49. 54	86. 54. 11	23. 37. 53.
26	8. 45. 49	86. 57. 46	23. 37. 56.
27	8. 47. 32	87. 1. 31	23. 37. 57.

MOIS & JOURS.		TEMPS VRAI.			ASCENSION DROITE.			DÉCLINAISON.		
		H.	M.	S.	D.	M.	S.	D.	M.	S.
Mai.	28	8.	49.	30	87.	5.	3	23.	37.	57.
Juillet.	17	15.	11.	25	90.	19.	17	23.	40.	11.
	18	15.	4.	20	90.	22.	54	23.	40.	17.
	19	15.	14.	8	90.	26.	30	23.	40.	18.
	20	15.	5.	7	90.	30.	5	23.	40.	21.
	21	14.	45.	0	90.	33.	28	23.	40.	22.
	24	15.	8.	14	90.	44.	3	23.	40.	26.
	26	15.	6.	11	90.	51.	3	23.	40.	27.
	29	15.	21.	49	91.	1.	6	23.	40.	27.
	30	15.	19.	46	91.	4.	24	23.	40.	25.
	31	15.	32.	31	91.	7.	38	23.	40.	25.
Août.	2	15.	30.	52	91.	14.	12	23.	40.	24.
	3	15.	18.	25	91.	17.	22	23.	40.	25.
	4	15.	9.	30	91.	20.	29	23.	40.	26.
	8	15.	36.	24	91.	32.	56	23.	40.	23.
	12	15.	36.	6	91.	44.	41	23.	40.	22.
	15	15.	52.	28	91.	53.	12	23.	40.	22.
	16	15.	55.	28	91.	55.	51	23.	40.	17.
	21	15.	16.	45	92.	8.	49	23.	40.	14.
	26	16.	32.	6	92.	21.	7	23.	40.	8.
Septembre.	5	15.	33.	28	92.	41.	15	23.	40.	0.
	10	16.	20.	18	92.	49.	58	23.	39.	59.
	14	15.	53.	42	92.	55.	36	23.	39.	57.
	15	15.	33.	57	92.	56.	59	23.	39.	57.
	28	15.	30.	44	93.	8.	39	23.	39.	57.
Octobre.	5	17.	24.	32	93.	10.	50	23.	40.	0.
	7	17.	17.	55	93.	11.	2	23.	40.	5.
	10	17.	34.	22	93.	10.	41	23.	40.	11.
	17	10.	1.	35	93.	8.	26	23.	40.	15.
	22	15.	50.	12	93.	4.	29	23.	40.	25.

Une chute effroyable a interrompu le cours des Observations de M. Messier, le 6 Novembre 1781.

Observations de M. Méchain, à Paris.

On a marqué d'un *d* les observations que l'on croit un peu moins exactes que les autres.

MOIS & JOURS.	TEMPS MOYEN.			ASCENSION DROITE apparente.			DÉCLINAISON.		
	H.	*M.*	*S.*	*D.*	*M.*	*S.*	*D.*	*M.*	*S.*
1781. Avril. 25	9.	47.	0	85.	15.	27	23.	35.	34.
Mai. 5	9.	2.	0	85.	45.	34	23.	36.	36.
7	9.	6.	0	85.	52.	1	23.	36.	46.
Décembre. 8	10.	5.	0	91.	34.	30	23.	42.	37. *d.*
9	8.	54.	50	91.	32.	14 *d.*	23.	42.	42.
10	10.	13.	14	91.	29.	10	23.	42.	40.
12	10.	10.	9	91.	23.	31	23.	42.	47.
14	9.	38.	38	91.	18.	19 *d.*	23.	43.	0.
20	8.	58.	30	91.	1.	10	23.	43.	5.
22	9.	14.	40	90.	55.	47	23.	43.	5.
23	9.	13.	12	90.	52.	35 *d.*	23.	43.	6.
29	8.	12.	30	90.	36.	0	23.	43.	12.
1782. Janv. 3	7.	40.	0	90.	22.	2	23.	43.	17.
6	8.	6.	10	90.	14.	8	23.	43.	21.
18	8.	16.	30	89.	43.	25	23.	43.	25.
26	6.	10.	0	89.	26.	14	23.	43.	27.
Février. 1	7.	20.	46	89.	14.	20	23.	43.	25.
15	6.	47.	30	88.	54.	1	23.	43.	12.
16	6.	29.	0	88.	53.	0	23.	43.	12.
17	6.	29.	46	88.	52.	6	23.	43.	12.
18	6.	27.	0	88.	51.	3	23.	43.	16.
20	6.	32.	0	88.	49.	13	23.	43.	13. ½
21	6.	29.	0	88.	48.	23	23.	43.	12.
Mars. 4	6.	52.	0	88.	43.	10	23.	43.	12.
11	8.	47.	0	88.	43.	42	23.	43.	12.
16	9.	0.	0	88.	46.	0	23.	43.	6.
Avril. 4	9.	37.	0	89.	7.	37	23.	43.	11.
Mai. 7	9.	26.	0	90.	27.	38	23.	43.	11.
13	9.	1.	0	90.	46.	43	23.	43.	8.
Août. 16	16.	16.	0	96.	35.	4	23.	36.	4.
21	16.	19.	0	96.	49.	5	23.	35.	32.
23	16.	30.	0	96.	54.	27	23.	35.	27. *d.*

Observations de M. d'Agelet, faites à Paris, à l'École Royale militaire, avec le Mural de 7 pieds ½ de rayon, qui appartient à M. Bergeret.

MOIS & JOURS.		TEMPS VRAI.	ASCENSION DROITE apparente.	DÉCLINAISON APPARENTE.
		H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.
1782. Janv.	26	9. 43. 38	89. 25. 29	23. 43. 31.
Février.	6	8. 33. 31	89. 5. 56	23. 43. 28.
	8	8. 25. 23	89. 2. 39	23. 43. 22.
	13	8. 5. 17	88. 56. 0	23. 43. 21.
	16	7. 53. 30	88. 52. 52	23. 43. 16.
	17	7. 49. 34	88. 51. 48	23. 43. 16.
	27	7. 11. 5	88. 44. 41	23. 43. 12.
Mars.	4	6. 42. 30	88. 43. 24	23. 43. 8.
	8	6. 37. 44	88. 43. 14	23. 43. 9.
	11	6. 26. 46	88. 43. 57	23. 43. 10.
	12	6. 23. 9	88. 44. 16	23. 43. 6.
	13	6. 19. 30	88. 44. 25	23. 43. 7.
	15	6. 12. 19	88. 45. 28	23. 43. 9.

Observations de M. Wargentin, faites à Stockolm.

Les trois dernières ont été faites à Upsal.

MOIS & JOURS.	TEMPS VRAI.	LONGITUDE.	LATITUDE.
	H. M.	*S. D. M. S.*	*D. M. S.*
1781. Sept. 14	11. 50	3. 2. 41. 46	....
30	9. 53	3. 2. 53. 41	0. 14. 5,9.
Octobre. 16	8. 56	3. 2. 53. 15	0. 14. 9.
Novembre. 3	8. 38	3. 2. 36. 24	0. 14. 45.
23	7. 29	3. 2. 1. 5	0. 15. 2,6.
Décembre. 9	6. 27	3. 1. 23. 55	0. 15. 24,7.
1782. Janv. 1	7. 46	3. 0. 25. 34	0. 15. 29.
23	5. 49	2. 29. 34. 29	0. 15. 37.
Février. 11	5. 38	2. 29. 3. 34	0. 17. 34.
27	6. 21	2. 28. 51. 13	0. 17. 15.
Mars. 6	5. 53	2. 28. 49. 43	0. 15. 10.
17	8. 31	2. 28. 52. 39	0. 15. 16.
25	8. 12	2. 28. 59. 20	0. 15. 9.
Avril. 2	9. 12	2. 29. 9. 1	0. 15. 17.
6	7. 47	2. 29. 14. 59	0. 15. 15.
16	8. 38	2. 29. 23. 15	0. 17. 3.
28	10. —	3. 0. 0. 57	....
Mai. 6	10. 37	3. 0. 22. 34	0. 15. 5.
7	10. 31	3. 0. 25. 19	0. 14. 54.

Il y a une suite d'Observations dans les Éphémérides de Milan, pour 1783, qui vont du 12 Mai au 23 Octobre 1781.

Observations de M. Jean-René Lévesque, faites au Collége royal, à Paris.

MOIS & JOURS.	TEMPS MOYEN.	ASCENSION DROITE apparente.	DÉCLINAIS. APPARENTE.	ERREUR de mon hypot. sur la LONGITUD.
1782. Sept. 2	14^h 50′	97^d 18′ 44″	23^d 34′ 35″	+ 2′ 24″
4	13. 57	97. 22. 48	....	+ 2. 21.
5	15. 38	97. 24. 59	23. 33. 55	+ 2. 23.
6	15. 12	97. 26. 57	23. 33. 48	+ 2. 18.
8	16. 9	97. 30. 31	23. 33. 47	+ 2. 2.
9	16. 3	97. 32. 50	23. 33. 47	+ 2. 29.
10	16. 12	97. 34. 38	23. 33. 47	+ 2. 27.
13	16. 6	97. 39. 44	23. 33. 33	+ 2. 29.
16	15. 48	97. 44. 22	23. 33. 11	+ 2. 26.
23	15. 48	97. 53. 18	23. 33. 11	+ 2. 26.
25	14. 0	97. 55. 32	23. 33. 8	+ 2. 38.

Ces observations ont été faites avec la lunette achromatique de 3 pieds ½, dont j'ai donné les dimensions dans le quatrième volume de mon *Astronomie, page 664*, garnie d'un nouveau micromètre de M. Mégnié.

M. Lévesque, dont j'ai publié plusieurs fois les calculs, s'occupe actuellement des observations, avec autant de succès que de courage, dans mon observatoire du Collége royal. Je viens d'y placer, au mois de Septembre 1782, un mural de trois pieds de rayon, dont M. Godin a donné la description dans nos Mémoires de 1731, & qui a long-temps été dans une maison où M. Godin, M. de Fouchy & M. Bouguer ont habité successivement, rue des Postes, près l'Estrapade.

Voilà tout ce que j'ai pu faire jusqu'à présent sur un Astre qui occupera long-temps les Astronomes, & dont il sera souvent parlé dans nos Mémoires, jusqu'à ce qu'on ait déterminé tous ses élémens, & qu'on connoisse bien l'orbite de la *Planète de Herschel.*

OBSERVATION

OBSERVATION

Relative au second Mémoire contenu dans ce volume, page 385, *sur le moyen de dissoudre la Platine par l'Acide nitreux.*

Par M. TILLET.

IL a été dit vers la fin de ce Mémoire, *pag. 435 & 436,* que *l'acide marin déphlogistiqué, par la distillation de cet acide sur la manganèse, attaque vivement, à l'aide de la chaleur, les précipités de platine .... & parvient en assez peu de temps à les dissoudre, &c.* ce fait qui est bien constant, demande une explication : lorsqu'on distille au bain de sable de l'acide marin sur la manganèse, la plus grande partie de cet acide qui passe dans le ballon, est plus foible que celle qui reste encore dans la cornue, & dont la manganèse est pénétrée. Si, pour obtenir cette dernière portion de l'acide marin, on verse dans la cornue une certaine quantité d'acide vitriolique, alors l'acide marin le plus concentré se dégage de la manganèse; & c'est cette portion plus concentrée de ce dernier acide, dont j'ai fait usage pour dissoudre des précipités de platine & même des lames d'or fin, quoique ce métal soit plus capable, en cet état, de résister à l'action de l'acide que la platine précipitée de la dissolution par l'acide nitreux, & réduite à un état pulvérulent.

Mais j'ai reconnu que cette dernière portion d'acide marin, distillée sur la manganèse & plus concentrée que la première, n'étoit pas pure; qu'elle contenoit une petite quantité d'acide vitriolique, & que ce n'étoit qu'à la faveur de ce mélange qu'elle attaquoit vivement l'or & la platine, en acquérant ainsi la grande propriété de l'eau régale. Je n'ai pas pu douter que l'énergie de cet acide marin déphlogistiqué ne fut dûe à son mélange avec un peu d'acide vitriolique,

quelque concentré que fût le premier de ces acides, lorſque par des expériences répétées, j'ai vu que la première portion d'acide marin déphlogiſtiqué qui paſſe d'abord dans le ballon, ſans l'intermède de l'acide vitriolique, n'a preſque point d'action ſur l'or ni ſur la platine, & en acquiert au contraire une très-conſidérable ſur ces deux métaux dès qu'on y joint un peu d'acide vitriolique concentré.

En verſant une certaine quantité de ce dernier acide ſur la portion d'acide marin retenue dans la manganèſe, on n'eſt pas ſûr exactement de la quantité d'acide vitriolique qui paſſe dans la diſtillation; & alors le mélange des deux acides peut produire plus ou moins d'effet, ſuivant les proportions dans leſquelles ce mélange ſe trouve fait après la diſtillation.

Il eſt plus ſimple, lorſqu'on a une fois diſtillé l'acide marin ſeul ſur la manganèſe, d'y mêler une quantité déterminée d'acide vitriolique concentré, & par ce moyen de varier avec préciſion les mélanges dans toutes les proportions qu'on juge à propos: c'eſt celui que j'ai employé dans un grand nombre d'expériences où j'ai eu pour but la diſſolution de l'or & de la platine. La combinaiſon des deux acides a été à-peu-près telle que je l'aurois obtenue par la diſtillation; & d'ailleurs ces acides étant deſtinés à ſupporter enſemble, dans un matras, une forte ébullition, ils devoient s'y combiner auſſi parfaitement qu'ils l'auroient fait dans une cornue & à la chaleur modérée d'un bain de ſable.

Une trop grande quantité d'acide vitriolique, telle qu'une partie égale en volume à celle de l'acide marin déphlogiſtiqué, met obſtacle à la diſſolution; un tiers même du premier de ces acides ſur deux tiers du ſecond, ne la permet que juſqu'à un certain point: mais un ſixième ſeulement d'acide vitriolique concentré ſur cinq ſixièmes d'acide marin déphlogiſtiqué, m'a paru une proportion aſſez convenable pour que le mélange diſſolve entièrement les précipités de platine, enlève à l'or fin réduit en lames minces plus de la moitié de ſon poids, & puiſſe bientôt le diſſoudre en total, ſi on

expose de nouveau la portion d'or qui reste à l'action du même dissolvant.

S'il y a un inconvénient, pour la dissolution qu'on veut obtenir, à faire entrer trop d'acide vitriolique dans le mélange des deux acides, on ne court aucun risque de n'en employer qu'un neuvième, en volume comme je l'ai dit, ou même un douzième pour composer le dissolvant, parce que l'acide marin s'évapore beaucoup plus vîte pendant l'ébullition que l'autre acide, & se réduit peu-à-peu à la quantité où il doit être pour attaquer fortement l'or & la platine, en acquérant simplement de l'énergie par l'acide vitriolique, & sans que ce dernier acide y domine.

Pendant qu'un mélange d'acide marin déphlogistiqué & d'acide vitriolique concentré, fait dans des proportions convenables, a la plus grande action sur l'or fin réduit en lames, & sur les précipités de platine, il n'en a qu'une très-foible & à peine sensible sur la platine ductile & réduite en lames fort minces : ici ce dernier métal, dans un certain état, résiste à un dissolvant très-actif; & l'or fin, dans ce même état, n'y résiste pas : là, comme je l'ai prouvé dans mon Mémoire, l'acide nitreux pur dissout parfaitement la platine ductile, à la faveur du mélange de l'or & de l'argent avec cette même platine, & laisse absolument intact l'or qui faisoit partie des trois métaux.

J'ai tenté inutilement de faire attaquer l'or fin par un mélange d'un sixième d'acide vitriolique concentré, & de cinq sixièmes d'acide marin dans son état ordinaire, pourvu de son phlogistique & tiré du même flacon duquel étoit sorti celui que j'avois distillé sur la manganèse : l'or fin en lame que j'ai employé pour cette expérience, n'a pas souffert le moindre déchet; la liqueur, quoique réduite à moitié ou environ, n'a pas acquis la couleur jaune & foncée qui annonce la dissolution du métal, & la lame d'or avoit conservé tout son brillant métallique.

J'ai répété cette même expérience en employant un autre acide fumant, très-concentré & qui, au moment de son

mélange avec un ſixième d'acide vitriolique, eſt entré dans une ſi grande effervescence que, par l'effet d'un bouillonnement ſubit, une partie de la liqueur a jailli avec impétuoſité & s'eſt diſperſée, en forme de pluie, autour du vaſe qui la contenoit. De ce mélange, ſi violent en apparence, il n'eſt réſulté aucun indice ſenſible de diſſolution; tandis qu'elle a lieu conſtamment, comme je l'ai dit, quand l'acide marin, déphlogiſtiqué parfaitement, entre dans le mélange dont l'effervescence eſt aſſez modérée dans l'inſtant où il ſe fait. Je n'ai perdu en effet, dans l'expérience dont il s'agit ici, qu'un cent vingt-huitième de grain ſur l'or fin que j'ai employé, quoique la liqueur ait bouilli long-temps dans un matras, à feu nu & ſe ſoit trouvé réduite à moitié, à la fin de l'opération: on pourroit même attribuer avec vraiſemblance la cauſe d'une perte ſi légère, ſur le poids de l'or, à toute autre choſe que l'action des deux acides combinés.

Je dois faire obſerver ici qu'il faut être attentif à la qualité de l'acide marin qu'on ſe propoſe de diſtiller ſur la manganèſe, afin qu'étant uni à l'acide vitriolique, il opère ſûrement la diſſolution. J'ai reconnu, par ma propre expérience, qu'un acide marin bon en lui-même, très-concentré & propre à différens uſages, étant ainſi préparé, par l'intermède de la manganèſe, & joint à un ſixième d'acide vitriolique, n'a guère plus d'action quelquefois ſur l'or & la platine, que s'il eût été employé dans ſon état ordinaire & ſans avoir reçu cette préparation. Il paroît néceſſaire que cet acide ſoit très-pur & dépouillé de toute ſubſtance capable de paſſer avec lui dans la diſtillation, & par ſa nature, de rendre abſolument inutile l'effet que produit ſur lui la manganèſe.

L'acide marin qui, au ſortir de cette diſtillation, a une odeur vive & piquante, qui prend enſuite une légère teinte de couleur brune, n'a pas acquis, ou n'a que très-foiblement la propriété de diſſoudre l'or & la platine, à l'aide de l'acide vitriolique; au lieu qu'il m'a paru l'avoir acquiſe certainement, lorſqu'après la diſtillation, il eſt blanc comme l'eau diſtillée, & exhale une odeur douce & aſſez agréable.

Je me borne à ces faits dans l'explication qu'exigeoit l'endroit de mon Mémoire que j'ai cité : ils donneront lieu ſans doute à d'autres expériences ſur ce même ſujet, & conduiront à des recherches plus délicates que celles dont il s'agit ici. En conſidérant la nouvelle eau régale dont je viens de parler, & dans la compoſition de laquelle l'eſprit de nitre n'entre point, on ſe trouve porté à croire que l'acide marin eſt l'agent principal dans les diſſolutions opérées par ſa combinaiſon, ſoit avec l'acide vitriolique, ſoit avec l'acide nitreux, puiſque ceux-ci ne peuvent, ni réunis, ni ſéparés, produire ce grand effet ſur certains métaux, tandis que l'acide marin uni à l'un ou à l'autre détermine bientôt la diſſolution, & ſemble n'avoir beſoin que d'être aidé dans ſon action, dont le principe diſſolvant réſide en lui, & ſe manifeſte ſur le champ à la faveur d'une petite quantité d'un autre acide, tel que l'acide vitriolique, qui anime, en quelque ſorte ce principe & ſert à le développer.

Comme l'action plus ou moins vive qu'exerce ſur l'or & la platine, l'acide marin combiné avec une certaine quantité d'acide vitriolique, paroît dépendre beaucoup de l'intermède par lequel on a obtenu le premier de ces acides, du degré de concentration auquel on l'a porté, de la pureté dont il eſt, & de la qualité, peut-être, de la manganèſe ſur laquelle on l'a diſtillé, je me propoſe de continuer les expériences que j'ai commencées à ce ſujet, de chercher le point précis où l'acide marin jouit de la plus grande énergie, pour concourir, avec l'acide vitriolique, à la diſſolution des deux métaux, & de mettre ſous les yeux de l'Académie les détails de cette opération, ſi je peux parvenir à la rendre auſſi ſimple en elle-même, que conſtante dans toute l'étendue de l'effet que j'en ai vu réſulter pluſieurs fois.





OBSERVATIONS BOTANICO-MÉTÉOROLOGIQUES,

Faites au château de Denainvilliers, proche Pithiviers en Gâtinois, pendant l'année 1778.

Par M. DU HAMEL.

AVERTISSEMENT.

LES Obſervations météorologiques ſont diviſées en ſept colonnes, de même que les années précédentes. On s'eſt toujours ſervi du thermomètre de M. de Reaumur, & on part du point zéro, ou du terme de la glace: la barre à côté du chiffre indique que le degré du thermomètre étoit au-deſſous de zéro; quand les degrés ſont au-deſſus, il n'y a point de barre; o déſigne que la température de l'air étoit préciſément au terme de la congélation.

Il eſt bon d'être prévenu que dans l'Automne, quand il a fait chaud pluſieurs jours de ſuite, il gèle, quoique le thermomètre, placé en dehors & à l'air libre, marque 3 & quelquefois 4 degrés au-deſſus de zéro; ce qui vient de ce que le mur & la boîte du thermomètre ont conſervé une certaine chaleur; c'eſt pourquoi on a mis dans la ſeptième colonne, *Gelée.*

Les Obſervations ont été faites à huit heures du matin, à deux heures après midi, & à onze heures du ſoir.

Nota. Les Obſervations du baromètre, à commencer du 1.er du mois de Janvier, ont été faites ſur un baromètre callé ſur celui de l'Obſervatoire, qui eſt 3 lignes plus haut que celui dont nous nous ſervions les années précédentes.

JANVIER.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.		État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces	lignes	
1.	N.	— 1 ½.	0 ½.	— 2.	27.	8	couvert & neigeux.
2.	O.	1.	1.	1.	27.	10	couvert & neige.
3.	S. O.	1.	½.	3.	27.	9	beau avec nuages.
4.	S. E.	3.	0.	½.	27.	7	couvert & bruine.
5.	N.	1.	0.	3.	27.	9	neigeux.
6.	S.	4 ½.	— 2.	2.	28.	0	couvert.
7.	N.	2.	0.	2.	28.	0	*idem.*
8.	N.	5 ½.	4.	5 ½.	28.	0	mat. brouil. l'ap. m. beau avec nuag.
9.	N.	2 ½.	0.	1 ½.	27.	11	couvert.
10.	S. E.	2.	0.	1 ½.	27.	9	couvert & bruine.
11.	O.	1 ½.	— ¼.	2.	27.	10	couvert; le soir neige.
12.	E.	2.	1 ½.	5 ¼.	27.	6	couv. mat. l'ap. m. beau avec nuag.
13.	S.	3 ½.	2.	0.	27.	3	brouillard.
14.	E.	4.	5.	5.	26.	9	pluvieux & vent.
15.	S. O.	4.	7.	6.	27.	0	pl. grand vent; ton. très-fort à 4h s.
16.	S.	5.	8 ½.	4 ½.	27.	5	venteux & nuageux.
17.	S.	3 ½.	4 ½.	4.	27.	7	brouillard.
18.	S.	3.	5.	5.	27.	5	couvert & bruine.
19.	S.	5.	8.	5.	27.	6	couvert.
20.	S.	1 ½.	5.	5.	27.	7	couvert & venteux.
21.	S. O.	4 ½.	7.				grand vent & pluie.
22.	S. O.	3 ½.	6.	4.	27.	4	pluvieux & grand vent.
23.	S. O.	4.	7.	5.	27.	4	venteux & nuageux.
24.	S.	5.	9.	7.	27.	3	couvert.
25.	S.	5.	8.	6.	27.	4	*idem.*
26.	N.	0.	1.	— 1 ½.	27.	9 ½	couvert & grand vent.
27.	N.	— 3 ½.	0.	2 ½.	27.	8	beau avec nuages.
28.	N.	1 ½.	½.	2 ½.	27.	10	beau.
29.	N.	3.	0.	2 ½.	27.	11	*idem.*
30.	E.	2.	— 0 ½.	½.	27.	11	couvert; le soir bruine.
31.	E.	2.	0.	½.	27.	10	couvert & bruine.

Il eſt tombé beaucoup de neige au commencement de ce mois, cela a empêché le peu de gelée qui eſt venue, de pénétrer ſi avant dans la terre; le 15, à quatre heures & demie du ſoir, eſt venu un grand coup de vent, & il a tonné un très-fort coup.

On a continué, vers la fin de ce mois, à parer les vignes; l'eau commençoit à pénétrer dans les terres.

La rivière d'Eſſonne a été d'une moyenne hauteur.

Le blé s'eſt vendu au marché, vingt-une livres le ſac; l'orge, huit livres dix ſous; l'avoine, ſept livres dix ſous; le vin de la récolte de 1777, s'eſt vendu juſqu'à ſoixante-cinq livres le poinçon.

FÉVRIER.

FÉVRIER.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.		État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces	lignes	
1.	E.	— 1.	0.	— $\frac{1}{2}$.	27.	11 $\frac{1}{2}$	brouillard.
2.	S. E.	1 $\frac{3}{4}$.	— $\frac{1}{2}$.	1 $\frac{1}{4}$.	28.	1	brouillard & givre.
3.	E.	2 $\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}$.	1 $\frac{1}{2}$.	28.	2	*idem.*
4.	N. E.	2 $\frac{3}{4}$.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}$.	27.	10	brouillard & givre avec verglas.
5.	E.	1 $\frac{1}{2}$.	5.	1.	27.	8	beau avec nuages.
6.	E.	2 $\frac{1}{2}$.	5.	5 $\frac{1}{2}$.	27.	6	couvert & bruine.
7.	S.	3 $\frac{1}{2}$.	7.	3.	27.	9	couvert.
8.	S.	0.	7.	1 $\frac{1}{2}$.	27.	8	beau.
9.	N. E.	0.	5 $\frac{1}{2}$.	3 $\frac{1}{2}$.	27.	10	beau avec nuages.
10.	N.	2 $\frac{1}{2}$.	7.	2.	27.	10	couvert; le soir brouillard.
11.	N.	$\frac{1}{2}$.	2 $\frac{1}{4}$.	1.	28.		couvert.
12.	N.	0.	1.	$\frac{1}{2}$.	28.	$\frac{1}{2}$	*idem.*
13.	N.	— $\frac{1}{2}$.	2 $\frac{1}{2}$.	— $\frac{1}{2}$.	28.	$\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
14.	O.	— 1.	$\frac{1}{2}$.	1.	27.	4	neige & vent.
15.	N.	1.	2.	$\frac{1}{2}$.	27.	3	*idem.*
16.	N. O.	$\frac{1}{2}$.	1 $\frac{1}{2}$.	— 1 $\frac{1}{2}$.	27.	0	beau avec nuag. neigeux dans la nuit.
17.	O.	2 $\frac{1}{4}$.	1.	— $\frac{1}{2}$.	27.	1	neigeux.
18.	O.	2.	2.	0.	27.	4	couvert & neige.
19.	O.	1.	3.	— $\frac{1}{2}$.	27.	6	neige; l'après midi beau avec nuages.
20.	S. O.	2.	3 $\frac{1}{2}$.	0.	27.	8	beau avec nuages; le soir neige.
21.	S. O.	0.	4.	2.	28.	0	couvert.
22.	S.	2.	5 $\frac{1}{2}$.	5.	28.		couvert & bruine.
23.	S.	5.	7.	4.	27.	7	grand vent.
24.	S. O.	2 $\frac{1}{2}$.	6.	0.	27.	4	grand vent & nuageux; le soir neige.
25.	N. O.	— 1.	2 $\frac{1}{2}$.	1.	27.	3	grand vent & neige.
26.	N. O.	2.	0.	— 1.	27.	6	couvert & neigeux.
27.	S.	3 $\frac{1}{2}$.	2.	1 $\frac{1}{2}$.	27.	5	beau avec nuag. neigé dans la mat.
28.	S.	2.	5.	3 $\frac{1}{2}$.	27.	2	couvert; il a neigé dans la nuit.

Ce mois a été froid & humide : il eſt ſurvenu de grands brouillards au commencement, avec de la gelée, ce qui a occaſionné une ſi grande quantité de givre que beaucoup de branches d'abres ont été caſſées.

Le milieu & la fin ont été fort inconſtans : il eſt tombé tantôt de la pluie, tantôt de la neige qui fondoit à meſure qu'elle tomboit, ce qui a rendu la terre ſi molle que l'on n'a pu labourer pour faire les mars ; on n'a fait commencer les labours qu'à la fin du mois, & en général on n'a pas fait grand ouvrage à la campagne durant ce mois.

MARS.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.	État du ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*		
1.	S.	2.	6.	4.	27. 2	pluvieux.
2.	S.	2.	6½.	3.	27. 1	beau & nuageux.
3.	N.	2½.	8.	4.	27. 1	pluvieux.
4.	N.	3½.	3½.	2.	27. 2	couvert & grand vent.
5.	N. O.	1.	2½.	1½.	27. 3	couvert & bruine.
6.	N.	½.	4½.	2.	27. 5	beau avec nuages.
7.	N. O.	½.	2½.	2.	27. 5	couvert & bruine.
8.	N. O.	½.	3.	3½.	27. 5	couvert.
9.	N. O.	2.	4.	2½.	27. 6	*idem.*
10.	N. O.	1½.	3½.	2½.	27. 8	couvert & bruine.
11.	N. O.	1½.	4½.	3½.	27. 9	couvert.
12.	N.	2.	6½.	3.	27. 10½	*idem.*
13.	N.	— 2½.	6.	2.	28. 0	beau avec vent.
14.	N.	1½.	8.	1.	27. 11½	*idem.*
15.	N.	0.	3.	0.	27. 11	beau & nuageux.
16.	N	— 1½.	7.	2.	27. 11	beau avec nuages.
17.	N.	1.	8½.	2½.	27. 11½	beau, & le soir Aurore boréale.
18.	S.	1.	12.	6½.	27. 10	beau.
19.	E.	2.	14.	6½.	27. 7½	*idem.*
20.	S.	5.	10½.	8.	27. 5½	couvert; le soir pluie.
21.	S.	5.	8½.	10.	27. 5½	couvert & pluvieux.
22.	S.	8.	12.	8.	27. 5	pluvieux & grand vent.
23.	S.	7.	8.	6.	27. 4	pluie & grand vent.
24.	S. O.	7½.	8½.	4½.	27. 3	pluv. & grêle; soir il a ton. & gr. vent.
25.	N.	4.	8½.	3½.	27. 5	pluie & grand vent.
26.	N.	0.	5.	½.	28. 0	beau, nuag. vent, gel. à gl. aur. bor.
27.	N.	— 1.	8½.	2.	28. 1	beau; il a gelé à glace.
28.	S. E.	1½.	9½.	6.	28. 1	*idem.*
29.	S. O.	5½.	11½.	8.	28. ½	couv. & nuag. il a bruiné dans la m.
30.	S.	5½.	13½.	10.	28. 0	couvert, vent & pluie.
31.	S.	8.	10½.	9½.	27. 11½	couvert & grand vent.

Ce mois a été au commencement froid & humide : on n'a commencé à labourer pour les mars qu'à la fin de Février, après que l'eau qui avoit été produite par la neige a eu imbibé les terres, & on a continué durant ce mois. Vers le milieu il eſt venu des beaux jours, & on en a profité pour ſemer les avoines : les vignerons ont taillé la vigne au commencement de ce mois; ils n'ont point trouvé la moëlle du ſarment noire.

Le blé de la récolte de 1777 s'eſt vendu au marché vingt-trois livres le ſac.

Le vin, tant de la récolte de 1776 que de la récolte de 1777, s'eſt vendu, l'un dans l'autre, ſoixante livres le poinçon.

L'avoine, ſept livres dix ſous le ſac.

La rivière d'Eſſonne a un peu augmenté.

Il y a eu des abricotiers en fleurs, à la fin du mois; cependant rien n'avoit encore pouſſé. La campagne étoit encore comme à Noël; on ne voyoit point d'hirondelles.

AVRIL.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.		État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces	lignes	
1.	S.	8 ½.	12.	7.	27.	9	beau avec des nuag. le mat. bruine.
2.	S.	4.	19.	12.	27.	5	le matin brouillard, ensuite beau.
3.	S. O.	8 ½.	16.	11.	27.	8	vent, nuag. le soir écl. & ton. éloig.
4.	S.	8 ½.	16.	10.	27.	8	couvert le soir, pluie.
5.	S.	7 ½.	13.	8.	27.	10	couv. & beau avec nuag. l'apr. midi.
6.	S.	5.	17 ½.	11 ½.	27.	9	beau.
7.	S.	7.	19.	14.	27.	10	beau, il a tonné & écl. l'après-midi.
8.	N.	9 ½.	21.	14.	27.	9 ½	beau, apr. m. ton. au loin, écl. le soir.
9.	E.	9.	17.	11 ½.	27.	10	nuag. tombé quelques gout. d'eau.
10.	S. E.	9 ½.	19 ½.	12.	27.	11	beau, le soir ton. éclairs & pluie.
11.	N.	9.	19.	10.	27.	11	beau.
12.	N.	9.	18.	12.	27.	11	*idem.*
13.	N. O.	8.	17.	11.	27.	8	nuageux.
14.	N.	6 ½.	½.	5.	27.	8 ½	couvert & vent froid.
15.	S.	5.	7 ½.	4.	27.	6	pluvieux.
16.	N.	2 ½.	7.	3.	27.	7	gelée bl. le mat. couvert, de la grêle.
17.	N.	0 ½.	9.	6.	27.	8	gelée bl. le mat. couvert l'apr. midi.
18.	O.	1 ½.	10.	8 ½.	27.	10	*idem.*
19.	O.	2 ½.	12 ½	8.	27.	10	gelée blanc. le matin, ensuite beau.
20.	N. O.	5.	11 ½.	5.	27.	6	pluvieux.
21.	O.	4.	8 ½.	5.	27.	3	nuageux avec de la grèle & gr. vent.
22.	N.	3.	6.	4.	27.	4	pluvieux, il a tonné l'après-midi.
23.	N.	2 ½.	7.	4 ½.	27.	6	le matin pluv. & l'apr. midi couv.
24.	N.	2.	9 ½.	6.	27.	6	couv. & vent fr. gelée bl. le matin.
25.	N.	2.	7 ½.	5.	27.	9	couvert & bruine.
26.	N.	4 ½.	7 ½.	5 ½.	27.	4	*idem.*
27.	S.	4 ⅔.	13 ½.	7 ½.	27.	4	nuageux & pluvieux.
28.	S.	5.	14 ½.	9.	27.	4	beau avec des nuages.
29.	S. O.	9.	14.	10 ½.	27.	3	*idem.*
30.	S.	8.	13 ½.	9 ½.	27.	2 ½	pluvieux.

Le 2 de ce mois on a vu des hirondelles qui ne venoient que d'arriver. Le 3, il a éclairé le soir de tous côtés.

Le rossignol a commencé à chanter à Denainvilliers le 24. Durant ce mois il a tonné, éclairé & grêlé, l'air étoit cependant froid. Depuis le 16 jusqu'au 20, il a gelé à glace les matins, ce qui a un peu gâté les vignes qui avoient été *marées** principalement celles qui étoient les plus avancées.

Vers la fin du mois il est venu des pluies froides qui ont un peu fait jaunir les blés.

Le 23, les cerisiers étoient en fleurs; à la fin du mois les pruniers étoient aussi fleuris.

En général ce mois a été froid & humide, avec de grands vents, cependant les avoines & orges, malgré le froid, ont bien levé.

---

* Cela signifie *vignes fumées avec les marcs.*

MAI.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.		État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces	lignes	
1.	S.	8.	14.	9.	27.	6	pluvieux; il eſt tombé de la grêle.
2.	S. O.	7½.	13.	12.	27.	6	nuageux.
3.	S. E.	9.	21.	16.	27.	5	*idem.*
4.	S.	13.	14.	11.	27.	7	pluvieux.
5.	S. O.	7.	15.	10.	27.	11	beau avec des nuages & bruine.
6.	S.	8.	15.	11.	27.	11	beau avec des nuages.
7.	S.	9½.	15.	12.	27.	10	pluvieux.
8.	O.	9.	15½.	10.	27.	10	beau avec des nuages.
9.	O.	9.	15½.	12.	27.	11	le matin couv. & l'apr. midi pluie.
10.	N.	8½.	22.	12.	28.	0	beau; il a gelé blanc le matin.
11.	E.	10.	21.	14.	27.	10	beau.
12.	O.	10.	20.	12.	27.	8	*idem.*
13.	S.	9.	17.	12½.	27.	7½	beau avec nuag. a écl. le ſoir & plu.
14.	S. O.	9½.	14.	10.	27.	10	pluvieux.
15.	S. O.	8.	15.	11½.	28.	0	le matin pluie, l'apr. midi nuageux.
16.	S. O.	10.	16½.	12½.	28.	0	couv. avec quelq. ray. de ſ. l'ap. m.
17.	S.	11.	19.	15.	27.	9	beau avec des nuages & du vent.
18.	O.	10.	15.	9.	27.	10	beau avec du vent.
19.	S. O.	6.	17½.	10.	28.	1	beau; v. gel. bl. le m. dans les vall.
20.	N.	7.	19.	12.	28.	1	beau.
21.	N.	9.	20.	13.	27.	11	*idem.*
22.	N.	12.	22.	13.	27.	9	beau, le ſoir il a éclairé.
23.	N.	10.	13½.	9.	27.	10	pluie le mat. nuag. le ſoir.
24.	N.	9½.	17.	11½.	27.	8½	beau avec des nuages & du vent.
25.	S.	10½.	15.	11.	27.	8	nuageux, il a tonné & plu.
26.	S. O.	11.	17.	11½.	27.	8	couvert & nuageux.
27.	O.	10½.	11.	9.	27.	9½	pluvieux & venteux.
28.	N. O.	9½.	14.	9.	28.	0	couvert & vent.
29.	N. O.	9½.	15.	12½.	27.	11	couvert; le ſoir pluie.
30.	N.	11.	17½.	11½.	27.	10	beau avec des nuages.
31.	N. E.	11.	19½.	13.	27.	10	beau avec du vent.

Il eſt venu au commencement de ce mois des pluies froides & des brouillards qui ont fait couler les fruits, principalement la ceriſe & les prunes; il y a des endroits où il y en a eu fort peu de noué.

Le temps a été froid & humide, cependant on a ſorti les orangers; le 18, voyant que la ſaiſon avançoit, on a ſemé les féves, pommes de terre de la ſeconde ſaiſon, & autres légumes; au commencement & à la fin du mois les vignes ne montroient pas beaucoup de raiſins, à cauſe de la gelée du mois d'Avril.

Le vin de la récolte de 1776 & 1777, s'eſt vendu, l'un dans l'autre, ſoixante-huit livres, & ſoixante & douze livres le poinçon.

Le blé a valu dix-huit & dix-neuf livres le ſac ou le ſetier, meſure de Paris, peſant 240 livres.

L'avoine, ſix livres dix ſous le ſac.

JUIN.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom. pouces	lignes	État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces	lignes	
1.	O.	10.	23.	14.	28.	0	beau.
2.	O.	12.	17.	12.	27.	11	nuageux & vent.
3.	S.	11.	14.	11.	27.	9	pluie & vent.
4.	S. O.	10.	12.	7.	27.	9	beau avec des nuages & pluie.
5.	S.	7.	16½.	10.	27.	9	beau avec nuages.
6.	N.	10.	17.	10.	27.	6	couvert; le soir, pluie & tonnerre.
7.	S.	10.	14.	10.	27.	8½	mat. pluie, ensuite beau avec nuag.
8.	S. O.	10½.	17½.	11.	27.	11	beau avec nuages.
9.	S.	10½.	17.	13.	28.	0	*idem.*
10.	O.	11.	19.	14.	28.	0	*idem.*
11.	E.	12½.	21.	14.	28.	0	beau.
12.	E.	12½.	21.	15.	28.	0	beau avec du vent.
13.	N.	23.	13.	16.	28.	1	*idem.*
14.	N.	12.	23.	15.	28.	½	beau avec nuages.
15.	N. O.	11.	16.	11.	27.	11½	beau avec nuages & du vent.
16.	N. O.	7½.	15½.	11.	27.	10½	couv. gel. bl. pluie, tonn. grêl. le f.
17.	N. O.	8.	16.	12.	27.	11	gel. bl. le matin, nuageux, vent.
18.	N. O.	10½.	12.	13.	27.	11	pluvieux.
19.	N.	12.	20½.	13½.	27.	11	couv. le soir bruine, tonné au loin.
20.	N.	11.	19½.	16.	28.		beau avec nuages.
21.	N.	12.	19½.	12.	28.	½	beau avec du vent.
22.	N.	12.	20.	16.	28.	0	beau.
23.	N.	16.	24.	16.	27.	11	beau avec du vent.
24.	E.	16½.	26.	16½.	27.	9	beau, l'apr. m. écl. & ton. au loin.
25.	N. O.	15.	21.	16.	27.		beau avec des nuages & du vent.
26.	S.	15½.	23.	17½.	27.	11½	beau.
27.	S. O.	16.	25.	16.	27.	9	beau, vent; soir tonn. écl. pluie.
28.	S.	14½.	19.	14.	27.	9	beau avec nuag. & vent; soir pluie.
29.	S.	14.	19½.	13.	27.	9	couv. & bruine, il a tonné au loin.
30.	S.	14.	20½.	15.	27.	11	nuag. tombé quelq. gouttes d'eau.

Le commencement de ce mois a été venteux & l'air froid, les pluies qui ſont tombées les mois paſſés ont fait lever des chardons dans les avoines ; les blés ſe ſont raccommodés, ils n'étoient plus ſi jaunes ; les ſainfoins nouveaux n'étoient point forts, mais les vieux étoient bons & aſſez hauts; on les a fauchés le 10 & le temps a été aſſez propre pour les ſécher & les enlever : il y a eu quelques jours de pluie, mais cela ne les a point gâtés, on les a ſerrés bons.

Vers la fin du mois on demandoit de l'eau pour les orges & les avoines qui ont épié fort bas vers le milieu du mois; dans la plupart des avoines il s'en eſt trouvé de brûlées.

Le 23, les vignes étoient en pleine fleur, & le temps chaud & ſec leur étoit favorable.

La rivière d'Eſſonne a été fort baſſe durant ce mois.

JUILLET.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.	État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces lignes	
1.	S. O.	14½.	17½.	14½.	27. 11	beau avec vent.
2.	N.	14½.	21.	17.	28.	beau.
3.	S. O.	15.	25.	18.	27. 11	beau avec vent.
4.	S. O.	15½.	25.	21½.	27. 11	beau.
5.	S.	18.	29½.	22.	27. 9½	beau; le ſoir il a éclairé & tonné.
6.	S.	18½.	23½.	20.	27. 10	beau avec nuages.
7.	S.	13½.	15½.	15½.	27. 10½	pluvieux ; la nuit a été orageuſe.
8.	S. O.	14.	20½.	14½.	28. 0	beau avec nuages; l'ap. m. il a plu.
9.	N.	13½.	17½.	16.	28. 0	beau avec nuages.
10.	N.	15.	22½.	17.	28. 0	beau.
11.	N. O.	15.	22.	16.	28. 0	*idem.*
12.	N.	16.	23½.	18.	28. ½	*idem.*
13.	N.	16½.	23½.	18.	28. 0	*idem.*
14.	N.	17.	27½.	20½.	27. 10½	*idem.*
15.	N.	17.	27½.	20½.	27. 11	beau avec vent.
16.	N.	17½.	27½.	21.	27. 10½	beau; brouillard le matin.
17.	N. O.	17.	21.	15½.	27. 11½	beau avec vent.
18.	N.	15.	20.	16.	27. 10	beau avec nuages & vent.
19.	N.	17½.	24½.	21.	27. 7	beau.
20.	S.	17.	20.	11½.	27. 6	le mat. il a tonné, enſuite vent & pl.
21.	S.	11½.	11½.	12½.	27. 9	pluvieux & venteux.
22.	S. O.	13½.	17½.	14.	27. 10	beau avec nuages.
23.	S.	14.	19.	15½.	27. 10	beau avec nuages & du vent.
24.	S.	17.	23.	17.	27. 9	couvert & vent.
25.	S. E.	13½.	20½.	15.	27. 10	beau avec nuages.
26.	N.	14.	22.	15½.	27. 9	beau avec nuages; le ſoir éclairs.
27.	S.	15.	21.	15.	27. 10	beau avec vent; tonné & plu la nuit.
28.	S. O.	13.	20.	14.	27. 11½	beau avec vent.
29.	S.	13.	17.	13.	27. 9	couvert, vent & pluie.
30.	S.	13.	19½.	13.	27. 10	couvert, pluie, & il a tonné au loin.
31.	S.	12½.	19½.	13.	27. 10	couvert & pluie.

Au commencement de ce mois il a paru un grand nombre de papillons blancs, principalement dans les avenues, la terre en étoit couverte; on a commencé à ſerrer les ſeigles le 17; ils étoient aſſez hauts & bien grénés.

Le 27, on a commencé la moiſſon des fromens; il eſt venu des foudres de vent vers la fin du mois qui ont bouleverſé les blés & les avoines dans les endroits où ils étoient forts, & fait tomber beaucoup de fruits: on a commencé à faucher les avoines le 19.

Les faucheurs ont preſque tous *ſanglé* les avoines & les orges; ils n'ont pas pu faire des ondins *, à cauſe du bouleverſement cauſé par les vents; les avoines n'étoient point hautes ni drues; les orges étoient bons; le temps a été favorable pour ſerrer les pois & veſces qui étoient aſſez bons; les raiſins étoient preſque à leur groſſeur à la fin du mois.

La rivière d'Eſſonne a toujours été baſſe; les noix, à la fin du mois, étoient en cerneaux bons à manger.

---

* On appelle *ſangler* les avoines, lorſqu'en les fauchant, on met tous les épis d'un même côté; & on appelle *faire des ondins* lorſqu'on les bechevette.

AOUST.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.		État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces	lignes	
1.	S.	11 ½.	17 ½.	12.	28.	0	beau avec nuages.
2.	E.	12.	19.	15.	28.	1	beau.
3.	N.	12.	22 ½.	16.	28.	0	*idem.*
4.	N.	13 ½.	24 ½.	17 ½.	27.	11	beau avec du vent.
5.	S.	17 ½.	27 ½.	21.	27.	9 ½	beau.
6.	N.	16 ½.	28 ½.	20 ½.	27.	9 ½	*idem.*
7.	N. O.	16.	28.	20 ½.	27.	9	beau l'ap. m. couv. le ſoir, ton. pl.
8.	N.	16.	23 ½.	15.	27.	11	nuageux ; le ſoir éclairs.
9.	N.	11 ½.	21.	15 ½.	28.	0	beau.
10.	N.	14 ½.	23.	18.	28.	0	*idem.*
11.	N.	17.	26.	19.	27.	11	*idem.*
12.	N.	14 ½.	23.	28.	28.	0	*idem.*
13.	E.	15 ½.	29.	21.	27.	8 ½	*idem.*
14.	O.	18.	25.	18 ½.	27.	10	couvert & vent.
15.	N.	12 ½.	16 ½.	15.	28.	1	le mat. pluv. l'ap. m. beau avec n.
16.	N.	14 ½.	20.	14.	28.	2	beau avec nuages & du vent.
17.	N.	15 ½.	22.	14.	28.	1	beau avec du vent.
18.	N.	12.	24.	17.	28.	0	beau.
19.	N.	14.	26 ½.	19.	28.	0	*idem.*
20.	N.	14.	26 ½.	18.	27.	11 ½	*idem.*
21.	N.	14.	25 ½.	18 ½.	27.	11	*idem.*
22.	N.	14 ½.	27.	20.	27.	11	*idem.*
23.	N.	13.	22 ½.	17.	28.	1 ½	*idem.*
24.	N.	13 ½.	23.	17 ½.	28.	3	*idem.*
25.	N.	14.	25.	18.	28.	2	*idem.*
26.	N.	14.	24.	17.	28.	0	beau avec du vent.
27.	N.	11.	17 ½.	12 ½.	28.	0	beau avec grand vent.
28.	N.	10 ½.	17.	13 ½.	28.	1	beau avec du vent.
29.	N.	12.	19.	14 ½.	28.	1	beau & vent.
30.	N.	8.	19.	13 ½.	27.	10	beau ; le ſoir vent.
31.	N. O.	9 ½.	15.	8 ½.	28.	0	beau & vent.

Le 6, on a vu des raiſins tournés ; le 4, on a fini la moiſſon des froments ſans une goutte d'eau, & tout auſſi-tôt on a levé les avoines ſans qu'elles aient eu d'eau : comme elles étoient toutes *ſanglées*, les roſées du matin les ont aſſez mouillées ; il n'en a pas été de même en terre noire, on les a miſes en *ondins* en les fauchant, & comme en ondins elles ont plus d'épaiſſeur, la roſée n'a pu les enfondre ; on attendoit de la pluie pour les enlever, & comme il n'eſt point tombé d'eau il en reſtoit encore à enlever à la fin de ce mois.

Les fromens étoient d'une bonne hauteur, & le grain rendoit beaucoup ; il en falloit dix-huit gerbes pour en faire une mine, au lieu que l'année dernière il en falloit juſqu'à trente gerbes : les avoines ont été auſſi bien grenées, mais peu épaiſſes.

Il a paru ſur les haies & ſur les arbres des fourreaux de chenilles en grande quantité, cauſés par ces papillons blancs qu'on avoit eus au commencement de Juillet.

Il a fait une grande ſéchereſſe & de grandes chaleurs durant ce mois, de ſorte que tous les légumes ont péri dans les jardins, & beaucoup de raiſins ont été grillés aux vignes.

SEPTEMBRE.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.		État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces	lignes	
1.	N. O.	5.	15.	9½.	27.	11	beau.
2.	N. O.	7.	16½.	11.	27.	9	couvert, & le ſoir pluie.
3.	N. O.	10.	19.	13½.	27.	9	beau.
4.	N.	11.	20.	13.	27.	10	*idem.*
5.	N.	7.	18½.	11½.	27.	10	*idem.*
6.	N.	8.	18.	11½.	27.	8½	beau & vent; gel. bl. dans la nuit.
7.	N.	8.	19.	13½.	27.	7½	*idem.*
8.	N.	7½.	17½.	9½.	27.	10	beau avec vent; le ſoir bruine.
9.	S. E.	7½.	19.	11.	27.	10½	beau.
10.	N.	7½.	18½.	12.	27.	8	beau avec nuages.
11.	S.	11.	13.	9.	27.	8½	couv. & vent avec argues de pluie.
12.	S.	10.	15.	13.	27.	8	grand vent & couvert.
13.	N.	11.	19.	11.	27.	8	mat. pl. l'ap. midi beau avec nuages.
14.	N.	10.	15.	11½.	27.	11	couv. vent & bruine; le ſoir éclairs.
15.	N.	10.	18½.	14.	27.	11	beau avec nuages.
16.	N.	10.	22.	15.	27.	9½	beau; le ſoir éclairs.
17.	S.	10½.	12.	9.	27.	10½	pluvieux.
18.	N.	5.	15.	9.	28.	1	le matin gelée blanche, enſuite beau.
19.	N.	5½.	15.	8½.	27.	10	beau; gelée blanche le matin.
20.	N.	5.	17½.	10.	28.	2	*idem.*
21.	N.	7.	15½.	10.	28.	1	beau; le ſoir aurore boréale.
22.	N.	7½.	18.	12.	28.	1	beau.
23.	N.	8½.	18½.	13.	27.		*idem.*
24.	N.	8½.	21½.	14.	27.	10	*idem.*
25.	O.	10.	21.	12½.	27.	8½	beau avec nuages.
26.	S.	9.	13½.	13.	27.	5	pluvieux.
27.	S. O.	9½.	11¾.	8.	27.	7	pluie & vent.
28.	N.	8½.	11½.	4.	28.	0	beau avec vent.
29.	N.	2.	11.	4½.	28.	1	beau; gelée blanche le matin.
30.	N.	2½.	13.	5.	27.	9	*idem.*

Comme il eſt venu un peu d'eau à la fin du mois, on en a profité pour lever les avoines des terres noires, qui étoient encore dans les champs.

On a commencé auſſi à labourer à demeure (qui eſt la dernière façon que l'on donne à la terre, pour enſuite ſemer les blés), vers le milieu du mois.

On a commencé les vendanges le 22 ; les raiſins étoient gros, mais les ſéchereſſes du mois dernier ont fait un peu de tort, & les raiſins grilloient en mûriſſant ; cependant les vignes ont rendu plus du double que l'année dernière ; on a récolté quatre poinçonnées de vendanges par arpent ; le vin étoit de bonne qualité.

Les hirondelles ſont parties avant la Saint-Michel, il n'en paroiſſoit plus aucune à la fin du mois.

On a commencé à ſemer les ſeigles dans ce même temps.

OCTOBRE.

OCTOBRE.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.		État du Ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces*	*lignes*	
1.	O.	6.	11½.	13.	27.	9	pluvieux; il a tonné l'après-midi.
2.	S. O.	6½.	11½.	7.	27.	7	pluie & vent.
3.	S.	9.	11½.	7½.	27.	5	pluie le matin; l'après-midi couvert.
4.	N. O.	8.	12.	7½.	27.	7	beau avec nuages; le soir pluie.
5.	N. O.	5.	12.	8.	27.	7	beau avec nuages.
6.	N.	8½.	14.	13.	27	3	le matin pluv. le soir écl. sans tonn.
7.	S.	10.	20.	13.	27.	3½	beau, nuag. soir écl. foudre de vent.
8.	S.	9.	14½.	8½.	27.	5	couvert & bruine.
9.	S.	9.	10½.	10.	27.	3	pluvieux.
10.	S.	9.	11.	10.	27.	6	*idem.*
11.	S.	8.	10.	6½.	27.	8	nuageux; le soir pluie.
12.	E.	5½.		6½.	27.	9	beau avec nuages.
13.	N. E.	5½.	10½.	4½.	27.	7	*idem.*
14.	N.	4.	8½.	6½.	27.	4	couvert & venteux.
15.	N.	4½.	9.	4½.	27.	6	beau.
16.	N.	4½.	8½.	2.	27.	9	*idem.*
17.	N.	— ½.	6.	½.	27.	9	*idem.*
18.	N.	— 1½.	7½.	1½.	27.	9	*idem.*
19.	N.	— 1.	8.	5.	27.	5	nuageux; le soir pluie.
20.	S.	5½.	10½.	9.	27.	6	pluvieux.
21.	S.	7.	10½.	8½.	27.	7	*idem.*
22.	S. O.	5½.	10.	6½.	27.	8½	couvert & bruine.
23.	S. O.	9.	11.	11.	27.	6	pluie & vent.
24.	S. O.	11.	15.	13½.	27.	5	*idem.*
25.	N. O.	9.	11½.	8½.	27.	5	pluvieux.
26.	N.	5½.	7½.	4.	27.	10	couvert.
27.	N. E.	2.	8½.	7.	27.	9	beau.
28.	S. E.	8.	11.	10½.	27.	8	couvert & bruine.
29.	S.	9½.	13.	9.	27.	11	pluie le matin; l'après-midi couvert.
30.	S.	9.	11½.	8½.	28.	1	couvert.
31.	S. E.	4½.	12.	10.	27.	9	couvert, & le soir pluie.

Le commencement de ce mois a été humide ; le vin n'a pas beaucoup bouilli dans les cuves à caufe des pluies qui font venues à la fin de l'autre mois, qui ont un peu mouillé le raifin aux vignes ; cependant le vin avoit belle couleur, & étoit de bonne qualité, ce qui ne pouvoit guère être autrement, parce que les raifins étoient très-mûrs.

Le fafran n'a pas mal donné, mais il a forti de terre fort tard, & la récolte n'a été abondante que vers le 22 ou le 23 de ce mois : il étoit néceffaire qu'il vînt de la pluie, car comme il ne pouvoit pas en fortir, à caufe de la féchereffe, il auroit péri en terre ; moyennant ces pluies, il a fait très-bon labourer & femer les blés, même dans les terres noires où il n'en reftoit pas beaucoup à faire à la fin de ce mois, & les premiers faits étoient dans le même temps fort bien levés ; a rentré les orangers le 20.

La rivière d'Effonne a un peu augmentée dans ce mois.

NOVEMBRE.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.	État du ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces lignes*	
1.	S. O.	4½.	12½.	5.	28. 2	beau.
2.	S. E.	2½.	10.	4½.	28. 1	*idem.*
3.	E.	1½.	10.	6½.	27. 8	*idem.*
4.	S.	6.	11.	8.	27. 6	couvert; le ſoir pluie.
5.	S.	6.	8½.	7½.	27. 4	pluie & vent.
6.	S. O.	5½.	10.	7½.	27. 4	*idem.*
7.	S. O.	2½.	8½.	6.	27. 6	beau avec nuages.
8.	S. O.	4½.	8.	5½.	27. 8	beau avec nuag. pluie dans la nuit.
9.	O.	5½.	7½.	6½.	27. 5	pluvieux.
10.	O.	5½.	7.	5.	27. 6	*idem.*
11.	S. O.	9½.	11½.	7½.	27. 3	*idem.*
12.	N. O.	4½.	7.	3½.	27. 7	couvert.
13.	S. O.	0.	7.	4.	27. 9	beau.
14.	E.	3.	7½.	6.	27. 7	couvert, & pluie dans la nuit.
15.	S. O.	6.	9.	8.	27. 7	pluvieux.
16.	S.	8.	10.	9.	27. 8	couvert; le ſoir pluie.
17.	S.	6½.	10.	8.	27. 7	couvert; pluie ſur le ſoir.
18.	S.	7½.	8.	4.	27. 8	pluvieux.
19.	O.	3½.	6½.	5½.	27. 10	couvert.
20.	S.	4.	7½.	5.	27. 11	couvert; le ſoir pluie.
21.	S.	4.	7.	5.	27. 11	couvert.
22.	S.	3.	5.	4.	27. 11	*idem.*
23.	S.	5½.	9½.	10½.	27. 10½	pluie & grand vent.
24.	S.	10.	11.	10.	27. 9½	pluie & vent.
25.	S. O.	10.	10.	7.	28. 1	couvert.
26.	S. O.	6½.	8.	5.	28. 0	couvert & brouillard.
27.	S.	6.	9½.	6½.	27. 9½	pluie & grand vent.
28.	S.	4.	8½.	5½.	28. 0	beau.
29.	S.	4.	5¾.	4½.	27. 9	couvert.
30.	O.	5.	6.	1½.	27. 11½	beau; il a plu dans la nuit.

Ce mois a été très-humide, on a bien fait d'avoir semé les blés le mois dernier dans les bonnes terres, car ceux qui ne l'avoient point encore fait daus les terres noires, n'ont pu finir dans ce mois.

Le safran sec s'est vendu le 17 de ce mois, trente francs la livre.

On a commencé à donner à la terre des labours d'entre-hiver; on a aussi tiré les échalas dans les vignes, & on leur a donné la première façon que l'on nomme *parage.*

La rivière d'Essonne a été fort haute, elle a débordé, ce qui vient des grandes pluies qui sont tombées.

Il n'y a pas eu beaucoup de fruits cette année; mais plus de pommes que de poires: point de prunes, parce que, comme on l'a fait remarquer, au mois de Mai, il avoit noué fort peu de fleurs.

DÉCEMBRE.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.		État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces	lignes	
1.	N. O.	— 1 ½.	3.	2.	27.	9	beau.
2.	E.	1 ½.	2.	3 ½.	27.	4	couvert; le soir pluie.
3.	S. E.	3.	7.	5 ½.	27.	0	couvert; le soir pluie & vent.
4.	S.	4 ½.	7 ½.	5.	27.	2	pluvieux & grand vent.
5.	S.	4.	6 ½.	6 ½.	27.	0	pluvieux.
6.	S.	4 ½.	7.	6 ½.	27.	5	couvert; le soir pluie.
7.	S.	9.	10.	7 ½.	27.	7	pluvieux & grand vent.
8.	S.	4 ½.	9.	8 ½.	27.	10	couvert & grand vent.
9.	S.	7 ½.	10.	7.	27.	11	couvert & bruine.
10.	S.	3 ½.	8 ½.	7 ½.	27.	8 ½	couvert; le soir pluie.
11.	S.	5 ½.	10.	8 ½.	28.	9 ½	couvert.
12.	S. E.	5.	9 ½.	8.	27.	4 ½	beau.
13.	S.	8 ½.	9 ½.	6 ½.	27.	5 ½	pluvieux & venteux.
14.	S.	6 ½.	8.	10.	28.	5 ½	pluvieux & grand vent.
15.	S. O.	6.	7.	3.	27.	10	couvert.
16.	O.	1.	4 ½.	4.	28.	2	*idem.*
17.	O.	3.	6.	5.	28.	3	*idem.*
18.	O.	4.	6.	3 ½.	28.	3	*idem.*
19.	S. E.	½.	5.	3.	28.	2	*idem.*
20.	S.	3.	5 ½.	5.	28.	2	pluvieux.
21.	N.	4.	5 ½.	4.	28.	3	couvert.
22.	N. E.	3.	4.	2 ½.	28.	2	*idem.*
23.	S. E.	1 ½.	1 ½.	1.	28.	3	couvert; le soir bruine.
24.	N.	1 ½.	3 ½.	3 ½.	28.	4	*idem.*
25.	N.	½.	4 ½.	1.	28.	4 ½	beau.
26.	N.	0.	3.	0.	28.	6	*idem.*
27.	N.	— 1.	— ½.	— 1.	28.	3 ½	beau; l'après-midi brouillard.
28.	S.	1 ½.	½.	1 ½.	28.	0	grand brouillard.
29.	S. O.	1 ½.	5.	7.	27.	7	pluvieux & venteux.
30.	O.	2.	4.	3.	27.	9	couvert & bruine.
31.	O.	6.	7.	5.	27.	3 ½	pluvieux & grand vent.

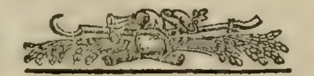
Les ouvrages ont été interrompus, tant pour les voitures que pour labourer, parce que la terre étoit trop molle.

Les blés étoient très-beaux, les pluies qui sont tombées ont fait pousser beaucoup d'herbes. Le blé de la récolte de 1778, s'est vendu au marché dix-huit livres le sac, mesure de Pithiviers. Le vin de la même récolte s'est vendu soixante livres le poinçon.

La rivière d'Essonne étoit d'une moyenne hauteur.

OBSERVATIONS sur la quantité d'Eau de pluie tombée en l'année 1778.

JANVIER	1 pouc.	0 lignes	17 48.es	2 pouc. 11 lignes 45 48.es
FÉVRIER	0.	9.	26	
MARS	1.	2.	2	
AVRIL	2.	1.	1	4. 4. 47.
MAI	1.	8.	42	
JUIN	0.	7.	4	
JUILLET	1.	7.	22	3. 6. 46.
AOÛT	0.	7.	44	
SEPTEMBRE	1.	3.	28	
OCTOBRE	1.	4.	37	5. 6. 5
NOVEMBRE	2.	4.	42	
DÉCEMBRE	1.	8.	22	
TOTAL DE LA PLUIE tombée pendant l'année 1778				16 pouc. 5 lignes 47 48.es





MESSIEURS DE LA SOCIÉTÉ Royale des Sciences établie à Montpellier, ont envoyé à l'Académie le Mémoire suivant, pour entretenir l'union intime qui doit être entre elles, comme ne faisant qu'un seul Corps, aux termes des Statuts accordés par le Roi, au mois de Février 1706.

DESCRIPTION

Du petit Volcan éteint, dont le sommet est couvert par le village & le château de Montferrier, à une lieue de Montpellier.

Par M. DE JOUBERT.

LES Naturalistes de notre siècle sont les premiers qui se soient aperçus que plusieurs provinces de France avoient éprouvé dans des temps reculés l'explosion des feux souterrains par les volcans.

M.rs de Malesherbes & Guettard parcourant l'Auvergne en 1751, reconnurent plusieurs produits volcaniques dans les matériaux préparés pour engraver les chemins, & dans les pierres employées pour les bâtimens ; les bornes & les *butterones* distribuées dans les environs de Clermont, furent pour eux de nouvelles indications *(a)*. Ils furent conduits

(a) Sur quelques montagnes de la France qui ont été des Volcans ; par M. Guettard. *Voy. Mémoires de l'Académie, année 1752, page 27.*

par des paysans au lieu de l'extraction de ces pierres; ils s'y confirmèrent dans l'opinion de l'ancienne existence d'un volcan. Cette conviction s'accrut en eux dans les courses qu'ils firent sur les autres montagnes des environs de Clermont, le Puy-Dôme & autres pareilles. M. Guettard de retour à Paris, annonça à l'Académie des Sciences, les volcans éteints de l'Auvergne. M. Desmarest a visité & décrit le même pays; en 1763 & 1764 il a déterminé la nature des différentes productions volcaniques qui s'y trouvent, notamment des laves compactes ou *basaltes*, dont il a le premier fait connoître l'origine dans les séances particulières de l'Académie *(b)*. M. Guettard, en 1770, n'a éprouvé aucune difficulté à s'exprimer nettement sur ce point, en disant que M. Desmarets avoit découvert les basaltes en Auvergne. L'ancien incendie & commotion de plusieurs parties de la France, qui nous sont démontrés par ces monumens indubitables, ne se trouvent cependant indiqués ni par les Historiens, ni dans les ouvrages des Naturalistes antérieurs à ce siècle. Il s'est présenté depuis d'autres prétendans à la découverte. M. de Franjat en a refusé la gloire à M. Guettard, dans son livre sur les volcans du Vivarais; mais elle lui est bien assurée par le témoignage très-probant & très-circonstancié, que M. de Malesherbes lui a donné, & par la justice qui lui a été rendue en Auvergne. J'ai été témoin dans le voyage que j'y fis avec lui, il y a deux ans, qu'on s'est rappelé l'étonnement qu'y avoit causé le premier jugement qu'il avoit porté sur les volcans de cette contrée.

On n'a pas contesté à M. Montet l'avantage d'avoir découvert & annoncé les volcans du Languedoc; ces Naturalistes ont instruit & dirigé les voyageurs; nos montagnes sont visitées par les observateurs de la Nature. On s'efforce de

(b) Note du Mémoire de M. Montet, pour l'année 1760, sur un grand nombre de Volcans éteints en Languedoc: Mémoire sur l'origine du Basalte; par M. Desmarest, *Mém. de l'Acad. année 1771*, *page 476.* Second Mémoire sur les Sciences & les Arts, *tome second*; neuvième Mémoire sur le Basalte des Anciens & des Modernes, *page 276.*

trouver les traces & les produits des feux souterrains, on cherche à déterminer les époques des éruptions, on en calcule le nombre, on en mesure la direction & l'étendue, & on analyse les matières vomies. On conjecture sur les rapports & la liaison de ces bouches qui se laissent approcher aujourd'hui sans danger ni crainte; & on n'est plus étonné de rencontrer fréquemment en Languedoc les pétroles & les sources d'eaux chaudes. Chaque voyageur ajoute quelque chose à ce que les descriptions précédentes lui avoient appris, & sans rien enlever au mérite de la découverte, on perfectionne tous les jours les détails de l'observation.

Le petit volcan de Montferrier est du nombre de ceux que M. Montet a indiqués. Personne depuis lui ne s'en est occupé; j'ai cru que je mériterois des reproches si, après avoir visité deux fois les volcans du Vélay & du Vivarais, j'omettois d'observer celui qui est le plus près de nous; je me suis applaudi d'avoir fait précéder l'examen des grands volcans; ce que j'y ai vu m'a rendu sensibles des objets qui auroient pu m'échapper à Montferrier; l'éruption paroît avoir été de peu de durée, tout y est resserré & en petit volume.

Soit que les éruptions volcaniques soient sorties des montagnes déjà remarquables par leur élévation, soit que les monticules ne se soient formés que par une boursouflure que le feu souterrain a élevée dans des vallons, l'aspect de tout volcan non altéré par des révolutions postérieures, présente même de très-loin la forme d'un cône tronqué; lorsque la montagne s'est ouverte pour vomir les matières rejetées à la suite des ébranlemens intérieurs, son sommet s'est recouvert de cendres ou de petits fragmens de terres cuites & de ponces; l'orifice du volcan s'en est garni successivement, & ces corps légers sont retombés en talus, à mesure qu'ils n'ont pas eu de base; de-là la forme conique que ces montagnes acquièrent. Lorsque la vallée a vu élever au milieu d'elle la boursouflure dont le sommet s'est rompu pour vomir les flammes, la forme conique est dûe à la boursouflure elle-même, qui ne fait que se revêtir des matières légères que

le volcan rejette. C'eſt par la conſtitution des terreins environnans, autant que par celle de la montagne elle-même, que l'on peut déterminer quel étoit l'état du pays antérieurement à l'exploſion.

Il ſuffit du premier coup-d'œil jeté ſur le canton de Montferrier, pour juger que l'élévation ſur laquelle le village & le château ſont bâtis, eſt diſcordante avec les côteaux voiſins, & qu'on ne peut rapporter ſon exiſtence à la même origine.

La vallée de Montferrier s'étend du nord au midi, elle a été creuſée par la rivière qui y coule dans cette direction & qu'on appelle le Lez, en latin *Ledum*. Cette rivière a rompu par ſon cours ſucceſſif un banc de cailloux roulés, la plupart calcaires, offrant par intervalles une eſpèce de poudingue, coloré par de l'ocre martiale brune : cette rupture a laiſſé en forme d'élévation à l'eſt & à l'oueſt, les extrémités de ce banc, par le creuſement ſucceſſif qui a même attaqué les couches de pierre calcaire, ſur leſquelles ce banc eſt poſé. L'action de la rivière a donné à la vallée la forme d'un arc de cercle renverſé; c'eſt au tiers de cet arc que s'élève le monticule volcanique; il a pour baſe la pierre calcaire qui conſtitue l'état commun du pays, à ſix lieues au-deſſus vers le nord, & à moins de demi-lieue vers le midi.

Cette pierre préſente des couches parallèles entr'elles, d'environ un pied d'épaiſſeur; elle eſt d'un gris-foncé dans l'intérieur, & elle ſe caſſe preſque toujours en parallélogrammes; la couche de poudingue ſe trouve au-deſſus, & dans la direction de l'arc de cercle; la ſommité du monticule qui excède cette direction, eſt toute volcanique, c'eſt d'après la face du monticule au midi, que je fais cette deſcription.

L'inclinaiſon des couches de pierre calcaire & du poudingue, eſt généralement d'un très-petit angle, & dirigée du nord au midi en allant de Montpellier à Montferrier; on la voit conſtante juſque vers le pont où eſt le poteau de la Seigneurie, & qui traverſe une vallée allant de l'eſt à l'oueſt. On eſt ſurpris que les couches de pierre calcaire ſoient inclinées ſur le bord de cette vallée rapidement &

en ſens contraire du midi au nord, & que vis-à-vis & au monticule de Montferrier, les mêmes couches s'inclinent au contraire du nord au midi & auſſi rapidement. La même vallée abſorbe l'extrémité des unes & des autres; d'après cet aſpect qui doutera que cette vallée de l'eſt à l'oueſt, n'ait été formée par un affaiſſement? elle eſt au bas du volcan, elle a pu en être le foyer dont l'exploſion s'eſt dirigée obliquement du midi vers le nord; le vide produit par l'éruption & les tremblemens qui l'ont préparée, ont dû occaſionner la rupture des couches de pierre calcaire, dont la maſſe s'eſt inclinée en ſens contraire vers ce foyer, en entraînant dans la même chute les parties les plus voiſines.

L'état de la montagne de Montferrier confirme cette conjecture: ſa face au midi eſt, comme il vient d'être dit, compoſée de couches de pierre calcaire & de la couche de poudingue qui forment enſemble les deux tiers de l'élévation: le tiers ſupérieur eſt volcanique; au contraire, tout eſt volcanique dans la face qui regarde le nord, depuis la ſommité juſqu'au bas. L'exploſion du volcan a donc été dirigée très-obliquement du midi vers le nord; elle a ſoulevé la maſſe des pierres conſtitutives du terrein pour les incliner vers le midi. Il en a réſulté une grande ouverture, dans laquelle s'eſt faite la bourſouflure qui a élevé le monticule au-deſſus du terrein originaire. Dans la partie de l'oueſt, les matières vomies ont recouvert l'ancien ſol & ſe ſont étendues vers le monticule de poudingue. Le côté de l'eſt préſente une face plus étendue en profondeur, parce qu'il regarde le milieu de la vallée, les deux tiers ſupérieurs ſont volcaniques; il eſt poſſible que la formation des terraſſes pour deſcendre du château à la rivière, ait occaſionné dans une portion l'enlèvement de quelque couche primitive, & que dans quelques endroits nous ne voyons qu'un intérieur dégagé des pierres calcaires qui le recouvroient; cette conjecture eſt indiquée par la forme des laves qui paroiſſent, ſur-tout vers le bas, avoir été moulées ſur des corps qui ont préſenté des cavités.

On remarque dans tous les volcans, tant exiſtans qu'éteints, que le ruiſſeau de laves ne renverſe rien, & que le moindre obſtacle l'arrête: il enveloppe les corps qui offrent le moins de réſiſtance, de-là vient la variété des matières hétérogènes & les plus altérables au feu, que nous trouvons intactes dans les produits des volcans. La lave s'adapte ſur la ſurface des corps qu'elle rencontre, elle s'introduit dans leurs fentes juſques à ce qu'elle parvienne à les ſurmonter & à les envelopper.

L'éruption du volcan de Montferrier s'eſt contenue dans le terrein même du monticule; tout indique qu'elle n'a pas été de longue durée, & qu'elle ne s'eſt pas réitérée: c'eſt du côté de l'oueſt que ſe trouvent les ruiſſeaux les plus conſidérables de lave compacte; j'en ai aperçu deux d'environ cinq à ſix toiſes de large. La lave compacte qui a coulé du côté du nord y occupe moins d'étendue; cette lave à laquelle on donne proprement le nom de *baſalte*, eſt le produit de l'éruption dans ſa plus grande force; elle a ſillonné les premières matières vomies, dont le volume eſt enveloppé: ces premières matières ſont graveleuſes & le plus ſouvent incohérentes.

Elles ont cependant pris une conſiſtance très-ſolide dans la partie de l'oueſt qui n'a pas été le lieu du premier dépôt de l'éruption, il paroît que cette partie ne s'eſt garnie que la dernière, auſſi a-t-elle reçu les matières les plus compactes. C'eſt le canton le plus élevé, c'eſt l'extrémité ſupérieure de l'arc de la vallée, & le monticule volcanique n'a pu y verſer que quand il a eu acquis ſa plus grande élévation. Cette eſpèce de lave y offre le coup-d'œil d'une brèche ou d'un poudingue à petites maſſes, elle ſe rapproche de celle qui forme les montagnes aux environs du Puy en Vélay. Un ſédiment volcanique d'un brun clair y réunit des grains gros au plus comme des noiſettes, d'une lave noire rarement poreuſe, d'une lave très-compacte brune, d'une eſpèce de brique rougeâtre & peu dure, de chryſolite & de ſchorl; tous ces corps ſont mélangés & liés par ce ſédiment.

Dans la partie du midi & de l'eſt, ce produit de l'éruption eſt uni par une autre matière. Le ſpath s'eſt introduit dans les intervalles des globules & dans les fentes des maſſes de cette eſpèce de gravier. Lorſque les fentes ſe ſont trouvées trop grandes, le ſpath n'a fait qu'encroûter les parois, & il a formé dans le vide ſa criſtalliſation en pyramides trièdres: cette formation ſpathique n'eſt dûe nullement au volcan, elle eſt très-poſtérieure.

Le gravier volcanique qui conſtitue la partie ſeptentrionale du monticule, n'a éprouvé aucune réunion, il ſe détache & s'ameublit aiſément.

Depuis la porte du village qui regarde entre le nord & l'eſt, juſqu'au portail de la Paroiſſe, s'élève une maſſe de lave compacte noirâtre, refendue verticalement en vrais priſmes baſaltiques; les maiſons & l'égliſe ſont fondées ſur cette lave; près la porte & dans l'intérieur du village, les baſaltes s'élèvent au-deſſus du ſol de cinq à ſix pieds; les bornes qui ont été poſées au dehors de la porte, ont été détachées de cette maſſe: ces priſmes varient dans le nombre de leurs faces, comme dans toutes les chauſſées des Géans. De pareils priſmes d'un volume médiocre & même très-petit, ſe trouvent épars dans les terres labourées des environs de ce ſommet du volcan. Aucune recherche n'a pu me faire découvrir à jour la place du cratère, & tout indique qu'on a profité du ſommet tronqué du monticule, pour y bâtir les maiſons; l'inclinaiſon des couches primitives ſoulevées du nord au midi, l'abondance & la qualité de la lave graveleuſe ſur la face du nord, les courans de lave compacte de l'oueſt & du nord, la direction & la réunion de ces courans vers le lieu où eſt le village, concourent à prouver que les maiſons nous cachent la bouche de ce volcan. Elle n'a pas dû laiſſer une cavité après l'éruption, dès que l'éboulement obſervé aux limites de la terre de Montferrier, en a rempli l'eſpace où l'inflammation avoit formé le vide; les matières fondues & ſoulevées dans le cratère, n'ont pu redeſcendre dans le foyer qui avoit été comblé par l'ébou-

lement; l'exploſion a donc dû être interceptée, & les laves ſe ſont trouvées arrêtées dans la bouche; c'eſt ainſi que l'éruption paroît avoir pris fin.

Il n'eſt pas auſſi facile de donner l'époque dans laquelle ce volcan s'eſt formé. L'hiſtoire & les pierres du pays, prouvent que la mer a ſéjourné non-ſeulement à Montferrier, mais ſix lieues plus haut vers le nord. Le ſchiſte & le granit ne ſe trouvent qu'entre Saint-Hypolite & la Salle, & ne s'étendent vers l'oueſt qu'au-deſſus de Ganges, ce qui donne au moins la même diſtance au nord. L'abandon que la mer nous a fait de tout ce pays, ne remonte donc pas à l'époque la plus ancienne, & Montferrier eſt beaucoup plus près des côtes actuelles de la mer, que des montagnes que la Méditerranée a autrefois reſpectées. Le banc de poudingues que nous avons déjà décrit, & qui traverſoit anciennement le terrein de la vallée de Montferrier, eſt encore une formation marine. Les cailloux roulés qui le conſtituent y ont été portés & rangés par le courant qui règne & régna toujours ſur nos côtes de l'eſt à l'oueſt. Il ſeroit donc poſſible que le volcan de Montferrier ſe fût formé dans le ſéjour que la mer a fait dans cette contrée; il eſt cependant plus vraiſemblable qu'il n'a brûlé qu'après la retraite de la mer. Le banc de poudingues paroît avoir été rompu, & la vallée étoit déjà formée avant l'exploſion; l'aſpect des lieux ſemble l'indiquer. Il auroit abſolument pu ſe faire qu'un courant de la mer eût creuſé la vallée, comme il a ſéparé les deux maſſes de la montagne voiſine, dite de *Saint-Loup*; mais la direction de ce courant ne porte pas vers Montferrier, & la rivière qui coule dans la vallée, eſt un agent naturel plus vraiſemblable. Je crois donc que cette rivière, dite *le Lez*, a ſucceſſivement rompu le banc de poudingues élevé par la mer, & a creuſé enſuite les pierres qui avoient été le produit des premiers dépôts, & que dans les progrès de ce creuſement, les eaux ont trouvé accès dans l'intérieur, & ſe ſont portées ſur les matières inflammables; je ſuppoſai, à ma première viſite de ce volcan, qu'il y avoit eu un

amas de pyrites ; mais mes dernières obſervations m'induiſent à penſer que les pyrites ont pu n'y pas exiſter; j'ai obſervé dans un puits de cinq à ſix toiſes, que j'ai vu creuſer vers l'oueſt, hors du village, que la maſſe de lave étoit traverſée à environ vingt pieds en profondeur, par un banc d'un à deux pieds d'épaiſſeur, qui avoit l'apparence d'argile; la lave le porte & le couvre; il s'en eſt trouvé des maſſes rejetées avec le gravier qui couvre la face du nord, & les fragmens de cette même couche ſont répandus dans tout le monticule. C'eſt une terre graſſe au toucher, & qui a le coup-d'œil d'argile ocreuſe ; l'examen chimique a prouvé qu'elle contient un tiers en argile, & le ſurplus en terre calcaire, avec la préſence d'un peu de fer. Ce mélange forme une vraie marne, laquelle pouſſée au feu, a donné un verre noir.

L'état préſent de cette couche indique qu'elle a pu, avant la formation du volcan, être une véritable argile tenant du fer & que ſa décompoſition a été la cauſe de l'inflammation. Cette décompoſition a produit la ſéparation de l'acide vitriolique. Cet acide en abandonnant l'argile, & en ſe portant ſur la terre ocreuſe, répandue généralement dans le canton, a pu former une combinaiſon pyriteuſe dont l'inflammation a cauſé l'éruption du volcan ; c'eſt peut-être auſſi de cette même couche, primitivement argileuſe, que ſont ſortis ces corps vitreux que nous apercevons au milieu des laves, & par petits rognons; ils ſont quelquefois mélangés de parties marneuſes.

FIN.

